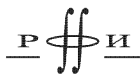


УДК 533.9;  
ББК 22.333  
К13



*Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 02-02-3001*

Составители:

М.Б. Кадомцев, О.П. Погуце, А.В. Тимофеев, В.Д. Шафранов

Кадомцев Б. Б. **Избранные труды.** В 2 т. Т. I. / Под. ред. В.Д. Шафранова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 560 с. — ISBN 5-9221-0365-2.

Первый том избранных трудов Б.Б. Кадомцева составлен из его оригинальных работ. Основную его часть составляют работы по физике высокотемпературной плазмы. В них исследуются колебания плазмы и ее устойчивость. Развивается теория плазменной турбулентности и вызываемых ею процессов переноса. Рассмотрены проблемы термоядерного реактора-токамака. Включены также работы по исследованию свойств вещества в сверхсильном магнитном поле (вещество пульсаров) и проблемам квантовой механики.



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Борис Борисович Кадомцев — выдающийся физик, в течение четверти века бывший лидером отечественной программы УТС, родился 9 ноября 1928 в г. Джаркенте Талды-Курганской области вблизи границы Казахстана с Китаем. Его родители, преподаватели истории Борис Алексеевич и Надежда Петровна Кадомцевы, были родом из Пензы. В Джаркенте они были распределены после окончания Московского университета. В Джаркенте в то время было беспокойно — то и дело совершались набеги банд на населенные пункты. Уже взрослым, Борис Борисович помнил крики, стрельбу и свою мать, бегущую с ним, двухлетним мальчиком на руках, в соседний аул, спасаясь от бандитов. Семья Кадомцевых вернулась в Пензу в 1932 г. Детские и школьные годы Бориса прошли здесь.

Борис был чрезвычайно любознательным ребенком. Он собирал вырезки из журналов с описанием самоделок, электрических схем и т.п. Сарай во дворе он оборудовал под небольшую мастерскую, где проводил много времени, изготавливая разные интересные поделки. Позже он проявил интерес к опытам по химии и физике. По воспоминаниям его супруги Антонины Михайловны, учившейся с ним на одном курсе, собранный им еще в школе радиоприемник был такого качества, что они пользовались им даже в 60-е годы в Москве. Школу он заканчивает с золотой медалью. Неудивительно, что, став в 1946 г. студентом физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, Б.Б. Кадомцев с легкостью и глубоко усваивает учебный материал, становится сталинским стипендиатом. За время обучения в университете на него наиболее сильное впечатление произвели лекции по математике профессора И.В. Арнольда (отца академика В.И. Арнольда), а также личное общение с профессором А.А. Власовым\*). Следуя его совету, Б.Б. Кадомцев поступил на кафедру теоретической физики, но был переведен на кафедру «Строение вещества», созданную за год до этого для подготовки специалистов по атомной проблеме.

Окончив с отличием в конце 1951 г. физфак, Б.Б. Кадомцев по настоянию руководителя своей дипломной работы Д.И. Блохинцева был зачислен сотрудником Физико-энергетического института (ФЭИ) в г. Обнинске Калужской области. Здесь им были выполнены работы по расчету одного из вариантов термоядерного оружия. Только лишь небольшая общезначимая их часть: по соотношению взаимности для функции точечного источника кинетического уравнения и по обобщению принципа инвариантности В.А. Амбарцумяна на случай нейтронного или светового излучения в однородной среде с произвольной формой границы — была опубликована впоследствии в открытой печати. В 1954 году Б.Б. Кадомцев становится кандидатом физико-математических наук.

Работая в Обнинске, несмотря на большую служебную загруженность, Борис Борисович использует любую возможность для расширения научного кругозора — регулярно посещает знаменитые семинары Л.Д. Ландау, старается быть в курсе всех новинок теоретической физики. Однако необходимость решения в ФЭИ однотипных технических задач начинает все больше сковывать его творческий потенциал. Поэтому, когда в декабре 1955 г., услышав на организованном

---

\*) На 3-ем курсе Б.Б. Кадомцев пропустил по тяжелой болезни два семестра и познакомился с А.А. Власовым при сдаче ему экзаменов по нескольким теоретическим курсам (все на отлично).

И.В. Курчатовым Всесоюзном совещании по термоядерным исследованиям о работах по проблеме магнитного удержания плазмы (строго засекреченных в то время), он, «твердо решил, что физика высокотемпературной плазмы является самой интересной областью физики» и «стал вынашивать планы перейти в ЛИПАН к М.А. Леонтовичу»<sup>\*</sup>). Такая возможность представилась только в 1956 г. Одновременно с переходом своего руководителя Д.И. Блохинцева на пост директора созданного «Объединенного института ядерных исследований» (г. Дубна), В.Б. Кадомцев добивается перевода на работу в Курчатовский институт в теоретический сектор академика М.А. Леонтовича.

В исследовании плазмы в полной мере проявились характерные для Бориса Борисовича необычайная физическая интуиция и способность образного мышления. Плазма как сложный объект исследования была адекватна всеохватывающему уму Бориса Борисовича. Обдумывая объяснение каких-либо экспериментальных данных, он так вживался в предмет исследования, так ясно представлял себе, что происходит с плазмой, как она взаимодействует с магнитным полем, что у него уже не было проблем с математическим описанием явления. «Для меня формулы, математические уравнения — только средство описания реальных физических явлений. Мыслить я пытаюсь образами, картинками процессов, протекающих в плазме» — говорил он позже в одном из интервью. Смело отбрасывая то, что не влияет на суть исследуемого процесса, Борис Борисович строил ясную математическую модель явления, служившую затем стимулом для проверки, уточнения другими исследователями — либо экспериментально, либо с помощью численного моделирования. В то же время, когда это было необходимо, он не чурался сложных строгих расчетов.

С самого начала работы в Курчатовском институте (1956–1958 г.г.) ему сразу же удалось выполнить ряд ключевых работ, которые показали его истинный класс выдающегося физика-исследователя, способного совершенно самостоятельно решать важнейшие проблемы современной физики. Глубокое понимание методов современной статистической физики позволило В.Б. Кадомцеву быстро решить поставленную М.А. Леонтовичем проблему так называемого действующего электрического поля, рассчитав его отличие от среднего как в плазме без магнитного поля, так и при его наличии. В работе по флуктуациям в газе им было показано, что флуктуации (вопреки мнению многих авторитетов) могут быть естественным образом описаны в рамках кинетического уравнения со случайным источником, за счет выделения средней части, описываемой стандартным уравнением Больцмана. За короткое время он рассмотрел несколько типов магнитных ловушек для стационарного удержания плазмы, включая ловушки с «гофрированным» магнитным полем. Затем он выполнил исчерпывающие исследования по неустойчивости перестановочных (желобковых) возмущений плазмы, удерживаемой в магнитном поле с замкнутыми магнитными силовыми линиями. Полученное им условие отсутствия конвективной неустойчивости плазмы имеет важное значение для систем магнитного удержания с внутренними левитирующими проводниками с током. Вместе с С.И. Брагинским В.Б. Кадомцев предложил также метод предотвращения развития неустойчивости плазмы с помощью внешних «охраняющих» проводников с током.

Значительная часть работ В.Б. Кадомцева по плазме в это время выполнена в тесной связи с экспериментом. Большое значение для развития физики удержания плазмы сыграли две его работы. Первая по теории токово-конвективной неустойчивости плазмы в тлеющем разряде, находящемся во внешнем магнитном поле (1959 г., совместно с А.В. Недоспасовым), полностью описала эксперименты шведских физиков Ленерта и Ху и предсказала величину критического поля и скорость аномальной диффузии. Позднее она нашла применение также в

<sup>\*</sup> В кн. «Воспоминания об академике М.А. Леонтовиче» — 2е изд., доп. — М.: Наука. Физматлит, 1996. — 448 с. ЛИПАН — Лаборатория измерительных приборов Академии наук — тогдашнее кодовое название будущего Курчатовского института.

электронно-дырочной плазме полупроводников. Вторая — по конвекции плазмы в осесимметричной открытой ловушке объяснила опыты М.С. Иоффе с сотрудниками, впервые обнаружившими экспериментально желобковую неустойчивость и определившими вызываемые ею потери плазмы. Обе эти работы Б.Б. Кадомцева стали этапными в проблеме УТС, так как они развенчали жупел «бомовской» диффузии плазмы в магнитном поле, казавшейся в то время (на основании неблагоприятных опытов по удержанию плазмы в стеллараторах Принстонской лаборатории) универсальной и неизбежной, не оставлявшей надежды на техническую реализуемость термоядерного реактора.

В начале 60-х Б.Б. Кадомцев начал активно заниматься сложной теоретической проблемой — разработкой теории турбулентности плазмы в магнитном поле. К этому же времени относятся его работы по исследованию механизмов самоподдержания продольного магнитного потока в тороидальном турбулентном разряде со стабилизацией слабым магнитным полем (знаменитая в 1958–1968 гг. большая английская тороидальная установка ZETA). По сути, это были первые шаги в объяснении явления «самоорганизации» сильно неравновесной плазмы при непрерывном введении в нее энергии. Выступление Б.Б. Кадомцева с этими работами на 1-й Международной конференции МАГАТЭ\*) по физике плазмы и проблеме управляемого термоядерного синтеза (1961 г., Инсбрук) показало, что он является одним из сильнейших физиков в термоядерном сообществе. На следующей, 2-й конференции МАГАТЭ (1965 г., Лондон) ему будет оказана честь выступить с подведением итогов Конференции в области теории плазмы. В 1961 г. Б.Б. Кадомцев защищает докторскую диссертацию «Конвекция плазмы в магнитном поле», а в 1962 г. избирается членом-корреспондентом АН СССР.

В развитие теории турбулентности высокотемпературной плазмы в магнитном поле Б.Б. Кадомцев вместе со своим учеником В.И. Петвиашвили выводит кинетическое уравнение для описания рассеяния волн на частицах при слабой турбулентности (1962). В дальнейшем он проводит крупный цикл исследований по теории коллективных процессов в высокотемпературной плазме, которые подытожены в его монографии «Турбулентность плазмы» (в сборнике «Вопросы теории плазмы» 1964. Т. 4). В параллель с этими работами выходят его две важные общезначимые работы «Дрейфовая неустойчивость неоднородной плазмы в магнитном поле» (совместно с А.В. Тимофеевым) и «Волны с отрицательной энергией в диспергирующих средах» (совместно с А.Б. Михайловским и А.В. Тимофеевым).

В последующем Б.Б. Кадомцев сосредоточивается, главным образом, на исследовании разных типов неустойчивости плазмы в тороидальных системах с сильным магнитным полем (токамаки, стеллараторы) и их влияния на усиление диффузии плазмы. Борис Борисович открыл бесстолкновительную неустойчивость на запертых частицах. Однако более важным в реальных условиях оказался ее диссипативный аналог, обнаруженный им совместно с О.П. Погуце. Широкую известность получил проведенный Б.Б. Кадомцевым и О.П. Погуце анализ множества неустойчивостей, которые могут развиваться в плазме токамака (Вопросы теории плазмы 1967 г.). Они были классифицированы по степени локализации под действием ширя магнитного поля. Оказалось, что имеет наибольший размер и потому является наиболее опасной ионная температурно-дрейфовая неустойчивость. Отмечалось, что тем не менее ни эта, ни другие неустойчивости (без нарушения критериев МГД устойчивости) не должны приводить к диффузии плазмы масштаба «бомовской» диффузии.

На этой основе Б.Б. Кадомцевым был сделан важный вывод о технической реализуемости термоядерного реактора на основе токамака (публикации 1967 г.). Этот вывод стимулировал тогдашнего руководителя советской программы УТС академика Л.А. Арцимовича к активизации экспериментальных исследований по

\*) Международное Агентство по атомной энергии.

токамакам, что, в конечном итоге, и привело к триумфу этих систем магнитного удержания плазмы.

К этому времени относится и получение Б.Б. Кадомцевым совместно с В.И. Петвиашвили широко известного теперь фундаментального двумерного интегрируемого нелинейного уравнения для ионно-звуковых волн (уравнение Кадомцева–Петвиашвили).

Активно работая в области физики высокотемпературной плазмы, Б.Б. Кадомцев не переставал интересоваться общими вопросами теоретической физики. Так в связи с открытием пульсаров он выполнил несколько ярких работ (часть совместно с В.С. Кудрявцевым) по исследованию свойств вещества в сверхсильном магнитном поле.

В 1970 г. Борис Борисович Кадомцев был избран действительным членом АН СССР.

В последующем в связи с широким развитием во всем мире экспериментальных исследований по нагреву и удержанию плазмы в токамаках Б.Б. Кадомцев основное внимание уделяет углубленному анализу тех закономерностей, которые обнаруживались в этих системах. Здесь в полной мере проявились его характерные черты страстного исследователя: энергия, напор, колоссальная работоспособность, быстрота мышления при внешней неторопливости. Его четкое стратегическое мышление вносило дух уверенности и оптимизма в окружающих. Б.Б. Кадомцеву удавалось раньше других обнаруживать «горячие точки» в физике плазмы и находить пути решения задач, по которым затем шли многие и многие исследователи. Термоядерному сообществу хорошо известна стимулирующая роль идей Б.Б. Кадомцева и его глубоких эвристических предсказаний хода развития сложных процессов в плазме. Особенно большую роль сыграли две работы Б.Б. Кадомцева, опубликованные в первом томе журнала «Физика плазмы» (1975 г.). Это работы «О неустойчивости срыва в токамаках» и «Токамаки и анализ размерностей». В первой работе речь идет о «внутренней неустойчивости срыва» в токамаке — быстрой перестройке распределения тока в центральной зоне тороидального плазменного шнура, сопровождающейся процессом пересоединения магнитных силовых линий и дающей ключ к пониманию наиболее опасного для токамака-реактора явления большого срыва.

Более поздние работы Б.Б. Кадомцева во многом связаны с проектами термоядерного реактора-токамака. Но неразгаданные тайны поведения плазмы в токамаке продолжают волновать Бориса Борисовича. Их объяснения он ищет, рассматривая плазму в токамаке как сложную самоорганизующуюся систему, в которой в единое целое завязываются как высокотемпературная центральная часть плазменного шнура, так и низкотемпературная пристеночная. В настоящее время такой подход становится определяющим при построении цельной картины явлений, происходящих в плазме токамака.

В последние годы своей жизни Б.Б. Кадомцев вернулся к волновавший его со студенческих лет проблеме измерения в квантовой механике. Согласно развитому им подходу измерение, приводящее к коллапсу волновой функции, возникает при любом необратимом взаимодействии квантового объекта с окружающим миром. Такое взаимодействие может быть описано обобщенным уравнением Шредингера (с комплексным гамльтонианом), обеспечивающим естественный переход от квантового к классическому поведению частицы. Эти представления Б.Б. Кадомцев применил к объяснению экспериментов Ю.Л. Соколова — появлению когерентной добавки у возбужденного атома водорода, пролетающего вблизи поверхности металла.

Работы, собранные в настоящем издании, отражают напряженную творческую деятельность Бориса Борисовича, продолжавшуюся почти полвека. Полученные им результаты имеют непреходящую ценность. Они легли в фундамент новой науки — физики высокотемпературной плазмы.

## ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ \*)

1. Принцип инвариантности в теории рассеяния света был сформулирован впервые В.А. Амбарцумяном для полубесконечной среды [1]. Впоследствии С. Чандрасекар распространил его на случай плоского слоя [2]. В настоящей работе принцип инвариантности применяется к среде произвольной геометрической формы, что представляет интерес как для теории рассеяния света, так и для некоторых задач нейтронной физики.

Во избежание излишней громоздкости мы предположим, что рассеяние происходит без изменения частоты (как будет видно из дальнейшего, обобщение на случай рассеяния с изменением частоты не представляет особых затруднений). Кроме того, будем предполагать, что рассматриваемая среда является однородной и ограничена выпуклой поверхностью  $S$ . В силу однородности среды уравнение переноса не содержит явной зависимости от  $\mathbf{r}$ , и, следовательно, оно инвариантно по отношению к бесконечно малому движению пространства. Поэтому результат действия такого преобразования можно целиком учесть изменением граничных условий. Это утверждение и составляет собой содержание принципа инвариантности в общем случае.

Принимая за единицу длины средний свободный пробег кванта, мы запишем уравнение переноса для функции влияния [3] в виде

$$\{(\boldsymbol{\omega}\nabla) + \rho(\mathbf{r})\}G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) = \lambda\rho(\mathbf{r}) \int p(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}')G(\boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) d\boldsymbol{\omega}' + \delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (1)$$

Здесь  $G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0)$  — функция влияния, представляющая собой интенсивность излучения в точке  $\mathbf{r}$  с направлением  $\boldsymbol{\omega}$ , обусловленную точечным источником, находящимся в точке  $\mathbf{r}_0$  и испускающим излучение в направлении  $\boldsymbol{\omega}_0$ ;  $\lambda$  — коэффициент поглощения;  $p(\cos\theta)$  — индикатриса рассеяния;  $\rho(\mathbf{r})$  — «плотность вещества», равная 1 внутри  $S$  и 0 вне  $S$ .

Произведем бесконечно малый сдвиг среды на величину  $\varepsilon$  в направлении единичного вектора  $\mathbf{e}$ , оставляя точки источника и наблюдения неподвижными. При этом функция влияния  $G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0)$  перейдет в новую функцию  $G'(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0)$ , равную, очевидно, старой, но со сдвинутыми точками источника и наблюдения:

$$G'(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) = G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r} - \varepsilon\mathbf{e}; \boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_0 - \varepsilon\mathbf{e}).$$

\*) Доклады АН СССР. 1957. Т. 112. № 5. С. 831–834.

Таким образом, вариация

$$\delta G = G' - G = -\varepsilon \mathbf{e}(\nabla + \nabla_0)G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0). \quad (2)$$

С другой стороны, такой сдвиг эквивалентен некоторой вариации плотности, когда вещество отбирается с одной стороны и добавляется к другой (в свою очередь, это равносильно изменению граничных условий). Варьируя (1), получаем

$$\begin{aligned} & \{(\boldsymbol{\omega}\nabla) + \rho(\mathbf{r})\}\delta G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) - \rho(\mathbf{r}) \cdot \lambda \int p(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}')\delta G(\boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) d\boldsymbol{\omega}' = \\ & = -\delta\rho(\mathbf{r})\{G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) - \lambda \int p(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}')G(\boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) d\boldsymbol{\omega}'\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Как видим, вариация  $\delta G$  удовлетворяет уравнению переноса и поэтому может быть представлена через функцию влияния:

$$\begin{aligned} \delta G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) = & - \int G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}') \cdot \delta\rho(\mathbf{r}')\{G(\boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}'; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) - \\ & - \lambda \int p(\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\omega}'')G(\boldsymbol{\omega}'', \mathbf{r}'; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) d\boldsymbol{\omega}''\} d\boldsymbol{\omega}' d\mathbf{r}', \end{aligned}$$

где  $d\mathbf{r}'$  означает элемент объема. Подставляя сюда (2) и учитывая, что вариация плотности равна  $\delta\rho = -\varepsilon \mathbf{e}\nabla\rho$  и отлична от нуля только на поверхности  $S$ , где она обладает  $\delta$ -особенностью, получим

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \mathbf{e}(\nabla + \nabla_0)G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) = \\ & = -\varepsilon \mathbf{e} \oint_S G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}_s)G(\boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}_s; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) d\boldsymbol{\omega}' d\mathbf{S} + \\ & + \varepsilon \mathbf{e} \lambda \oint_S G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}_s)p(\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\omega}'')G(\boldsymbol{\omega}'', \mathbf{r}_s; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) d\boldsymbol{\omega}' d\boldsymbol{\omega}'' d\mathbf{S}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}_s$  — текущий радиус-вектор, по которому ведется интегрирование. Первый интеграл в правой части этого уравнения обращается в нуль в силу граничных условий, которым подчиняется функция влияния:

$$G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) = 0 \text{ при } \mathbf{r} \in S, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0 \text{ или при } \mathbf{r}_0 \in S, \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{n}_0 > 0,$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $S$  в точке  $\mathbf{r}$ , а  $\mathbf{n}_0$  — в точке  $\mathbf{r}_0$ . Учитывая, что вектор  $\mathbf{e}$  произволен, получаем окончательно

$$\begin{aligned} & (\nabla + \nabla_0)G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) = \\ & = -\lambda \oint_S G(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}_s)p(\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\omega}'')G(\boldsymbol{\omega}'', \mathbf{r}_s; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) d\boldsymbol{\omega}' d\boldsymbol{\omega}'' d\mathbf{S}. \quad (4) \end{aligned}$$

Произведем теперь бесконечно малый поворот пространства на угол  $\boldsymbol{\xi}$  около некоторой точки  $\mathbf{R}$ . При этом  $G$  перейдет в

$$G'(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}; \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0) = G(\boldsymbol{\omega} - [\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\omega}], \mathbf{r} - [\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r} - \mathbf{R})]; \boldsymbol{\omega}_0 - [\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\omega}_0], \mathbf{r}_0 - [\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R})]).$$

С другой стороны, изменение функции влияния можно учесть вариацией плотности  $\delta\rho = -[\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r} - \mathbf{R})] \cdot \nabla\rho(\mathbf{r})$ . Производя выкладки, аналогичные



приведенным выше, нетрудно получить

$$\left\{ [(\mathbf{r} - \mathbf{R})\nabla] + [\mathbf{r}_0 - \mathbf{R})\nabla_0] + \left[ \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \right] + \left[ \omega_0 \frac{\partial}{\partial \omega_0} \right] \right\} G(\omega, \mathbf{r}; \omega_0, \mathbf{r}_0) = \\ = -\lambda \oint_S \int G(\omega, \mathbf{r}; \omega', \mathbf{r}_s) p(\omega' \omega'') G(\omega'', \mathbf{r}_s; \omega_0, \mathbf{r}_0) d\omega' d\omega'' [(\mathbf{r}_s - \mathbf{R}) d\mathbf{S}]. \quad (5)$$

Шесть скалярных уравнений, соответствующие двум векторным (4), (5), представляют собой математическую формулировку принципа инвариантности. Для получения этих уравнений оказывается весьма существенной однородность оптических свойств: в противном случае вариация  $\delta\rho$  была бы отлична от нуля во всем объеме внутри  $S$ , и интегралы не привелись бы к поверхностным.

Применим полученные уравнения к задаче о диффузном отражении света от однородной среды. Решение этой задачи сводится к отысканию функции влияния  $G(\omega, \mathbf{r}; \omega_0, \mathbf{r}_0)$  при условии, что точки  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$  находятся на поверхности  $S$ . Обозначим через  $\nabla'$  градиент вдоль поверхности  $S$ , определенный формулой  $\nabla' = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla)$ , где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $S$  в точке  $\mathbf{r}$ . Учитывая тождество  $\nabla \equiv \nabla' - \frac{\mathbf{n}}{\omega\mathbf{n}} (\omega\nabla') + \frac{\mathbf{n}}{\omega\mathbf{n}} (\omega\nabla)$  и пользуясь уравнением (1) и сопряженным ему [3], нетрудно привести (4), (5) к виду

$$\left\{ \nabla' - \frac{\mathbf{n}}{\omega\mathbf{n}} (\omega\nabla') - \frac{\mathbf{n}}{\omega\mathbf{n}} + \nabla'_0 - \frac{\mathbf{n}_0}{\omega_0\mathbf{n}_0} (\omega_0\nabla'_0) + \frac{\mathbf{n}_0}{\omega_0\mathbf{n}_0} \right\} G(\omega, \mathbf{r}; \omega_0, \mathbf{r}_0) = \\ = -\frac{\mathbf{n}}{\omega\mathbf{n}} \lambda \int p(\omega\omega') G(\omega', \mathbf{r}; \omega_0, \mathbf{r}_0) d\omega' + \\ + \frac{\mathbf{n}_0}{\omega_0\mathbf{n}_0} \lambda \int G(\omega, \mathbf{r}; \omega', \mathbf{r}_0) p(\omega'\omega_0) d\omega' - \\ - \lambda \oint_S \int G(\omega, \mathbf{r}; \omega', \mathbf{r}_s) p(\omega'\omega'') G(\omega'', \mathbf{r}_s; \omega_0, \mathbf{r}_0) d\omega' d\omega'' d\mathbf{S}; \quad (6)$$

$$\left\{ [(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \left( \nabla' - \frac{\mathbf{n}}{\omega\mathbf{n}} (\omega\nabla') - \frac{\mathbf{n}}{\omega\mathbf{n}} \right)] + \right. \\ \left. + [(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}) \left( \nabla'_0 - \frac{\mathbf{n}_0}{\omega_0\mathbf{n}_0} (\omega_0\nabla'_0) + \frac{\mathbf{n}_0}{\omega_0\mathbf{n}_0} \right)] + \left[ \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \right] + \right. \\ \left. + \left[ \omega_0 \frac{\partial}{\partial \omega_0} \right] \right\} G(\omega, \mathbf{r}; \omega_0, \mathbf{r}_0) = -\frac{[(\mathbf{r} - \mathbf{R})\mathbf{n}]}{\omega\mathbf{n}} \lambda \int p(\omega\omega') G(\omega', \mathbf{r}; \omega_0, \mathbf{r}_0) d\omega' + \\ + \frac{[(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R})\mathbf{n}_0]}{\omega_0\mathbf{n}_0} \lambda \int G(\omega, \mathbf{r}; \omega', \mathbf{r}_0) p(\omega'\omega_0) d\omega' - \\ - \lambda \oint_S \int G(\omega, \mathbf{r}; \omega', \mathbf{r}_s) p(\omega'\omega'') G(\omega'', \mathbf{r}_s; \omega_0, \mathbf{r}_0) d\omega' d\omega'' [(\mathbf{r}_s - \mathbf{R}) d\mathbf{S}]. \quad (7)$$

Эта система уравнений не содержит зависимости от внутренних точек, так как  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$  лежат на поверхности и все производные берутся вдоль поверхности. Таким образом, в данной задаче, так же как и в одномерном случае, принцип инвариантности приводит к замкнутой системе уравнений.

Эти уравнения представляют собой, вообще говоря, лишь необходимые условия, которым должна подчиняться функция влияния для однородной среды. Вопрос о достаточности этих уравнений для решения задачи, иначе говоря, вопрос о единственности решения, требует дополнительных исследований.

При практическом применении полученных уравнений из  $G$  необходимо предварительно выделить  $\delta$ -особенность, обусловленную квантами света, не испытывавшими рассеяния. Мы не производим здесь выделения этой особенности, чтобы не усложнять формул.

2. Если рассеяние изотропно, т. е.  $p(\cos \theta) = \frac{1}{4\pi}$ , то из (4)–(7) можно получить более простые уравнения. Проинтегрируем, например, уравнения (4), (5) по  $\omega_0$  и выразим  $\nabla$  опять через градиент вдоль поверхности. Вводя функцию влияния  $G_0$  с изотропным источником  $G_0(\omega, \mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int G(\omega, \mathbf{r}; \omega_0, \mathbf{r}_0) d\omega_0$ , мы получим для нее следующие уравнения:

$$\left\{ \nabla' - \frac{\mathbf{n}}{\omega \mathbf{n}} (\omega \nabla') - \frac{\mathbf{n}}{\omega \mathbf{n}} + \nabla_0 \right\} G_0(\omega, \mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \\ = -\frac{\mathbf{n}}{\omega \mathbf{n}} \frac{\lambda}{4\pi} \int G_0(\omega', \mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\omega' - \lambda \oint_S G_0(\omega, \mathbf{r}; \mathbf{r}_s) \int G_0(\omega', \mathbf{r}_s; \mathbf{r}_0) d\omega' d\mathbf{S}; \quad (8)$$

$$\left\{ [(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \left( \nabla' - \frac{\mathbf{n}}{\omega \mathbf{n}} (\omega \nabla') - \frac{\mathbf{n}}{(\omega \mathbf{n})} \right)] + [(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}) \nabla_0] + \left[ \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \right] \right\} \times \\ \times G_0(\omega, \mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\frac{[(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \mathbf{n}]}{\omega \mathbf{n}} \frac{\lambda}{4\pi} \int G_0(\omega', \mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\omega' - \\ - \lambda \oint_S G_0(\omega', \mathbf{r}; \mathbf{r}_s) \int G_0(\omega', \mathbf{r}_s; \mathbf{r}_0) d\omega' [(\mathbf{r}_s - \mathbf{R}) d\mathbf{S}]. \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что в плоском одномерном случае уравнение (8) совпадает с уравнением (23) работы [4] для вероятности  $p(\mu, x)$  выхода среды под углом  $\arccos \mu$  кванта, поглощенного на глубине  $x$ , причем так определенная вероятность отличается от  $G_0$  лишь постоянным множителем. Поэтому уравнения (8), (9) можно рассматривать как обобщение метода В.В. Соболева на среду произвольной формы. Как видим, эти уравнения являются простым следствием принципа инвариантности.

Если проинтегрировать (4), (5) по  $\omega$  и  $\omega_0$ , то можно получить еще более простые уравнения:

$$(\nabla + \nabla_0) I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\lambda \oint_S I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) I(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_0) d\mathbf{S}, \quad (10)$$

$$\{[(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla] + [(\mathbf{r}'_0 - \mathbf{R}) \nabla_0]\} I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\lambda \oint_S I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) I(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_0) [(\mathbf{r}_s - \mathbf{R}) d\mathbf{S}], \quad (11)$$

где  $I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  определяется формулой  $I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int G(\omega, \mathbf{r}; \omega_0, \mathbf{r}_0) d\omega d\omega_0$  и представляет собой плотность излучения в точке  $\mathbf{r}$ , обусловленную наличием точечного изотропного источника в точке  $\mathbf{r}_0$ .

Уравнения (10), (11) также представляют собой лишь необходимые условия, которым должна подчиняться функция  $I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ , поэтому нельзя рассчитывать на то, что они позволят получить полное решение. Тем не менее, в некоторых случаях они могут оказаться полезными.

Например, в задаче о плоском изотропном источнике в полубесконечной среде уравнение (10) с учетом условия симметрии  $I(x, x_0) = I(x_0, x)$  может быть преобразовано к виду

$$I(x, x_0) = I_0(|x - x_0|) + \frac{\lambda}{2} \int_{|x-x_0|}^x I(x', 0)I(x' - x + x_0, 0) dx' + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_{|x-x_0|}^{x_0} I(x', 0)I(x' - x_0 + x, 0) dx', \quad (12)$$

где  $I(x, x_0)$  означает плотность излучения от плоского источника, расстояния  $x, x_0$  отсчитываются от границы среды, а  $I_0$  — произвольная функция. Но из вида (12) следует, что  $I_0$  представляет собой решение для плоского источника в бесконечной среде. Если считать  $I_0$  известным [5, 6], то (12) позволяет определить  $I(x, x_0)$ .

Выражаю признательность проф. Д.И. Блохинцеву за обсуждение работы.

### Список литературы

1. Амбарцумян В.А. и др. Теоретическая астрофизика. — М.: Гостехиздат, 1952.
2. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. — М.: ИЛ, 1953.
3. Кадомцев Б.Б. // ДАН (в печати).
4. Соколов В.В. // Астр. ж. 1951. Т. 28. С. 355.
5. Bothe W. // Zs. Phys. 1944. V. 122. P. 648.
6. Marshak R., Brooks H., Hurwitz H. // Nucleonics. 1949. V. 4. P. 10.

## О ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ \*)

1. Пусть  $I(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t)$  — интенсивность пучка излучения частоты  $\nu$  с направлением  $\boldsymbol{\omega}$  в точке  $\mathbf{r}$ . Она удовлетворяет уравнению переноса

$$\left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{\omega} \nabla) + \alpha(\nu, \mathbf{r}) + \sigma(\nu, \mathbf{r}) \right\} I(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) - \\ - \int_{\nu', \boldsymbol{\omega}'} p(\nu, \nu'; \cos \theta; \mathbf{r}) \sigma(\nu', \mathbf{r}) I(\nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}, t) = j(\nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где  $c$  — скорость света;  $\alpha(\nu, \mathbf{r})$  — коэффициент истинного поглощения;  $\sigma(\nu, \mathbf{r})$  — коэффициент рассеяния;  $p(\nu, \nu'; \cos \theta; \mathbf{r})$  — вероятность рассеяния пучка света частоты  $\nu'$  на угол  $\theta$  с изменением частоты на  $\nu$ ;  $j(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t)$  — источник. Если все эти величины заданы и не зависят от интенсивности излучения, то уравнение (1) линейно. Поэтому если ввести функцию влияния  $G(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t; \nu_0, \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0, t_0)$ , т. е. решение уравнения переноса с точечным источником

$$\left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{\omega} \nabla) + \alpha(\nu, \mathbf{r}) + \sigma(\nu, \mathbf{r}) \right\} G(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t; \nu_0, \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0, t_0) - \\ - \int p(\nu, \nu'; \cos \theta; \mathbf{r}) \sigma(\nu', \mathbf{r}) G(\nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}, t; \nu_0, \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0, t_0) d\nu' d\boldsymbol{\omega}' = \\ = \delta(\nu - \nu_0) \delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0), \quad (2)$$

то любое решение уравнения (1) можно будет записать в виде

$$I(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) = \int G(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t; \nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t') j(\nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t') d\nu' d\boldsymbol{\omega}' d\mathbf{r}' dt'. \quad (3)$$

Уравнения (1), (2) должны быть дополнены краевыми условиями. В качестве начального условия естественно принять

$$I(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{при} \quad t = -\infty. \quad (4)$$

Что касается граничного условия, то мы предположим, что рассматриваемая нами среда может быть окружена такой выпуклой поверхностью  $S$ , чтобы она охватила все источники излучения. Тогда на границе  $S$  будет удовлетворяться условие

$$I(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S, \quad \mathbf{n}\boldsymbol{\omega} < 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $S$  в точке  $\mathbf{r}$ .

---

\*) Доклады АН СССР. 1957. Т. 113. № 3. С. 541–543.

Наряду с уравнением (1) введем в рассмотрение сопряженное уравнение для некоторой функции  $I^*(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t)$ :

$$\left\{ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega} \nabla) + \alpha(\nu, \mathbf{r}) + \sigma(\nu, \mathbf{r}) \right\} I^*(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) - \int I^*(\nu', \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) \sigma(\nu, \mathbf{r}) p(\nu', \nu; \cos \theta; \mathbf{r}) d\nu' d\boldsymbol{\omega}' = i(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t), \quad (6)$$

причем будем считать, что  $I^*$  удовлетворяет сопряженным с (4), (5) крайевым условиям:

$$\begin{aligned} I^*(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) &= 0 \quad \text{при} \quad t = +\infty, \\ I^*(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) &= 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in S, \quad \mathbf{n}\boldsymbol{\omega} > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем уравнение (1) в виде  $LI = j$ , где  $L$  — интегродифференциальный оператор, действие которого определено формулой (1). Уравнение (6) имеет вид  $L^*I^* = i$ , где  $L^*$  — оператор, сопряженный с  $L$ . Сопряженный оператор и сопряженные граничные условия однозначно определяются требованием

$$\int (I^*LI - IL^*I^*) d\nu d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{r} dt \equiv 0, \quad (8)$$

где интегрирование производится по всем углам, частотам, времени и объему, ограниченному поверхностью  $S$ .

Подставим в (8)  $I(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) = G(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t; \nu_0, \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0, t_0)$  и  $I^*(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) = G^*(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t; \nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t')$ , где  $G^*$  — функция влияния для уравнения (6). Учитывая правило интегрирования  $\delta$ -функций, получим

$$G(\nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t'; \nu_0, \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0, t_0) = G^*(\nu_0, \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0, t_0; \nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t'). \quad (9)$$

Это соотношение показывает, что имеет место следующая теорема взаимности: функция влияния удовлетворяет сопряженному уравнению по точке источника с сопряженными крайевыми условиями.

Отсюда становится понятным смысл сопряженного условия (7): оно означает, что если на поверхности  $S$  находится источник, посылающий излучение во внешнее пространство, то внутри  $S$  излучение отсутствует. Кроме того, теорема взаимности позволяет раскрыть физический смысл самого сопряженного уравнения.

В самом деле, любое решение уравнения (6) мы можем, согласно (9), записать в виде

$$I^*(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) = \int i(\nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t') G(\nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t'; \nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) d\nu' d\boldsymbol{\omega}' d\mathbf{r}' dt', \quad (10)$$

откуда видно, что  $I^*$  — линейный функционал от интенсивности излучения, рассматриваемый как функция координат точечного источника.

Это обстоятельство означает, что сопряженное уравнение может успешно применяться в таких задачах, где требуется определить какие-либо характеристики излучения в зависимости от параметров точечного источника. (Отметим, что сопряженные уравнения подобного вида широко используются в нейтронной физике, имеющей дело со сходными физическими процессами [1, 2].)

2. Предположим, что  $\sigma$  не зависит от частоты и вероятность рассеяния удовлетворяет условию симметрии  $p(\nu, \nu'; \cos \theta) = p(\nu', \nu; \cos \theta)$ . Тогда, если в сопряженном уравнении для  $G$

$$\left\{ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega} \nabla) + \alpha(\nu, \mathbf{r}) + \sigma(\nu, \mathbf{r}) \right\} G(\nu_0, \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0, t_0; \nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) - \\ - \int G(\nu_0, \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0, t_0; \nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}, t) p(\nu', \nu; \cos \theta) \sigma(\nu, \mathbf{r}) d\nu' d\boldsymbol{\omega}' = \\ = \delta(\nu - \nu_0) \delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0) \quad (11)$$

изменить знаки у  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\omega}_0$  и обменять местами  $t$  и  $t_0$ , то оно совпадет с прямым уравнением. При этом сопряженные краевые условия перейдут в (4), (5). Другими словами, в этом случае имеет место оптическая обратимость:

$$G(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t; \nu_0, \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0, t_0) = G(\nu_0, -\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}_0, t; \nu, -\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t_0). \quad (12)$$

Это утверждение справедливо и для поляризованного света, так как угловая матрица рассеяния симметрична [3]. Таким образом, оптическая обратимость является частным случаем общего соотношения взаимности.

3. Существуют задачи, в которых требуется определить интенсивность излучения лишь в некоторой части среды, ограниченной, допустим, поверхностью  $S_1$ . Для такого рода задач желательно найти граничные условия на  $S_1$ . Будем считать, что источник для  $I$  отличен от нуля только внутри  $S_1$ .

Введем вспомогательную функцию влияния  $\Gamma(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t; \nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t')$  для области, заключенной между внешней поверхностью  $S$  и внутренней поверхностью  $S_1$  при дополнительном условии, что находящаяся внутри  $S_1$  среда заменена на черное тело. Функция  $\Gamma$  удовлетворяет условиям (5), (7) на  $S$  и условиям

$$\Gamma(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t; \nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t') = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} \mathbf{r} \in S_1, & \mathbf{n}_1 \boldsymbol{\omega} > 0, \\ \mathbf{r}' \in S, & \mathbf{n}'_1 \boldsymbol{\omega}' < 0, \end{cases}$$

где  $\mathbf{n}_1$  — внешняя нормаль к  $S_1$  в точке  $\mathbf{r}$ , а  $\mathbf{n}'_1$  — в точке  $\mathbf{r}'$ .

Воспользуемся соотношением (8) для области между  $S_1$  и  $S$ . Подставляя  $I^*(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) = \Gamma(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t; \nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t')$ , получим

$$I(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r} \in S_1, \boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_1 < 0} = \\ = \oint_{S_1} \int_{\boldsymbol{\omega}' \mathbf{n}'_1 > 0} (\mathbf{n}'_1 \boldsymbol{\omega}') \Gamma(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t; \nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}' t') I(\nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t') dS_1 d\nu' d\boldsymbol{\omega}' dt', \quad (13)$$

где  $\mathbf{n}'_1$  — внешняя нормаль в точке  $\mathbf{r}'$ , по которой проводится интегрирование. Это и есть искомое граничное условие. Оно позволяет по выходящему излучению определить входящее и поэтому вполне достаточно для полного решения уравнения переноса внутри  $S_1$ .

Таким же способом получаем сопряженное граничное условие на  $S_1$ :

$$I^*(\nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r} \in S_1, \boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_1 > 0} = \\ = - \oint_{S_1} \int_{\boldsymbol{\omega}' \mathbf{n}'_1 < 0} (\mathbf{n}'_1 \boldsymbol{\omega}') \Gamma(\nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t'; \nu, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, t) I^*(\nu', \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}', t') dS_1 d\nu' d\boldsymbol{\omega}' dt'. \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует, что соотношение (8) справедливо и для области, ограниченной поверхностью  $S_1$ .

Выражаю глубокую благодарность проф. Д.И. Блохинцеву за обсуждение работы и ряд указаний.

*Примечание при корректуре.* После того как настоящая статья была послана в печать, появилась работа [4], в которой авторы получили соотношение взаимности (9), исходя из теории цепей Маркова.

#### *Список литературы*

1. *Weinberg A.* // Amer. J. Phys. 1952. V. 20. P. 401.
2. *Усачев Л.Н.* // В сб.: «Реакторостроение и теория реакторов». Женевская конференция по мирному применению атомной энергии. 1955. С. 251.
3. *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии. — М.: ИЛ, 1953.
4. *Биберман А.М., Вексленко Б.А.* // ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 341.

## О ФЛУКТУАЦИЯХ В ГАЗЕ\*)

Состояние газа полностью описывается функцией распределения частиц в фазовом пространстве  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , поэтому задача о флуктуациях в газе сводится к изучению корреляционных свойств функции распределения. Обычно под  $f$  подразумевают статистически среднюю плотность частиц в фазовом пространстве, которая, конечно, не может испытывать флуктуаций. Говоря о флуктуациях функции распределения, мы должны фактически иметь в виду «истинную» плотность

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i),$$

где суммирование производится по всем частицам. Плотность  $F$  мы будем считать случайной величиной, которая лишь в среднем совпадает с  $f$ .

Функция  $F$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) F = \frac{1}{m} \frac{\partial F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} \int \frac{\partial U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial \mathbf{r}} F(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}', \quad (1)$$

где  $m$  — масса молекулы,  $U$  — потенциальная энергия взаимодействия молекул между собой. В идеальном газе можно пренебречь взаимодействием частиц, и тогда из (1) получаем  $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F(\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t_0), \mathbf{v}, t_0)$ , откуда

$$\langle \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \varphi(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0) \rangle = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t_0) - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0), \quad (2)$$

где  $\varphi = F - f$ , а угловыми скобками обозначено усреднение.

Наша задача состоит в том, чтобы найти корреляцию (2) с учетом столкновений. Если газ не очень плотный, то можно ограничиться учетом только парных соударений, и тогда правую часть в (1) можно приближенно представить в виде члена столкновений  $S(F, F)$ :

$$S(F, F) = \int \{F(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) F(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}'_1, t) - F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) F(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t)\} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \times \\ \times \rho d\rho d\chi d\mathbf{v}_1, \quad (3)$$

где  $\rho$  — прицельный параметр удара,  $\rho d\rho d\chi$  — элемент площадки, перпендикулярной относительной скорости  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$  и проходящей через точку  $\mathbf{r}$ ;  $\mathbf{r}_1$  — координата этого элемента;  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{v}'_1$  — такие скорости частиц перед соударением, которые после столкновения переходят в  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_1$ . При этом приближенно полагается, что соударение происходит в тот момент, когда обе частицы пересекают площадку, перпендикулярную их относительной скорости.

Если усреднить (1) с членом столкновений в виде (3), то, пренебрегая корреляцией частиц перед соударением и разницей между  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$ , получим

\*) ЖЭТФ. 1957. Т. 32. Вып. 4. С. 943–944.



обычное уравнение Больцмана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f = \\ = \int \{f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t)f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t)\} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \rho d\rho d\chi d\mathbf{v}_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая (4), преобразуем (1) к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\varphi + \mathbf{A}\varphi = q, \quad (5)$$

где  $\mathbf{A}$  — оператор, определяемый выражением  $\mathbf{A}\varphi = -S(f, \varphi) - S(\varphi, f)$ , а  $q = S(\varphi, \varphi)$ . Так как функцию распределения имеет смысл использовать только тогда, когда речь идет о достаточно больших объемах, содержащих много частиц, то функцию  $\varphi$  мы должны считать малой величиной. Поэтому в  $q$ , т. е. величине второго порядка малости по  $\varphi$ , можно приближенно воспользоваться корреляцией (2), откуда получаем

$$\langle q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)q(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0) \rangle = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)\delta(t - t_0), \quad (6)$$

где  $\mathbf{A}^*$  оператор, действующий на скорость  $\mathbf{v}_0$ .

Обозначим через  $\mathbf{G}$  функцию Грина для уравнения (5), т. е. оператор, действием которого на источник можно получить решение этого уравнения. Тогда из (5), (6) получаем

$$\langle \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\varphi(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0) \rangle = \mathbf{G}\mathbf{G}^*(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)\delta(t - t_0), \quad (7)$$

где  $\mathbf{G}^*$  — оператор, действующий на  $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0$ .

Формула (7) и дает решение поставленной нами задачи. Если положить приближенно  $\mathbf{A} = 1/\tau$ , где  $\tau$  — среднее время между соударениями, и считать, что  $f$  не зависит от  $\mathbf{r}$  и  $t$ , то (7) приобретает вид

$$\langle \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\varphi(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0) \rangle = e^{-|t-t_0|/\tau} f(\mathbf{v})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}(t - t_0))\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0). \quad (8)$$

Однако при более точном рассмотрении задачи, а также в нестационарном случае придется решать уравнение (5), т. е. линеаризованное кинетическое уравнение со случайным источником.

Физический смысл этого уравнения очевиден. Действительно, каждый акт соударения приводит к тому, что из первоначальной плотности удаляются две частицы и вместо них появляются в той же точке пространства две частицы с другими скоростями. Уравнение (5) и описывает дальнейшее развитие такого случайного возмущения функции распределения.

Уравнение (5) по форме вполне аналогично используемым в теории электрических флуктуаций уравнениям Максвелла со случайными источниками [1]. Это не удивительно, так как в случае термодинамического равновесия уравнения такого рода могут быть получены, исходя из общей теории флуктуаций [2, 3]. Рассмотренный здесь кинетический вывод формул (5), (6) обладает кроме большей наглядности еще и тем преимуществом, что он справедлив и в нестационарном случае.

Следует отметить, что согласно (7) частицы оказываются слабо коррелированными перед соударением. Корреляция возникает от таких цепочек столкновений, когда две столкнувшиеся частицы сталкиваются с двумя

другими, а эти последние соударяются между собой. Так как в этой цепочке участвуют четыре частицы, а мы пренебрегли уже тройными столкновениями, то вытекающей из (7) корреляцией частиц перед соударением можно пренебречь.

За обсуждение работы выражаю глубокую благодарность акад. М.А. Леонтовичу.

### *Список литературы*

1. *Рытов С.М.* Теория электрических флуктуаций. — М.: Изд-во АН СССР, 1953.
2. *Callen H.B., Barasch M.L., Jackson J.L.* // Phys. Rev. 1952. V. 88. P. 1382.
3. *Рытов С.М.* // ДАН СССР. 1956. Т. 110. С. 371.

## О ДЕЙСТВУЮЩЕМ ПОЛЕ В ПЛАЗМЕ \*)

При помощи уравнений Боголюбова для «частичных функций распределения» вычисляется эффективное поле, действующее на заряженные частицы в плазме. Показано, что действующее поле отличается от среднего на малую величину порядка  $1/N$ , где  $N$  — число частиц внутри сферы с радиусом, равным дебаевскому. Этот результат справедлив и при наличии магнитного поля.

Как известно, электрическое поле, действующее на отдельную частицу среды, не равно среднему полю в этой среде. Например, в газе свободных диполей эффективное поле  $\mathbf{E}_{\text{эф}}$  дается формулой Лоренца  $\mathbf{E}_{\text{эф}} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}/3$ , где  $\mathbf{E}$  — среднее поле,  $\mathbf{P}$  — поляризация среды. Эта формула получается в предположении о взаимной непроницаемости молекул-диполей, вследствие чего каждый диполь оказывается как бы помещенным в полость внутри поляризованной среды.

В случае ионизованной плазмы для такого предположения, разумеется, нет никаких оснований. Однако и в плазме действующее поле, вообще говоря, должно отличаться от среднего из-за наличия некоторой корреляции в движении отдельных частиц. Вопрос о соотношении между  $\mathbf{E}_{\text{эф}}$  и  $\mathbf{E}$  в плазме неоднократно обсуждался различными авторами (см. [1] и цитированную там литературу), причем было показано, что действующее поле совпадает со средним. Наиболее детальное доказательство этого утверждения было произведено Гинзбургом [1]. Однако он использовал метод, не позволивший ему найти явные выражения для действующих полей. Вследствие этого, в частности, остался невыясненным вопрос, сохраняется ли равенство действующего и среднего полей при наличии внешнего магнитного поля.

В настоящей работе для вычисления эффективного поля в плазме используется метод Боголюбова [2]. При этом производится приближенное представление тройной функции через бинарные, что соответствует разложению по малой величине  $1/(nD^3)$ , где  $n$  — плотность частиц,  $D$  — дебаевский радиус. Тем самым аналогичное разложение переносится и на связь действующего поля со средним, причем мы ограничиваемся вычислением поправки лишь первого порядка малости.

Для простоты предположим, что наряду с электронами плазма содержит только однократно ионизованные ионы одного сорта. Введем в рассмотрение «микроскопическую плотность» частиц в фазовом пространстве

$$F_e = \sum_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t))\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k(t))$$

для электронов и

$$F_i = \sum_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t))\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k(t))$$

---

\*) ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 1 (7). С. 151–157.

для ионов, где суммирование производится соответственно по всем электронам и ионам. Нетрудно проверить, что в отсутствие магнитного поля эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial F_e}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)F_e - \frac{e}{m} \mathbf{E}_m \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)F_i + \frac{e}{M} \mathbf{E}_m \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2)$$

эквивалентным системе уравнений Ньютона для всех электронов и ионов. В (1), (2)  $m$  — масса электрона,  $M$  — масса иона,  $\mathbf{E}_m$  — микроскопическое поле, которое может быть найдено из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_m = 4\pi e \int (F_i - F_e) d\mathbf{v}, \quad (3)$$

но при этом в (1), (2) необходимо выбросить собственное поле электрона или иона, находящегося в данной точке пространства.

Уравнения (1), (2) можно написать также в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_e}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)F_e - \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} - \\ & - \frac{e^2}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} F_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \{F_i(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) - F_e(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)\} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_i}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)F_i + \frac{e}{M} \mathbf{E}_0 \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} + \\ & + \frac{e^2}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} F_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \{F_i(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) - F_e(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)\} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

причем в соответствии со сделанной выше оговоркой при интегрировании по  $\mathbf{r}'$  нужно исключить точку  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ . В уравнениях (4), (5)  $\mathbf{E}_0$  представляет собой внешнее поле; оно удовлетворяет уравнению  $\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0$ .

От точных микроскопических уравнений (1)–(5) мы перейдем к статистическому рассмотрению, для чего произведем усреднение всех величин по некоторой совокупности начальных распределений частиц. Это означает, что точные плотности  $F_e$  и  $F_i$  мы рассматриваем как случайные величины. Среднее значение от  $F_e$  и  $F_i$  обозначим через  $f_e$  и  $f_i$ . Усреднение уравнения (3) дает

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e \int \{f_i - f_e\} d\mathbf{v}, \quad (6)$$

где через  $\mathbf{E}$  обозначено среднее, т. е. макроскопическое поле. При усреднении (4) получается уравнение, содержащее бинарную функцию распределения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_e}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f_e - \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} - \\ & - \frac{e^2}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \{f_{ei}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) - f_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t)\} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$f_{ei}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) = \langle F_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) F_i(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \rangle,$$

где скобками обозначено усреднение, есть бинарная функция распределения для электронов и ионов. Что касается среднего значения от  $F_e F_e'$ , то, строго говоря, оно равно

$$\begin{aligned} \langle F_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) F_e(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \rangle &= \left\langle \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_j) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \sum_{j \neq k} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_k) \right\rangle = \\ &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + f_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t), \end{aligned}$$

где бинарная функция  $f_{ee}$  есть «неособенная» часть среднего значения от  $F_e F_e'$ . Однако в силу того, что при интегрировании по  $\mathbf{r}'$  мы выбросили точку  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ , член с  $\delta$ -функциями оказывается в данном случае несущественным.

Будем считать, что электростатическая энергия взаимодействия частиц много меньше их кинетической энергии, т. е.  $e^2 n^{1/3} \ll kT$ , что эквивалентно условию  $nD^3 \gg 1$ . Это условие почти всегда выполняется. Очевидно, что при этом условии корреляция между частицами очень мала, так что можно написать  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) + \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t)$ , где  $\varphi$  — малая величина. В соответствии с этим уравнение (7) и аналогичное ему уравнение для  $f_i$  приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f_e - \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e^2}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \{ \varphi_{ei}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) - \\ - \varphi_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) \} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f_i - \frac{e}{M} \mathbf{E} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e^2}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \{ \varphi_{ii}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) - \\ - \varphi_{ie}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) \} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Наша задача заключается в отыскании функций  $\varphi_{\alpha\beta}$ . Для этой цели составим уравнения для бинарных функций распределения. Здесь мы подробно рассмотрим только уравнение для  $f_{ei}$  — рассмотрение остальных вполне аналогично.

Умножим уравнение (4) на  $F_i(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$ , заменим в (5)  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$  на  $\mathbf{r}', \mathbf{v}'$  и, умножив его на  $F_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , сложим затем результаты и усредним. Учтывая, что

$$\begin{aligned} \langle F_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) F_e(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) F_i(\mathbf{r}'', \mathbf{v}'', t) \rangle = \\ = f_{eei}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''; t) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') f_{ei}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''; t) \end{aligned}$$

и т. д., получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{ei}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t)}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f_{ei} + (\mathbf{v}'\nabla')f_{ei} - \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 \frac{\partial f_{ei}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{M}\mathbf{E}'_0 \frac{\partial f_{ei}}{\partial \mathbf{v}'} - \\ & - \frac{e^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{m|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \frac{\partial f_{ei}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{M|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \frac{\partial f_{ei}}{\partial \mathbf{v}'} - \frac{e^2}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3} \times \\ & \times \{f_{eii}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''); t\} - f_{eie}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''); t\} d\mathbf{r}'' d\mathbf{v}'' + \\ & + \frac{e^2}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \int \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3} \{f_{eii}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''); t\} - \\ & - f_{eie}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''); t\} d\mathbf{r}'' d\mathbf{v}'' = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

В соответствии с принятым выше предположением о малости корреляции положим

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''); t) &= f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)f(\mathbf{r}'', \mathbf{v}'', t) + \\ & + f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\varphi(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''); t) + f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''); t) + \\ & + f(\mathbf{r}'', \mathbf{v}'', t)\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) + \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''); t) \end{aligned}$$

и пренебрежем последним слагаемым в правой части. Тогда из (10) с учетом (8), (9) получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_{ei}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t)}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\varphi_{ei} + (\mathbf{v}'\nabla')\varphi_{ei} - \frac{e^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{m|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} f'_i - \\ & - \frac{e^2(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{M|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} f_e \frac{\partial f'_i}{\partial \mathbf{v}'} - \frac{e}{m}\mathbf{E} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{M}\mathbf{E}' \frac{\partial \varphi_{ei}}{\partial \mathbf{v}'} = \frac{e^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{M|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \frac{\partial \varphi_{ei}}{\partial \mathbf{v}} + \\ & + \frac{e^2(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{M|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \frac{\partial \varphi_{ei}}{\partial \mathbf{v}'} + \frac{e^2}{m} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3} \{\varphi_{ii}(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''); t\} - \\ & - \varphi_{ie}(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''); t\} d\mathbf{r}'' d\mathbf{v}'' + \frac{e^2}{M} \frac{\partial f'_i}{\partial \mathbf{v}'} \int \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3} \{\varphi_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''); t\} - \\ & - \varphi_{ei}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}'', \mathbf{v}''); t\} d\mathbf{r}'' d\mathbf{v}'' . \quad (11) \end{aligned}$$

Величины, стоящие в правой части этого уравнения, являются малыми, однако их нельзя просто отбросить, так как они оказываются существенными при больших и малых  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . В отличие от принятого в [2] метода разложений по малому параметру, мы будем решать (11) следующим образом. Решим сначала стационарное уравнение. Полагаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = 0, \quad f_e &= n \left( \frac{m}{2\pi kT_e} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT_e} \right), \quad f_i = n \left( \frac{M}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{Mv^2}{2kT_i} \right), \\ \varphi_{ee} &= f_e f'_e \chi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \end{aligned}$$

и т. д., где  $n$  — плотность электронов (и ионов),  $T_e$  — температура электронов,  $T_i$  — температура ионов. Подставим это в (11) и, в соответствии с принятым нами предположением, что  $T_e \neq T_i$ , пренебрежем скоростью

ионов по сравнению со скоростью электронов. В силу произвольности  $\mathbf{v}$  получаем

$$\nabla \chi_{ei}(r) + \frac{e^2 \mathbf{r}}{kT_e r^3} = -\frac{e^2 \mathbf{r}}{kT_e r^3} \chi_{ei}(r) - \frac{ne^2}{kT_e} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \{\chi_{ii}(r') - \chi_{ei}(r')\} d\mathbf{r}'. \quad (12)$$

При  $r > e^2/kT$  первым членом в правой части можно пренебречь, откуда, учитывая, что  $\chi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , получаем

$$\chi_{ei}(r) - \frac{ne^2}{kT_e} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \{\chi_{ii}(r') - \chi_{ei}(r')\} d\mathbf{r}' = \frac{e^2}{rkT_e}. \quad (13)$$

Аналогичным образом могут быть получены уравнения для  $\chi_{ee}$  и  $\chi_{ii}$

$$\chi_{ee}(r) - \frac{ne^2}{kT_e} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \{\chi_{ei}(r') - \chi_{ee}(r')\} d\mathbf{r}' = -\frac{e^2}{rkT_e}, \quad (14)$$

$$\chi_{ii}(r) - \frac{ne^2}{kT_i} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \{\chi_{ei}(r') - \chi_{ii}(r')\} d\mathbf{r}' = -\frac{1}{r} \frac{e^2}{kT_i}. \quad (15)$$

Решение системы уравнений (13)–(15) есть

$$\chi_{ei}(r) = -\chi_{ee}(r) = \frac{e^2}{kT_e} \frac{e^{-r/D}}{r}, \quad \chi_{ii} = -\frac{e^2}{kT_i} \frac{e^{-r/D}}{r}, \quad (16)$$

где  $D$  — дебаевский радиус:

$$D = \left\{ \frac{kT_e T_i}{4\pi e^2 n(T_e + T_i)} \right\}^{1/2}.$$

На расстояниях, меньших  $e^2/(kT)$ , уравнение (12) не имеет разумного решения. Это объясняется тем, что статистически более выгодным оказывается падение частиц разного знака друг на друга, т. е. образование связанных состояний. Поэтому, строго говоря, для исследования этой области необходимо квантовомеханическое рассмотрение. Однако можно обойтись и классической механикой, если вообще исключить эллиптические орбиты, образование которых мало вероятно, так как оно требует тройных соударений. При этом необходимо было бы решить уравнение (11), не предполагая максвелловского распределения по скоростям. Такое решение не представляет трудностей, но требует очень громоздких вычислений. Так как область малых  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  занимает малую долю корреляционной области и поэтому дает незначительный вклад в окончательный результат, то откажемся от этой задачи. А именно, мы просто выбросим первые два слагаемые из правой части уравнения (11), что эквивалентно пренебрежению искривлением траекторий частиц при соударениях. В соответствии с этим будем в дальнейшем исключать соударения с параметрами удара, меньшими  $\rho_0 = e^2/(kT)$ .

Будем считать, что функции  $f_e$  и  $f_i$  не сильно отличаются от максвелловских. Тогда в правую часть уравнения (11), являющуюся малой по  $1/(nD^3)$ , можно подставить найденные выше решения  $\varphi_{\alpha\beta} = f_\alpha f'_\beta \chi_{\alpha\beta} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Ограничиваясь линейным приближением относительно поля, подставим стационарное решение также в последние два члена в левой

части уравнения (11). Отсюда, полагая для удобства  $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi'_{\alpha\beta} + \varphi''_{\alpha\beta}$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'_{ei}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\varphi'_{ei} + (\mathbf{v}'\nabla')\varphi'_{ei} = & -\frac{e\mathbf{v}}{kT_e} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\chi_{ei}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)f_i(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) + \\ & + \frac{e\mathbf{v}'}{kT_i} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)\chi_{ei}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)f_i(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi''_{ei}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\varphi''_{ei} + (\mathbf{v}'\nabla')\varphi''_{ei} = & \left\{ \frac{1}{m} \frac{\partial f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} f_i(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{M} f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \frac{\partial f_i(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)}{\partial \mathbf{v}'} \right\} \nabla U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $U(r) = -e^2 e^{-r/D}/r$ . Аналогичные уравнения могут быть получены для  $\varphi_{ee}$  и  $\varphi_{ii}$ .

Если подставить решения этих уравнений в (8), (9), то слагаемые вида  $\varphi''_{\alpha\beta}$  дадут член столкновений (см. Приложение), а  $\varphi'_{\alpha\beta}$  — поправку к среднему полю. Определим эффективные поля для электронов  $\mathbf{E}_{\text{эф}}^e$  и ионов  $\mathbf{E}_{\text{эф}}^i$  соотношением:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{эф}}^\alpha = \mathbf{E} + [f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)]^{-1} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \{ \varphi'_{\alpha i}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) - \\ - \varphi_{\alpha e}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) \} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'. \end{aligned}$$

Тогда кинетические уравнения можно будет записать таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f_e - \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{E}_{\text{эф}}^e f_e = \text{St}(f_e), \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f_i - \frac{e}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{E}_{\text{эф}}^i f_i = \text{St}(f_i), \end{aligned}$$

где через  $\text{St}$  обозначен член столкновений.

Чтобы найти явные выражения для действующих полей, нужно решить уравнение (17) и аналогичные уравнения для  $\varphi'_{ee}$  и  $\varphi'_{ii}$ . В уравнении (17) можно пренебречь членами, пропорциональными скорости ионов, и тогда его решение запишется в виде

$$\begin{aligned} \varphi'_{ei}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t) = \\ = -f_e(\mathbf{v})f_i(\mathbf{v}') \int_{-\infty}^t \frac{e\mathbf{v}}{kT_e} \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t'), t')\chi_{ei}(|\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t') - \mathbf{r}'|) dt', \end{aligned} \quad (19)$$

причем из-под интеграла мы вынесли функции  $f_e$ ,  $f_i$ , считая, что они не изменяются на длине  $\sim D$  и за время  $\sim 1/\omega_0$ , где  $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$  — частота плазменных колебаний.

Подставляя (19), а также аналогичные решения для  $\varphi'_{ee}$  и  $\varphi'_{ii}$  в (8), (9), нетрудно получить выражения для действующих полей. Ввиду того, что они довольно сложным образом зависят от скорости частицы, произведем усреднение по скорости. При этом слагаемые с  $\varphi'_{ee}$ ,  $\varphi'_{ii}$ , очевидно, выпадают. Положим  $\mathbf{E} \sim e^{i\omega t}$  и пренебрежем в (19) зависимостью  $\mathbf{E}$  от  $\mathbf{r}$ , считая,



что длина волны  $\lambda \gg D$ . Тогда с точностью до  $1/(nD^3)$  получим

$$\langle \mathbf{E}_{\text{эф}}^e \rangle_v = \langle \mathbf{E}_{\text{эф}}^i \rangle_v = \begin{cases} \mathbf{E} \left[ 1 - \frac{T_i^2}{12\pi n D^3 (T_i + T_e)^2} \right] & \text{при } \omega \ll \omega_0, \\ \mathbf{E} \left[ 1 - \frac{\omega_0 \sqrt{2}}{i\omega} \frac{T_i^{3/2}}{12\pi^{3/2} n D^3 (T_i + T_e)^2} \right] \approx \mathbf{E} & \text{при } \omega \gg \omega_0. \end{cases} \quad (20)$$

Как мы видим, в плазме действующее поле совпадает со средним при условии  $nD^3 \gg 1$ , которое обычно выполняется. Например, в ионосфере, где [1]  $n \sim 10^{16}$ ,  $T \sim 300^\circ$ ,  $E_{\text{эф}} - E \sim 10^{-5} E$ .

Разница между  $E_{\text{эф}}$  и  $E$  увеличивается при увеличении плотности и уменьшении температуры. Однако даже в электрической искре [4], где  $n \sim 10^{17}$ ,  $T \sim (4 \cdot 10^4)^\circ$ , разность  $E_{\text{эф}} - E \sim 10^{-3} E$ , т. е. остается все еще пренебрежимо малой.

Расчет эффективного поля нетрудно обобщить на случай, когда имеется постоянное магнитное поле  $\mathbf{H}$ . Для этого достаточно лишь добавить в (17) член с силой Лоренца  $-(e/c)[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ . При поле, настолько слабом, что  $\Omega = eH/(mc) \ll \omega_0$ , отсюда получается прежний результат, а в противоположном случае, когда  $\Omega \gg \omega_0$ ,

$$\langle \mathbf{E}_{\text{эф}}^e \rangle_v = \langle \mathbf{E}_{\text{эф}}^i \rangle_v = \begin{cases} \mathbf{E} - \frac{T_i^2}{4\pi n D^3 (T_i + T_e)^2} \frac{\mathbf{H}(\mathbf{H}\mathbf{E})}{H^2} & \text{при } \omega \ll \omega_0, \\ \approx \mathbf{E} & \text{при } \omega \gg \omega_0. \end{cases} \quad (21)$$

Как мы видим, частота  $\omega = \Omega$  ничем не выделена. Это вполне понятно, так как за время пролета электрона через корреляционную область, равное по порядку величины  $\sim 1/\omega_0$ , не успевают проявиться какие-либо резонансные эффекты.

Легко видеть, в чем заключается физическая причина отклонения действующего поля от среднего. В равновесном состоянии около каждого иона образуется корреляционное «облачко» электронов. При наложении электрического поля это «облачко» смещается относительно иона, вследствие чего появляется дополнительное поле, направленное противоположно среднему. В сильном магнитном поле подобная «поляризация» происходит только вдоль магнитного поля, чем и объясняется вид формулы (21).

## Приложение

Для полноты рассмотрим здесь вкратце, как получается член столкновений. Будем считать, что функции  $f_e$ ,  $f_i$  меняются настолько плавно, что на длине  $D$  они остаются постоянными. Тогда в (18) можно, во-первых, пренебречь производной по времени и, во-вторых, считать, что  $\varphi_{ei}'' = \varphi_{ei}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{v}, \mathbf{v}')$ . Вводя цилиндрическую систему координат с осью  $z$ , направленной по  $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ , и полагая  $\varphi_{ei}'' = 0$  при  $z = -\infty$ , получим из (18)

$$\varphi_{ei}''(\rho, \varphi, z; \mathbf{v}, \mathbf{v}') = \left\{ \frac{1}{m} \frac{\partial f_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} f_i(\mathbf{v}') - \frac{1}{M} f_e(\mathbf{v}) \frac{\partial f_i(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \right\} \nabla \int_{-\infty}^z \frac{U(\sqrt{\rho^2 + z'^2})}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} dz'$$

и аналогично для  $\varphi_{ii}''$  и  $\varphi_{ee}''$ .

Подставляя это в (7) и производя несложные выкладки, получаем член столкновений в форме Ландау [3]

$$\text{St}(f_\alpha) = \left(\frac{2\pi e^2}{m_\alpha}\right) \ln\left(\frac{D}{\rho_0}\right) \sum_\beta \sum_{k,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial v_k} \int \frac{u^2 \delta_{jk} - u_j u_k}{u^3} \left\{ \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{v})}{\partial v_j} f_\beta(\mathbf{v}') - \right. \\ \left. - \frac{1}{m_\beta} f_\alpha(\mathbf{v}) \frac{\partial f_\beta(\mathbf{v}')}{\partial v'_j} \right\} d\mathbf{v}'.$$

Здесь  $\alpha, \beta = e, i$ ,  $u_k = v_k - v'_k$  —  $k$ -ая компонента относительной скорости,  $\rho_0$  — минимальный параметр удара.

Отметим, что в таком выводе обрезание на верхнем параметре удара учитывается автоматически, а при более аккуратном решении уравнения (11) само собой получилось бы обрезание и на нижнем пределе.

За обсуждение работы выражаю глубокую благодарность акад. М.А. Леонтовичу.

#### Список литературы

1. Гинзбург В.Л. Теория распространения радиоволн в ионосфере. — М.: Гостехиздат, 1949.
2. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. — М.: Гостехиздат, 1946.
3. Ландау Л.Д. // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 203.
4. Мандельштам С.Л., Суходрев Н.К. // ЖЭТФ. 1953. Т. 24. С. 701.

## МАГНИТНЫЕ ЛОВУШКИ С «ГОФРИРОВАННЫМ» ПОЛЕМ \*)

В работе в дрейфовом приближении исследуется движение частиц в магнитных ловушках в отсутствие электрических полей и токов в плазме. Метод исследования заключается в усреднении уравнений движения по быстрому движению частиц вдоль силовых линий. Показано, что путем «гофрирования» магнитного поля можно добиться практической компенсации тороидального дрейфа частиц. В работе рассмотрено два конкретных варианта ловушек с «гофрированным» полем.

1. Одна из возможностей создания магнитной термоизоляции состоит в использовании различного рода магнитных ловушек, т. е. таких конфигураций магнитного поля, которые позволяют «запирать» частицы в ограниченном объеме. Представляет интерес произвести более подробное рассмотрение движения заряженных частиц в таких системах.

Ограничимся здесь случаем плавных магнитных полей, т. е. таких, которые мало меняются на длине ларморовского радиуса частиц. В этом случае можно воспользоваться усредненными уравнениями (см. [1, 2]), описывающими движение центра ларморовского кружка. С точностью до  $1/H$  они имеют вид [2]

$$\frac{du}{dt} = \frac{w^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{h} + \frac{e}{m} \mathbf{E} \mathbf{h}; \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{2} \operatorname{div} \mathbf{h}, \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{h}u + c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2} + \frac{mcw^2}{2eH^3} [\mathbf{H}\nabla H] + \frac{mcu^2}{eH} \{\operatorname{rot} \mathbf{h} - \mathbf{h}(\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h})\}. \quad (3)$$

Здесь  $u$  — компонента скорости частицы вдоль магнитного поля;  $w$  — поперечная компонента скорости;  $v^2 = u^2 + w^2$ ;  $\mathbf{h}$  — единичный вектор вдоль магнитного поля,  $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{H}$ ;  $\mathbf{r}$  — координата центра кружка; остальные обозначения — общепринятые.

Как видно из уравнения (3), движение частицы, или, вернее, центра ларморовского кружка, складывается из свободного движения вдоль силовой линии со скоростью  $u$  и дрейфа перпендикулярно к линии. Предположим, что электрическое поле не слишком велико, так что дрейф, вызванный электрическим полем, не превосходит магнитного. Тогда в уравне-

\*) Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. III. С. 285–299.

нии (3) члены, описывающие дрейф, имеют порядок величины  $\sim \frac{v^2}{\omega} \frac{1}{a} \sim v \frac{\rho}{a}$ , где  $\omega = \frac{eH}{mc}$  — циклотронная частота;  $a$  — характерный размер системы;  $\rho$  — ларморовский радиус. Первый член по порядку величины равен  $v$ , что в  $a/\rho$  больше остальных. Таким образом, в этих условиях дрейф является намного более медленным процессом, чем движение по силовой линии.

В магнитной ловушке частица совершает финитное движение, т. е. она либо движется по замкнутой силовой линии, либо отражается от «магнитных пробок» [3] на концах силовой линии. Это движение является быстрым, и поэтому естественно произвести по нему усреднение с тем, чтобы исследовать чистый дрейф.

Предположим, что магнитное поле не зависит от времени. Тогда электрическое поле является потенциальным  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ , и уравнения (1)–(3) допускают два интеграла движения

$$\frac{w^2}{H} = I = \text{const}, \quad m \frac{u^2 + w^2}{2} + e\varphi = \varepsilon = \text{const}. \quad (4)$$

Введем для удобства криволинейные координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , такие, чтобы координатные линии  $\xi_3$  совпали с магнитными силовыми линиями, и преобразуем (3) к этим, вообще говоря, неортогональным координатам.

Как известно, в криволинейной системе координат каждый вектор  $\mathbf{A}$  может быть задан либо контравариантными координатами  $A^i$ , т. е. коэффициентами разложения  $\bar{\mathbf{A}}$  по координатным векторам  $\mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i}$ ,  $\mathbf{A} = A^i \mathbf{R}_i$ , либо ковариантными  $A_i = (\mathbf{A} \mathbf{R}_i)$ , причем они связаны между собой очевидным соотношением  $A_i = A^j g_{ji}$ , где  $a_{ij} = (\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j)$  — метрический тензор. Так как  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{dt} = \mathbf{R}_i \frac{d\xi_i}{dt}$ , то контравариантные компоненты  $\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt}$  равны  $\frac{d\xi_i}{dt}$ .

В принятом нами первом приближении по  $\frac{1}{H}$  в компоненте  $\frac{d\xi_3}{dt}$  можно пренебречь дрейфом, т. е. положить  $\frac{d\xi_3}{dt} = uh^3$ .

Выражая отсюда  $dt$  через  $d\xi_3$ , запишем уравнения для двух других компонент в виде

$$\frac{d\xi_i}{d\xi_3} = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g} uh^3} \left\{ -c \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} h_k - \frac{mcw^2}{2eH^3} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} h_k + \frac{m c u^2}{eH} \frac{\partial h_k}{\partial \xi_j} \right\}. \quad (5)$$

Здесь  $i = 1, 2$ ;  $g = \text{Det } g_{ik}$ ;  $e^{ijk}$  — полностью антисимметричный единичный псевдотензор. Отсюда, исключая  $w^2$  и  $\varphi$  с помощью соотношений (4), получаем

$$\frac{d\xi_i}{d\xi_3} = \frac{mc}{e\sqrt{g} H h^3} e^{ijk} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (uh_k). \quad (6)$$

Интегрируя (6) вдоль силовой линии, получим суммарный дрейф частицы при прохождении заданного участка силовой линии

$$\Delta \xi_i = \int \frac{mc}{e\sqrt{g} H h^3} e^{ijk} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (uh_k) d\xi_3. \quad (7)$$

Так как вектор  $\mathbf{h}$  лежит на силовой линии и  $\mathbf{h}^2 = 1$ , то его контравариантные компоненты  $h^1$  и  $h^2$  равны нулю, а  $h^3 = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}$ . Ковариантные компоненты вектора  $\mathbf{h}$  равны  $h_i = g_{ik}h^k = \frac{g_{i3}}{\sqrt{g_{33}}}$ .

Из условия  $\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h^3 H \sqrt{g}) = 0$  следует, что выражение  $h^3 H \sqrt{g} = \frac{H \sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}}$  не зависит от  $\xi_3$ , и, следовательно, его можно вынести из-под знака интеграла (7) (напомним, что вдоль силовой линии координаты  $\xi_2, \xi_3$  остаются постоянными). Таким образом,

$$\Delta \xi^i = \frac{mc\sqrt{g_{33}}}{e\sqrt{g}H} e^{ijk} \int \frac{\partial}{\partial \xi_j} (uh_k) d\xi_3. \quad (8)$$

Предположим, что без учета дрейфа частица совершает периодическое движение, либо двигаясь по замкнутой силовой линии, либо отражаясь от «пробок» (мы не будем рассматривать здесь сложных конфигураций магнитного поля с незамкнутыми силовыми линиями и без «пробок»). Тогда в (8) интеграл от  $\frac{\partial}{\partial \xi_3} (uh_k)$  сводится к подстановке на концах линии и исчезает при полном обходе силовой линии или при отражении от «пробки» (где  $u = 0$ ). Таким образом, обозначая через  $T(\xi_1, \xi_2)$  время пролета по силовой линии в одну сторону, приходим к следующим усредненным уравнениям дрейфа:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{mc\sqrt{g_{33}}}{eH\sqrt{g}T} \frac{\partial J}{\partial \xi_2}, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{mc\sqrt{g_{33}}}{eH\sqrt{g}T} \frac{\partial J}{\partial \xi_1}, \quad (9)$$

где  $J = \int u dl$ , а  $dl = \sqrt{g_{33}} d\xi_3$  элемент длины силовой линии.

Из уравнения (9) следует  $\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0$ , т. е., как и следовало ожидать, дрейф происходит таким образом, что при этом сохраняется продольный инвариант  $J$ .

Приведенный здесь прямой вывод продольного инварианта из дрейфовых уравнений обладает тем преимуществом, что он справедлив и для полей без осевой симметрии, которые в основном и будут интересовать нас в дальнейшем. Итак, усредненные траектории ларморовских кружков на поверхности  $\xi_1, \xi_2$  даются выражением  $J(\xi_1, \xi_2) = \text{const}$ . Если электрическое поле отсутствует, то оно сводится к условию

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \text{const}, \quad (10)$$

где  $\Phi = J/v = \int F(H) dJ$  есть интеграл вдоль силовой линии от функции  $F(H) = \frac{u}{v} = \sqrt{1 - \frac{JH}{v^2}}$ , зависящий только от магнитного поля. Уравнение (10) и будет положено в основу дальнейшего исследования движения частиц в магнитных ловушках.

**2.** Рассмотрим для примера движение частиц в искривленной ловушке с магнитными пробками. Эта задача представляет интерес по той причине,

что практически невозможно создать поле с абсолютной осевой симметрией. Наличие же небольших ошибок неминуемо приведет к искривлению магнитного поля, вследствие чего частицы в ловушке будут испытывать тороидальный дрейф. Возникает вопрос, как отразится этот дрейф на запыриании частиц в ловушке. Пусть магнитное поле ловушки с пробками искривлено так, как это показано на рис. 1. Длину ловушки обозначим через  $L$ , ее радиус — через  $a$ , радиус кривизны оси — через  $R$ . Пусть, далее,  $H_0$  — магнитное поле в основной части неискривленной системы. Наша задача заключается в вычислении интеграла  $\Phi$ .

Этот интеграл складывается из двух частей: интеграла по основной части, где поле почти однородно, и части, возникающей от пробок. Пробочную часть интеграла вычислить довольно трудно, но если предположить, что поле  $H_m$  в пробке значительно больше  $H_0$ , то основная часть интеграла будет обусловлена заштрихованной на рис. 1 областью (непосредственно около пробки поле приблизительно радиально симметрично, и интеграл по этой области дает константу).

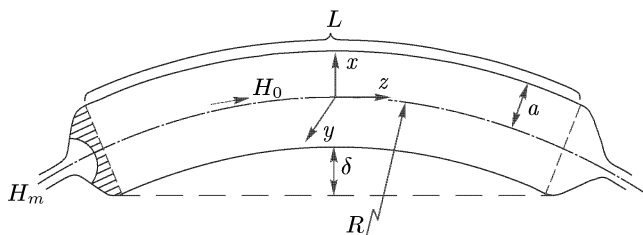


Рис. 1

Интеграл по отрезку линии, попадающей в заштрихованную часть, равен по порядку величины  $F(H_0) \frac{x^2 + y^2}{a}$  (координаты выбраны, как показано на рис. 1). Вычислим теперь часть интеграла по основной области. При искривлении поле в этой части системы равно  $H_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right)$ , а длина соответствующего участка силовой линии —  $L \left(1 + \frac{x}{R}\right)$ . Таким образом, получаем уравнение для траекторий частиц в виде

$$2F(H_0) \frac{x^2 + y^2}{a} + L \left(1 + \frac{x}{R}\right) F \left(H_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right)\right) = \text{const.}$$

Считая  $R$  очень большой величиной, получаем с точностью до  $a/R$ :

$$x^2 + y^2 + x \frac{aL}{4R} \frac{2v^2 - IH_0}{v^2 - IH_0} = \text{const.}$$

Таким образом, траектория частицы в поперечном сечении ловушки является окружностью с центром, смещенным относительно оси  $z$  на величину

$$x_0 = -\frac{aL}{8R} \frac{2v^2 - IH_0}{v^2 - IH_0}. \quad (11)$$

Если  $L/R \ll 1$ , то это смещение мало для большинства частиц. Однако для частиц с малыми  $u$   $x_0 = -\frac{aL}{8R} \frac{v^2}{u^2}$ , что становится больше  $a$  при

$\frac{u}{v} < \sqrt{\frac{L}{8R}}$ . При этом траектории частиц превращаются в разомкнутые кривые, и соответствующие частицы оседают на стенки.

Здесь следует, пожалуй, отметить одно обстоятельство. Тот факт, что имеются частицы, выходящие на стенки, не вызывает удивления. Очевидно, например, что если  $u$  достаточно мало, частица может осесть на стенку за время  $t = L/u$  пролета между пробками. Для этого достаточно лишь, чтобы было  $v_d t > 2a$ , где  $v_d$  — дрейфовая скорость, равная, согласно (3),  $v_d \approx v \frac{\rho}{2R}$ . Однако для таких частиц  $\frac{u}{v} \sim \frac{1}{4} \frac{L}{R} \cdot \frac{\rho}{a}$  намного меньше найденной

выше доли частиц  $\sim \frac{u}{v} \sim \sqrt{\frac{L}{8R}}$ . Это означает, что основная часть оседающих на стенки частиц успевает совершить много колебаний между пробками.

Оценим теперь скорость ухода частиц на стенки. Будем считать распределение по скоростям сферически симметричным, что справедливо при достаточно малой утечке частиц. Число частиц с  $\frac{u}{v} < \sqrt{\frac{L}{8R}}$  равно по порядку величины  $N \sqrt{\frac{L}{8R}}$ , где  $N$  — полное число частиц. Скорость дрейфа, согласно (3), равна  $\sim v \frac{\rho}{2R}$ , отсюда поток частиц на стенки за счет тороидального дрейфа порядка

$$\frac{N}{\pi a^2 L} \sqrt{\frac{L}{8R}} \cdot v \frac{\rho}{2R} \cdot L \cdot 2a.$$

Потребуем, чтобы эта утечка была меньше диффузионной. Диффузионный поток равен по порядку величины  $aL \frac{\rho^2}{\tau} \frac{\partial n_0}{\partial r} \sim 10N \frac{\rho^2}{a^2 \tau}$ , где  $n_0$  — плотность частиц,  $1/\tau$  — средняя частота кулоновских соударений, а множитель порядка 10 введен нами для того, чтобы учесть крутой спад всех величин у стенок системы (см. [4]). Отсюда  $\sqrt{\frac{L}{8R}} \cdot v \frac{\rho}{\pi R a} < 10 \frac{\rho^2}{a^2} \frac{1}{\tau}$ , или  $\frac{L}{R} < 10 \left( \frac{L \rho}{a \lambda} \right)^{2/3}$ , где  $\lambda = v\tau$  — кулоновский пробег.

Но  $\frac{L}{R} \sim \frac{\delta}{L}$  (см. рис. 1), т. е. имеет порядок неточности в осевой симметрии поля. Таким образом, ошибка, которая может быть допущена в ловушке с магнитными пробками при условии, чтобы тороидальным дрейфом можно было пренебречь, должна быть

$$\frac{\delta}{L} < 10 \left( \frac{L \rho}{a \lambda} \right)^{2/3}. \quad (12)$$

Положим, например,  $L/a \sim 10^2$ ,  $\rho \sim 1$  см, плотность  $n_0 \sim 10^{15}$ , температуру  $T \sim 30$  кэВ, тогда  $\lambda \sim 10^6$  см и  $\delta/L < 10^{-2}$ . Как видим, для компенсации тороидального дрейфа осевая симметрия ловушки должна выдерживаться с достаточно большой точностью.

**3.** Как было отмечено в предыдущем пункте, наличие пробок приводит к компенсации тороидального дрейфа у большинства частиц вследствие вращения их вокруг оси ловушки. При этом дрейф в пробках обусловлен, грубо говоря, тем, что силовые линии, лежащие на периферии,

являются более длинными, чем центральные. Возникает мысль усилить стабильность движения частиц путем еще большего удлинения периферийных силовых линий, т. е. путем усиления дрейфа частиц вокруг оси симметрии. Для этого можно наложить на основное поле  $\mathbf{H}_0$  некоторое дополнительное периодическое поле  $\mathbf{H}'$ , возрастающее к периферии.

Для упрощения исследования рассмотрим только частицы с  $u/v = 1$ . Введем цилиндрическую систему координат с осью  $z$ , направленной по  $\mathbf{H}_0$ . Обозначим через  $\psi$  потенциал магнитного поля  $\mathbf{H} = \nabla\psi$ . Из  $\text{div } \mathbf{H} = 0$  следует:  $\Delta\psi = 0$ . Выберем  $\psi$  в виде  $\psi = H_0 z - \frac{A}{k} \sin kz \cdot I_0(kr)$ , где  $I_0(kr)$  — функция Бесселя от мнимого аргумента. Отсюда  $H_z = H_0 - A \cos kz \cdot I_0(kz)$ ,  $H_r = -A \sin kz \cdot I_0'(kr) = A \sin kz \cdot I_1(kr)$ , т. е. мы выбрали поле  $\mathbf{H}'$ , симметричное относительно оси  $z$  и периодичное по  $z$ .

Вычисляем опять интеграл  $\Phi$ , который в рассматриваемом нами случае сводится к длине силовой линии. Поле  $\mathbf{H}$  будем считать малым, в соответствии с чем вычисления будем производить в виде разложения по  $\mathbf{H}'/H_0$  с учетом членов до второго порядка включительно.

Уравнение силовой линии с необходимой для нас точностью имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = \frac{H_r}{H_z} \approx \frac{A}{H_0} \sin kz \cdot I_1(kr),$$

откуда элемент длины силовой линии

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (dz)^2} \approx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 \right\} dz \approx \left\{ 1 + \frac{A^2}{2H_0^2} \cdot \sin^2 kz \cdot I_1^2(kr_0) \right\} dz.$$

Опуская значок 0 у  $r$ , получаем для  $\Phi$  следующее выражение:

$$\Phi(r) = \left\{ 1 + \frac{1}{4} \frac{A^2}{H_0^2} I_1^2(kr) \right\} L. \quad (13)$$

Как видим, если длина  $L$  достаточно велика, зависимость  $\Phi$  от  $\mathbf{r}$  является гораздо более сильной, чем при наличии только одной пары пробок.

Это означает, что использование гофрированного магнитного поля позволяет осуществить некоторую компенсацию тороидального дрейфа и тем самым приводит к возможности создания магнитных ловушек нового вида. Простейшая из таких ловушек представляет собой гофрированный тор. Но так как решение задачи о дрейфе частиц в такой системе представляет

значительные трудности, то мы рассмотрим здесь две более простые ловушки, в которых гофрированная и искривленная части пространственно разделены.

Первая, которая может быть названа замкнутой ловушкой с магнитными пробками, изображена на рис. 2.

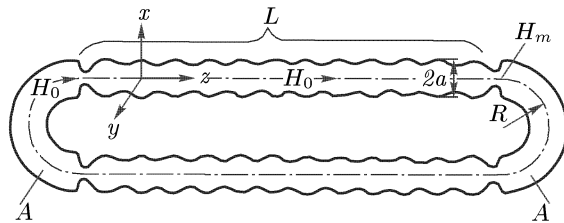


Рис. 2

Она представляет собой две гофрированные ловушки с пробками, соединенные между собой «рукавами»  $A$ .

Рассмотрим, как будут двигаться частицы в такой системе. Обозначим через  $\alpha$  отношение  $H_0/H_m$  поля в основной части к полю в пробке. Поле



в рукаве положим для простоты равным также  $H_0$ . Тогда через пробки в рукава будут вылетать частицы только с  $p = \frac{IH_0}{v^2} < \alpha$ . Будем считать, что  $\alpha$  достаточно мало; тогда для исследования дрейфа можно использовать уравнение (13). Отсюда для траекторий получаем уравнение

$$\frac{L}{4} \frac{A^2}{H_0^2} I_1^2(kr) + \pi x = \text{const}. \quad (14)$$

Здесь второе слагаемое в левой части учитывает дрейф в рукаве. Как видим, при достаточно большом  $L$  траектории частиц будут мало отличаться от окружностей, а именно, если примем  $\left[\frac{A}{H_0} I_1(ka)\right]^2 \sim \frac{1}{3}$ ,  $ka \sim 3$ , то  $\frac{d}{da} \left[\frac{A}{H_0} I_1(ka)\right]^2 \sim \frac{1}{a}$  и для смещения  $\delta r$  получим  $\frac{\delta r}{a} \sim 10 \frac{a}{L}$ . Если примем  $L/a \sim 10^2 \div 10^3$ , то это смещение будет пренебрежимо мало. Следовательно, частицы, лежащие в конусе скоростей  $p < \alpha$ , хотя и пролетают через рукава, но не могут осесть на стенки, так как подвергаются более энергичному круговому дрейфу в гофрированной части.

Основным процессом, уносящим частицы из такой системы, являются соударения, которые происходят в рукавах. Поэтому если сделать объем рукавов намного меньше объема прямых частей, то пробки будут в значительной степени заперты.

Рассмотрим более подробно утечку частиц из системы. Пусть  $n_0$  — плотность частиц в основной части ловушки; тогда плотность в фазовом пространстве будет равна  $n_0 \cdot \frac{3}{4\pi v_T^3}$ , где  $v_T$  — некоторая средняя тепловая скорость. Как известно, в случае кулоновских столкновений «максвеллизация» плазмы носит характер диффузии в пространстве скоростей, причем коэффициент диффузии равен по порядку величины  $D \sim \frac{v_T^2}{\tau}$ , где  $\frac{1}{\tau}$  — частота кулоновских столкновений.

Для упрощения задачи заменим конус  $p < \alpha$  в пространстве скоростей на цилиндр  $w^2 < \alpha v_T^2$ .

Обозначим через  $n_\alpha$  плотность частиц со скоростями, лежащими в этом цилиндре. Тогда стационарное решение диффузионного уравнения, которое равно  $n_0 \cdot \frac{3}{4\pi v_T^3}$  при  $w \sim w_T$  и  $n_\alpha \cdot \frac{3}{4\pi v_T^3}$  на границе цилиндра, есть

$$n(w) \approx \frac{3}{4\pi v_T^3} n_0 \left\{ 1 - \frac{n_0 - n_\alpha}{n_0 \ln \sqrt{\alpha}} \ln \frac{w}{v_T} \right\}. \quad (15)$$

Отсюда находим полный поток частиц в конус  $p < \alpha$  из обеих гофрированных частей

$$-\frac{\partial N}{\partial t} = 2\pi \sqrt{\alpha} v_T \cdot 2v_T \cdot D \frac{\partial n}{\partial w} \Big|_{w=\sqrt{\alpha} v_T} \cdot 2\pi a^2 L = \frac{6}{\tau |\ln \alpha|} \cdot 2\pi a^2 L (n_0 - n_\alpha). \quad (16)$$

Заметим, что при  $n_\alpha = 0$  это выражение совпадает с утечкой, полученной в [3] для незапертой ловушки.

В рукавах  $A$  такое же число частиц должно выходить из конуса  $p < \alpha$ . Аналогично (16) получаем

$$-\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{6}{\tau_1 |\ln \alpha|} \cdot \pi a^2 \cdot 2\pi R (n_\alpha - n_1), \quad (17)$$

где  $n_1$  — плотность частиц в рукавах.

Частицы, вышедшие в рукавах из конуса  $p < \alpha$ , выходят на стенки, так как при таком сильном искривлении поля дрейф в пробках не способен стабилизировать движение [как видно из (11) при  $L \sim \pi R$   $x_0 \sim a$ ]. Это приводит к утечке частиц

$$-\frac{\partial N_1}{\partial t} = n_1 v_d \cdot 2\pi R \cdot 2a \sim n_1 v_T \cdot \frac{\rho}{R} \cdot 4\pi \cdot Ra. \quad (18)$$

Приравнявая между собой (16)–(18), найдем все неизвестные величины. Из (16) и (18) имеем

$$n_0 - n_\alpha = \frac{\tau}{\tau_1} \frac{\pi R}{L} (n_\alpha - n_1).$$

Предположим, что  $\pi R/L \ll 1$ , тогда, с учетом  $\tau/\tau_1 \leq 1$ , получаем  $n_\alpha \approx n_0$ . Приравнявая (17) и (18), имеем

$$n_1 = \frac{n_0}{1 + \frac{|\ln \alpha| \rho \lambda_1}{3\pi a R}},$$

где  $\lambda_1 = v_T \tau_1$  — средний свободный пробег в рукаве. Предположим, что выполнено условие  $\rho \lambda / a R \gg 1$ . Тогда  $n_1 \ll n_0$ , и, следовательно, в рукавах будут присутствовать только частицы с  $p < \alpha$ . Отсюда  $\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau} \alpha$ , и из (17) получаем для утечки

$$-\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{6}{\tau |\ln \alpha|} \cdot n_0 \cdot 2\pi a^2 L \cdot \alpha \frac{\pi R}{L}, \quad (19)$$

что в  $\alpha \frac{\pi R}{L}$  меньше, чем утечка в открытые «пробки». Полагая, например,  $\alpha \sim \frac{1}{3}$ ,  $\frac{L}{a} \sim 10^2$ ,  $R \sim 2a$ , получим занижение ухода через пробки на два порядка. Учитывая, что каждая частица уносит с собой энергию  $kT$ , получаем для отношения  $\gamma$  энерговыделения к потерям в такой системе:

$$\gamma = \frac{\langle \sigma \rangle \cdot q \cdot n_0 \lambda |\ln \alpha|}{kT \cdot 6} \cdot \frac{1}{\alpha \pi R} \sim 10^{20} \frac{\langle \sigma \rangle T \text{ [кэВ]} L}{\alpha R}, \quad (20)$$

где  $\langle \sigma \rangle$  — усредненное по максвелловскому распределению поперечное сечение реакции;  $q \sim 10^3$  кэВ — выделяющаяся при одном элементарном акте энергия;  $\lambda \approx 10^{18} T^2 / n_0$  — кулоновский пробег. Например, при  $T = 30$  кэВ,  $\alpha = 1/3$  получаем  $\gamma \sim 10^{-4} L/R$  для чистого дейтерия и  $\gamma \sim 10^{-2} L/R$  для смеси дейтерия с тритием. Отсюда видно, что для создания  $\gamma < 1$  система должна быть достаточно длинной.

Вторая система, которую мы здесь опишем, является скорее модифицированным тором. Она представляет собой две гофрированные ловушки с пробками, соединенные между собой «перемычками»  $A$ .

Предположим опять, что  $\alpha = H_0/H_m$  достаточно мало. Введем координаты, как показано на рис. 3, и учтем, что в перемычках силовые линии, а вместе с ними и координатные линии сжимаются в  $1/\sqrt{\alpha}$  раз. Тогда уравнение траекторий запишется в виде

$$\frac{1}{4} L \frac{A^2}{H_0^2} I_1^2(kr) + \pi(R + \sqrt{\alpha} x) \sqrt{1 - p' \left(1 - \frac{x\sqrt{\alpha}}{R}\right)} = \text{const}, \quad (21)$$

где  $p' = \frac{IH_m}{v^2} = \frac{p}{\alpha}$ . Согласно (21) траектории представляют собой замкнутые кривые, близкие к смещенным окружностям. Положим опять

$$\left[ \frac{A}{H_0} I_1(ka) \right]^2 \sim \frac{1}{3}, \quad ka \sim 3,$$

$$\text{тогда } \frac{d}{da} \left[ \frac{A}{H_0} I_1(ka) \right]^2 \sim \frac{1}{a}, \text{ и}$$

для смещения  $x_0$  получим  $x_0/a \sim 4\Delta/L$ , где  $\Delta$  — изменение второго слагаемого в левой части (21) на длине  $\sim a$ . Величина  $x_0$  максимальна для

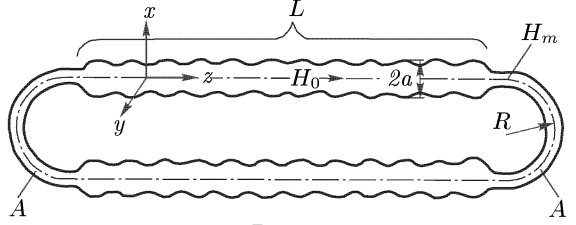


Рис. 3

частиц с  $1 - p' < \frac{a\sqrt{\alpha}}{R}$ , так как в этом случае второе слагаемое в (21) может

обращаться в нуль, а именно:  $\frac{x_0}{a} \sim 10 \frac{L}{R} \sqrt{\frac{a\sqrt{\alpha}}{R}}$ . Доля таких частиц порядка

$\sqrt{1 - p'} \sim \sqrt{\frac{a\sqrt{\alpha}}{R}}$ . Траектории остальных частиц смещаются на величину

$\frac{x_0}{a} \sim 10 \frac{a\sqrt{\alpha}}{L}$ . Отсюда для среднего смещения получаем

$$\frac{\bar{x}_0}{a} \approx \frac{10}{L} \left\{ R \sqrt{\frac{a\sqrt{\alpha}}{R}} \cdot \sqrt{\frac{A\sqrt{\alpha}}{R}} + a\sqrt{\alpha} \right\} = \frac{20a\sqrt{\alpha}}{L}.$$

Наличие таких смещений у частиц с  $p < \alpha$  приводит к увеличению коэф-

фициента температуропроводности  $\chi \approx \frac{\rho^2}{\tau}$  на величину  $\alpha \frac{x_0^2}{\tau} \sim \frac{\rho^2}{\tau} \left[ \frac{40a^2\alpha}{L_0\rho} \right]^2$ ,

где  $L_0 \approx 2L$  — периметр рассматриваемой нами системы. Пусть  $a/\rho \sim 10^2$ ,

$\alpha \sim 1/4$ , тогда при  $L_0 \sim 10^3 a$  влияние тороидального дрейфа на теплопроводность будет полностью скомпенсировано (то же самое относится и к системе, рассмотренной в предыдущем пункте). Кроме теплопроводности, в системе, изображенной на рис. 3, существует еще другой механизм утечки энергии, а именно: частицы с достаточно малым отношением  $u/v$  успевают осесть на стенки за время пролета через перемычку. Мы опять предположим, что температура около стенок спадает на длине  $\sim a/10$ . Тогда частицы с  $u < \frac{\pi R \cdot v \alpha}{(1/10)\sqrt{\alpha} a} \approx \frac{5\pi\sqrt{\alpha}\rho}{a} \cdot v$  успевают за время пролета через перемычку выйти из горячей области и осесть на стенку. Доля таких частиц от всех частиц в перемычке порядка  $\frac{u}{v} \sim 5 \frac{\sqrt{\alpha}\rho}{a}$ . Эту долю можно уменьшить, если уменьшить длину перемычек, увеличив число прямолинейных частей. Так

как длина перемычки не может быть сделана меньше  $(2 \div 3)\sqrt{\alpha}a$ , то долю  $\frac{u}{v}$  можно уменьшить лишь до величины  $\frac{u}{v} \sim \frac{\sqrt{\alpha}\rho}{a} \cdot \frac{30}{Q}$ , где  $Q \approx \frac{2R}{\sqrt{\alpha}a}$  есть число перемычек. Отсюда полное число частиц, оседающих на стенки в перемычках, равно

$$-\frac{\partial N}{\partial t} = 2\pi R \cdot 2\sqrt{\alpha} \cdot an_0 v_d \frac{u}{v} \approx \frac{10^2}{Q} \cdot \alpha^2 n_0 v_T \rho^2 \sim n_0 v_T \rho^2, \quad (22)$$

если  $\alpha \sim 1/3$ ,  $Q \sim 10$  (полагаем распределение по скоростям изотропным, что справедливо при достаточно большой плотности  $n_0$ ), а утечка частиц за счет диффузии равна  $-\frac{\partial N}{\partial t} \sim 10L_0 n_0 \frac{\rho^2}{\tau}$ , где множителем 10 мы опять учитываем наличие крутого спада температуры около стенок. Эти потоки сравниваются при  $L_0/\lambda \sim 10^{-1}$ , что может быть выполнено при достаточно большой плотности и не очень высокой температуре. Но, вообще говоря, утечку (22) следует считать больше диффузионной.

Частицы, для которых в перемычке  $\frac{u}{v} > \frac{\sqrt{\alpha}\rho}{a} \cdot \frac{30}{Q}$ , хотя и не пересекают область с перепадом температуры, но все же дают дополнительный перенос тепла в виде своеобразной теплопроводности. Наибольшее смещение получают частицы с малым  $\frac{u}{v}$  в перемычке, а именно  $l \sim \frac{3\sqrt{\alpha}\rho}{Q} \cdot \frac{v}{u}$ . Частица, раз получившая такое смещение, при дальнейшем движении через гофрированную часть поворачивается около оси системы и смещается либо в область меньших  $x$ , где она отражается от пробки, либо в область больших  $x$ , где для нее  $u/v$  в перемычке не будет очень малым. Следовательно, второе значительное смещение частица совершит только после того, как она сделает полуоборот около оси симметрии. Скорость вращения около оси равна, согласно (9),

$$\frac{d\varphi}{dt} \sim \frac{v^2}{a\omega L_0} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \sim \frac{1}{10} v \frac{\rho}{a^2}.$$

Отсюда время полуоборота  $t_0 \sim \frac{10\pi a^2}{v\rho}$ , а коэффициент диффузии

$$D' \sim \frac{\bar{l}^2}{t_0} \sim \frac{\alpha}{\pi Q^2} \cdot \frac{v\rho^3}{a^2} \left(\frac{v}{u}\right)^2, \text{ где усреднение производится по частицам с } \frac{u}{v} > \frac{\sqrt{\alpha}\rho}{a} \cdot \frac{30}{Q}.$$

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2 = \int \left(\frac{v}{u}\right)^2 \frac{d\varphi}{2\pi} \approx \int \frac{v^2}{u^2} \frac{dx}{2a\sqrt{\alpha}} = \frac{R}{a\alpha\bar{r}'} \int \frac{du}{u} \approx \frac{R}{a\alpha} \ln \frac{\sqrt{a\sqrt{\alpha}/R}}{\frac{\sqrt{\alpha}\rho}{a} \cdot \frac{30}{Q}} \sim \frac{R}{a\alpha} \ln \frac{a}{\rho}.$$

Таким образом, для потока частиц за счет «столкновений с перемычками» получаем

$$-\frac{\partial N}{\partial t} \sim \alpha_1 \frac{n_0}{(1/10)a} D' L_0 \cdot 2a \sim \frac{10\alpha^{3/2}}{\pi Q} \ln \frac{a}{\rho} \cdot \frac{L_0\rho}{a^2} \cdot n_0 v_T \rho^2 \sim \frac{L_0\rho}{5a^2} \cdot n_0 v_T \rho^2,$$

при  $\alpha \sim 1/3$ ,  $Q \sim 10$ ,  $a/\rho \sim 10^2$ , что меньше (22) при  $L_0/a < 5a/\rho \sim 10^3$  (заметим, однако, что подобного рода теплопроводность может оказаться существенной в системе рис. 2 при очень низких плотностях).

Оценим опять  $\gamma$ , учитывая лишь утечку (22)

$$\gamma = \frac{\langle \sigma v \rangle \cdot n_0^2 \cdot q \cdot \pi a^2 L_0}{n_0 v_{\perp} \rho^2 k T} \sim 10^3 \frac{n_0 \langle \sigma \rangle}{\rho^2 T [\text{кэВ}]} \cdot \pi a^3 L_0. \quad (23)$$

Например, для чистого дейтерия при  $n_0 \sim 10^{15}$ ,  $\rho \sim 1$ ,  $T \sim 30$  кэВ,  $\gamma \sim 10^{-10} \pi a^2 L_0$ , т. е. объем установки должен быть больше  $10^4$  м<sup>3</sup>, чтобы реакция была самоподдерживающейся. Таким образом, обе рассмотренные здесь системы должны иметь примерно одинаковые размеры, а именно:  $a$  порядка нескольких метров,  $L_0$  порядка нескольких сот метров при наполнении их дейтерием.

## Заключение

Мы описали здесь две простейшие ловушки с гофрированным магнитным полем, принцип действия которых основан на усилении дрейфа частиц около оси системы наложением дополнительного периодического поля\*). Первая из них работает аналогично простой ловушке с магнитными пробками, т. е. утечка частиц из нее определяется кулоновскими соударениями. Во второй основная утечка частиц возникает из-за тороидального дрейфа, и в этом смысле она ближе к тору. Вероятно, существуют более совершенные ловушки такого же типа, и поэтому представляет интерес более подробное изучение движения частиц в магнитных ловушках, которое, надо надеяться, позволит выбрать наилучшую конфигурацию. Большой интерес, однако, представляет собой изучение поведения в таких ловушках не отдельных частиц, а плазмы с учетом собственных электрических и магнитных полей и прочих усложняющих факторов; в частности, необходимо произвести исследование соответствующих систем на устойчивость.

В заключение выражаю глубокую благодарность академику Л.А. Арцимовичу и академику М.А. Леонтовичу за детальное обсуждение работы и ряд ценных указаний.

## Список литературы

1. Альвен Х. Космическая электродинамика. — М.: ИЛ, 1952.
2. Боголюбов Н.Н., Зубарев Д.Н. // Укр. матем. ж. 1955. Т. 7. С. 5.
3. Будкер Г.И. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. III. С. 3.
4. Сахаров А.Д. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. I. С. 20.
5. Будкер Г.И. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. I. С. 66.

---

\*) Идея о возможности использования периодического поля для стабилизации дрейфа высказывалась ранее Г.И. Будкером [5]. Однако подробно этот эффект им рассмотрен не был.

## О ГИДРОДИНАМИКЕ ПЛАЗМЫ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ \*)

В работе получены приближенные уравнения движения плазмы, давление которой много меньше давления магнитного поля. Рассмотрен вопрос о равновесии и устойчивости такой плазмы.

### 1. Уравнения движения

В настоящей работе для описания плазмы используется гидродинамическое приближение, которое в ряде случаев дает вполне удовлетворительные результаты.

Если пренебречь диссипативными процессами в плазме, то уравнения магнитной гидродинамики имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}], \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\rho^\gamma} + (\mathbf{v} \nabla) \frac{\rho}{\rho^\gamma} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}], \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (1.4)$$

В общем случае мы имеем, таким образом, сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений.

Однако ее можно несколько упростить в том случае, когда давление плазмы значительно меньше давления магнитного поля, т. е. при  $8\pi r/H^2 \ll 1$ .

Действительно, при этом скорость магнитогидродинамических волн

$c_H = \sqrt{\frac{H^2}{4\pi\rho}}$  намного больше скорости звука  $c_s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ ; поэтому, если

не рассматривать собственно гидродинамические волны, можно положить  $c_H = \infty$ . Это означает, что любое возмущение плазмы, приводящее к смещению силовой линии в некотором месте в поперечном направлении, мгновенно передается вдоль силовой линии, и вся она (вернее, плазма вдоль всей линии) приходит в движение. При этом движение плазмы является в некотором смысле двумерным, и наша задача заключается в нахождении уравнений для описания этого движения.

Эти уравнения можно получить чисто формальным путем, производя разложение уравнений (1.1)–(1.4) по степеням малого параметра. Положим  $p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots$ ,  $\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \dots$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \dots$ ,  $\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \{ \mathbf{H}_0 + \varepsilon \mathbf{H}_1 + \dots \}$  ( $\varepsilon$  будем считать малым параметром), подставим

---

\*) Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 16–23.

эти выражения в систему (1.1)–(1.4), приравняем нулю выражения при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и положим затем  $\varepsilon = 1$ .

Таким образом, мы получаем следующую систему уравнений:

$$[\text{rot } \mathbf{H}_0, \mathbf{H}_0] = 0, \quad \text{div } \mathbf{H}_0 = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_0], \quad (1.6)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla p_0 = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_0] + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1], \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \text{div } \rho_0 \mathbf{v}_0 = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = 0 \quad (1.9)$$

и т. д.

Ограничиваясь лишь членами нулевого порядка малости, мы отбросим все остальные уравнения и опустим значок «0».

Из уравнения (1.5), отвлекаясь от случая бессилловых полей, получаем  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ , т. е.  $\mathbf{H} = \sum_i I_i \nabla \varphi_i$ , где  $I_i$  — внешние токи, а  $\varphi_i$  — соответствующие им скалярные потенциалы (вообще говоря, неоднозначные). Для простоты мы будем считать, что токи не изменяются со временем, а несущие их проводники неподвижны, тогда  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$  и из (1.6) получаем

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{[\mathbf{h}, \nabla \Phi]}{H}, \quad (1.10)$$

где  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ ,  $v_{\parallel}$  — произвольная функция от  $\mathbf{r}$ ,  $t$ ;  $\Phi$  — функция  $\mathbf{r}$ ,  $t$ , удовлетворяющая условию  $\mathbf{h} \nabla \Phi = 0$ . Кроме того, из (1.6) следует, что на границе с неподвижными проводниками тангенциальная компонента векторного произведения  $[\mathbf{v} \mathbf{H}]$  обращается в нуль:

$$[\mathbf{v} \mathbf{H}]_{\tau} = 0. \quad (1.11)$$

Подставляя (1.10) в уравнение (1.7), мы должны рассматривать (1.7) как уравнение для определения  $\mathbf{H}_1$ . При этом, как известно, должно выполняться условие разрешимости: левая часть уравнения (1.7) должна быть ортогональна к решению  $\chi$  однородного уравнения, сопряженного с уравнением  $L \mathbf{H}_1 = [\text{rot } \mathbf{H}_1, \mathbf{H}] = 0$ . Сопряженное уравнение  $L^* \chi = 0$  находится по известному правилу  $\int \chi L \mathbf{H}_1 d\mathbf{r} = \int \mathbf{H}_1 L^* \chi d\mathbf{r}$ . С помощью интегрирования по частям получаем  $\int \chi L \mathbf{H}_1 d\mathbf{r} = - \int \mathbf{H}_1 \text{rot} [\chi \mathbf{H}] d\mathbf{r} + \oint [[\chi \mathbf{H}] \mathbf{H}_1] ds$ , т. е.  $L^* \chi = \text{rot} [\chi \mathbf{H}] = 0$  и  $[\chi \mathbf{H}]_{\tau} = 0$  на границе проводников. Таким образом,  $\chi$  удовлетворяет тому же уравнению, что и  $\mathbf{v}$  и, следовательно,  $\chi = \mathbf{h} \chi_{\parallel} + \frac{[\mathbf{h} \nabla \Psi]}{H}$ , где  $\chi_{\parallel}$  — произвольная функция, а  $\Psi$  — функция, подчиненная условию  $\mathbf{h} \nabla \Psi = 0$ . Условие ортогональности левой части уравнения (1.7) к  $\chi_{\parallel}$  приводит, очевидно, к уравнению:

$$\rho \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial t} + \rho \mathbf{h} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{h} \nabla) p = 0, \quad (1.12)$$

а условие ортогональности к  $\chi_{\perp}$  после интегрирования по частям принимает вид

$$\int \Psi \operatorname{div} \left\{ \frac{\rho}{H^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{H} [\mathbf{h}_1(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}] - \frac{1}{H} [\mathbf{h} \nabla p] \right\} d\mathbf{r} = 0. \quad (1.13)$$

Функция  $\Psi$ , как показывает условие  $\mathbf{h} \nabla \Psi = 0$ , постоянна вдоль магнитных силовых линий, а в остальном является произвольной функцией координат. Выберем  $\Psi$  такой, чтобы она равнялась единице внутри некоторой бесконечно тонкой трубки, образованной силовыми линиями поля  $\mathbf{H}$ , и обращалась в нуль вне этой трубки. Тогда интеграл (1.13) можно записать в виде линейного, полагая  $d\mathbf{r} = s dl$ , где  $s$  — поперечное сечение трубки, а  $dl$  — элемент дуги силовой линии. Но в силу постоянства вдоль трубки магнитного потока  $\varphi = sH$  мы можем вынести  $\varphi$  за знак интеграла, и тогда условие (1.13) запишется в виде

$$\int \frac{1}{H} \operatorname{div} \left\{ \frac{\rho}{H^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{H} [\mathbf{h}_1(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}] - \frac{1}{H} [\mathbf{h} \nabla p] \right\} dl = 0, \quad (1.14)$$

где интеграл берется вдоль любой силовой линии.

Уравнения (1.12), (1.14) совместно с (1.8), (1.9) как раз и являются уравнениями, описывающими в нулевом приближении движение плазмы, давление которой много меньше давления магнитного поля.

Для простоты мы рассматривали идеальную плазму, однако в приведенной схеме нетрудно учесть вязкость и теплопроводность плазмы, а также отличие электрической проводимости от бесконечной. Следует только иметь в виду, что для учета конечной проводимости необходимо привлечь следующее приближение.

Следует, кроме того, отметить, что нулевого приближения оказывается недостаточно также в том случае, когда магнитное поле таково, что силовые линии не замкнуты, а заполняют целую поверхность. Действительно, в этом случае  $\Phi$  должна быть постоянна на этой поверхности и у  $v$  остаются лишь две степени свободы. Однако в простых геометриях, когда силовые линии замкнуты (возможно, на бесконечности) и при условии, что проводимость плазмы бесконечно велика, можно, по-видимому, ограничиться нулевым приближением.

## 2. Равновесие и устойчивость

В качестве примера применения полученных уравнений рассмотрим вопрос о равновесии и устойчивости идеальной плазмы, удерживаемой внешним магнитным полем.

Условия равновесия получаются из уравнений (1.12), (1.14), если положить в них  $\mathbf{v} = 0$ . Из (1.12) получаем  $\mathbf{h} \nabla p = 0$ , т. е. давление постоянно вдоль силовой линии. Предполагая, что это условие выполнено, рассмотрим второе условие:

$$\int \frac{1}{H} \operatorname{div} \frac{[\mathbf{H} \nabla p]}{H^2} dl = -2 \int \frac{[\mathbf{h} \nabla p] \nabla H}{H^3} dl = 0. \quad (2.1)$$

Для его преобразования удобно ввести криволинейные координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  такие, чтобы координатные линии  $\xi_3$  совпадали с силовыми линиями магнитного поля (по предположению замкнутыми). Обозначим через  $g_{ik}$



метрический тензор, через  $g$  — детерминант  $\text{Det } g_{ik}$ , тогда для контравариантных компонент вектора  $\mathbf{h}$  имеем  $h^i = \frac{\delta_3^i}{\sqrt{g_{33}}}$ , где  $\delta_j^i$  — символ Кронекера.

Ковариантные компоненты  $h_i = \frac{g_{i3}}{\sqrt{g_{33}}}$ .

В координатах  $\xi_i$  условие (2.1) имеет вид

$$\int \frac{e_{ijk}}{\sqrt{g}} \frac{\partial p}{\partial \xi_i} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \frac{g_{k3}}{\sqrt{g_{33}}} \frac{dl}{H^3} = 0, \quad (2.2)$$

где  $e_{ijk}$  — полностью антисимметричный единичный псевдотензор. Из условия  $\text{div } \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{\sqrt{g} H}{\sqrt{g_{33}}} = 0$  следует, что комбинация  $\frac{\sqrt{g} H}{\sqrt{g_{33}}}$  не зависит от  $\xi_3$  и поэтому ее можно вынести за знак интеграла. Вынося из-под интеграла также  $p$  и учитывая, что  $dl = \sqrt{g_{33}} d\xi_3$ , мы запишем (2.2) в виде

$$\frac{\partial p}{\partial \xi_i} \int e_{ijk} \frac{H g_{k3}}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \frac{1}{H^2} \right) d\xi_3 = 0. \quad (2.3)$$

Но из условия  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$  следует, что

$$\frac{1}{H^2} e_{ijk} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{H g_{k3}}{\sqrt{g_{33}}} = 0. \quad (2.4)$$

Прибавляя (2.4) к подинтегральному выражению в (2.3) и учитывая, что интегралы от производных по  $\xi_3$  исчезают в силу замкнутости силовых линий, получаем

$$e_{ijk} \frac{\partial p}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int \frac{g_{k3}}{H \sqrt{g_{33}}} d\xi_3 = 0. \quad (2.5)$$

Так как здесь  $i, j \neq 3$ , то отличными от нуля являются лишь члены с  $k = 3$ , и мы приходим к следующему условию равновесия:

$$[\nabla p, \nabla U] = 0, \quad \text{где } U = - \int \frac{dl}{H}. \quad (2.6)$$

Предположим теперь, что плазма с плотностью  $\rho_0$  и давлением  $p_0$  находится в равновесии, и найдем условия, при которых это равновесие является устойчивым. Для этого необходимо исследовать поведение плазмы при малых отклонениях от положения равновесия. Положим  $p = p_0 + p'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \eta_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{[\mathbf{h} \nabla \varphi]}{H}$ , где  $p'$ ,  $\rho'$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  — малые величины, подставим это в (1.8), (1.9), (1.12), (1.14) и пренебрежем малыми величинами высших порядков. Из (1.8), (1.9) получаем  $p' = -\boldsymbol{\eta} \nabla p_0 - \gamma p_0 \text{div } \boldsymbol{\eta}$ . Заметим, что здесь первое слагаемое не зависит от  $\xi_3$ . В этом легко убедиться, если записать его в криволинейных координатах и учесть, что  $p_0$ ,  $\varphi$ ,  $\frac{\sqrt{g} H}{\sqrt{g_{33}}}$  не зависят от  $\xi_3$ . Поэтому линеаризованное уравнение (1.12) записывается в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \eta_{\parallel}}{\partial t^2} - \gamma (\mathbf{h} \nabla) p_0 \text{div } \boldsymbol{\eta} = 0. \quad (2.7)$$

Уравнение (1.14) принимает вид

$$\int \frac{1}{H} \text{div} \left\{ \frac{\rho_0}{H^2} \nabla \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{H} [\mathbf{h}, \nabla (\boldsymbol{\eta} \nabla p_0 + \gamma p_0 \text{div } \boldsymbol{\eta})] \right\} dl = 0. \quad (2.8)$$

Оба эти уравнения могут быть получены из вариационного принципа  $\delta \int L dt = 0$ , с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \int \left\{ \rho_0 \left( \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} \right)^2 + \boldsymbol{\eta}_\perp \nabla (\boldsymbol{\eta}_\perp \nabla p_0) - \gamma p_0 (\operatorname{div} \boldsymbol{\eta})^2 \right\} d\mathbf{r}, \quad (2.9)$$

где  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\parallel + \boldsymbol{\eta}_\perp = \mathbf{h}\eta_\parallel + \frac{[\mathbf{h}\nabla\varphi]}{H}$ , а варьирование производится по  $\eta_\parallel$  и  $\varphi$ . Для уравнения (2.7) это утверждение совершенно очевидно, а чтобы убедиться в его справедливости для (2.8), мы преобразуем второе слагаемое в (2.9) к более симметричной форме. Производя интегрирование по частям и учитывая, что  $\boldsymbol{\eta}_\perp \nabla p_0$  не зависит от  $\xi_3$ , получаем

$$\frac{1}{2} \int \boldsymbol{\eta}_\perp \nabla (\boldsymbol{\eta}_\perp \nabla p_0) d\mathbf{r} = \int \boldsymbol{\eta}_\perp \nabla p_0 \left\{ \int e_{ijk} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \frac{g_{k3}}{\sqrt{g_{33}} H} d\xi_3 \right\} d\xi_1 d\xi_2.$$

Здесь выражение в фигурных скобках может быть преобразовано аналогично тому, как (2.2) было преобразовано в (2.6).

Учитывая, что  $e_{3ij} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_j} = \frac{H\sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}} (\boldsymbol{\eta}_\perp \nabla U)$ , мы получим окончательно следующее выражение для потенциальной энергии плазмы:

$$V = -\frac{1}{2} \int \frac{H\sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}} (\boldsymbol{\eta}_\perp \nabla p_0) (\boldsymbol{\eta}_\perp \nabla U) d\xi_1 d\xi_2 + \frac{1}{2} \int \gamma p_0 (\operatorname{div} \boldsymbol{\eta})^2 d\mathbf{r}. \quad (2.10)$$

Так как согласно (2.6)  $\nabla p_0 \parallel \nabla U$ , то оба сомножителя входят в (2.10) совершенно симметрично, поэтому при варьировании второго слагаемого в (2.9) можно проварьировать только первый множитель и удвоить результат. Учитывая это обстоятельство, нетрудно убедиться в том, что варьирование (2.9) по  $\varphi$  действительно приводит к уравнению (2.8).

Для устойчивости плазмы необходимо и достаточно, чтобы потенциальная энергия (2.10) была положительно определенной, т. е. чтобы ее минимальное значение было положительным. Минимизирование (2.10) по  $\eta_\parallel$  приводит к соотношению  $(\mathbf{h}\nabla) \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = 0$ , т. е.  $\operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = f(\xi_1, \xi_2)$  или  $\mathbf{h}\nabla \left( \frac{\eta_\parallel}{H} \right) + \frac{1}{H} \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_\perp = \frac{1}{H} f(\xi_1, \xi_2)$ . Если проинтегрировать это соотношение вдоль замкнутой силовой линии, то первое слагаемое исчезнет, и мы получим

$$f(\xi_1, \xi_2)U = 2 \int \frac{[\mathbf{h}\nabla\varphi]\nabla H}{H^3} dl.$$

Совершая опять преобразование, аналогичное преобразованию (2.1) в (2.6), получаем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = f(\xi_1, \xi_2) = \frac{\sqrt{g_{33}}}{UH\sqrt{g}} e_{3ij} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_j} = \frac{1}{U} (\boldsymbol{\eta}_\perp \nabla U). \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в (2.10) и учитывая, что  $d\mathbf{r} = \sqrt{g} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \frac{\sqrt{g} H}{\sqrt{g_{33}}} \times d\xi_1 d\xi_2 \frac{dl}{H}$ , получаем

$$V_{\min} = -\frac{1}{2} \int \frac{H\sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}} \left\{ (\boldsymbol{\eta}_\perp \nabla p_0) (\boldsymbol{\eta}_\perp \nabla U) + \frac{\gamma p_0}{U} (\boldsymbol{\eta}_\perp \nabla U)^2 \right\} d\xi_1 d\xi_2. \quad (2.12)$$

Отсюда видно, что для устойчивости необходимо и достаточно

$$\nabla p_0 \nabla U + \frac{\gamma p_0}{U} (\nabla U)^2 < 0. \quad (2.13)$$

Если плазма имеет резкую границу, то на ней первое слагаемое в (2.13) много больше второго и, следовательно, условие устойчивости границы имеет вид:  $(\nabla p_0 \nabla U) < 0$ . Это условие было получено ранее Розенблютом и Лонгмайром [1] из энергетических соображений.

Так как согласно (2.6) поверхности  $p_0 = \text{const}$  совпадают с поверхностями  $U = \text{const}$ , то с учетом того, что функция  $U$  всегда отрицательна, условие (2.13) можно записать в виде

$$-\frac{d \ln p_0}{d \ln |U|} < \gamma. \quad (2.14)$$

Условие (2.14) сходно с условием конвекционной устойчивости неравномерно нагретого газа в поле тяжести: как в газе уменьшение температуры с высотой не может быть больше некоторого предела, так и в плазме давление не может согласно (2.14) возрастать слишком быстро при увеличении  $U$ .

Подчеркнем еще раз, что проведенное рассмотрение справедливо только для полей с замкнутыми силовыми линиями: в противном случае необходимо учесть следующее приближение в разложении по  $\epsilon$ .

За обсуждение работы приношу благодарность академику М.А. Леонтовичу.

### Список литературы

1. *Rosenbluth M., Longmire C.* // Ann. Phys. 1957. V 1. P. 120.

## МАГНИТНЫЕ ЛОВУШКИ ДЛЯ ПЛАЗМЫ \*)

В работе производится гидродинамическое рассмотрение магнитных ловушек. Показано, что системы с «охраняющими проводниками» являются вместе с тем магнитными ловушками, утечка из которых происходит в основном за счет подвесок. Установлено наличие устойчивости в «ловушках с гофрированным полем».

### 1. Введение

Под магнитной ловушкой принято понимать такое магнитное поле, при движении в котором отдельная заряженная частица очень долгое время продолжает оставаться внутри некоторой ограниченной части пространства. Представляется естественным, что поле, способное удерживать плазму в ограниченном объеме, должно быть «ловушечного» типа, т. е. оно должно удерживать и отдельные частицы. Однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно: поле, удерживающее отдельные частицы, совсем не обязано удерживать квазинейтральную плазму, так как в плазме возникают собственные электрические поля, которые могут существенно изменить характер движения отдельных частиц. Напрашивается вопрос: какие же поля могут удерживать плазму? Рассмотрению именно таких полей, которые можно назвать магнитными ловушками для плазмы, и посвящена настоящая работа.

Мы будем предполагать, что движение плазмы описывается гидродинамическими уравнениями. Для этого необходимо, строго говоря, чтобы средний свободный пробег ионов плазмы был много меньше характерных размеров системы. Если длина свободного пробега одного порядка или даже больше размеров системы, то следует пользоваться кинетическими уравнениями. Однако и в этом случае гидродинамическое рассмотрение представляет вполне определенный интерес, поскольку оно, будучи гораздо проще кинетического, позволяет получить некоторые качественно правильные результаты.

Итак, задача ставится следующим образом: необходимо определить каково должно быть магнитное поле, чтобы квазинейтральная плазма, расположенная в некоторой ограниченной области пространства, находилась в устойчивом равновесии. При этом следует считать, что давление плазмы много меньше давления магнитного поля, так как плазма должна играть роль некоторого «пробного тела», мало искажающего изучаемое нами поле.

Гидродинамическая задача о равновесии и устойчивости идеально проводящей плазмы, давление которой много меньше давления магнитного поля, была рассмотрена в работе Розенблюта и Лонгмайра [1] и более строгим методом — в работе автора [2]. Из этих работ следует, что такая плазма

---

\*) Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 353–363.

ведет себя, до некоторой степени, подобно неоднородному газу в поле тяжести, причем роль потенциальной энергии сил тяжести играет функция  $U = -\oint \frac{dl}{H}$ , где интеграл берется вдоль силовой линии, а  $dl$  — элемент длины этой линии. Подобно тому как неоднородный или неравномерно нагретый газ в поле сил тяжести стремится, вообще говоря, к состоянию, в котором более тяжелые его участки располагаются там, где потенциальная энергия минимальна, так и плазма стремится, грубо говоря, к такому устойчивому расположению, когда ее давление постоянно на эквипотенциальных поверхностях  $U = \text{const}$  и убывает при возрастании  $U$ .

Физический смысл этого совершенно очевиден. Действительно, пусть в магнитное поле внесено некоторое количество плазмы. Так как магнитное поле не оказывает воздействия на плазму вдоль своего направления, то плазма быстро, с тепловой скоростью, расширится вдоль силовых линий, заполнив некоторую силовую трубку. Если давление плазмы мало, то магнитное поле внутри трубки при этом почти не изменится. Если проводимость плазмы бесконечно велика, то поле «вморожено» в плазму и она должна двигаться вместе со своим полем. При этом трубка с плазмой не может двигаться произвольным образом: всякое сильное искривление трубки связано с большим увеличением магнитной энергии и поэтому недопустимо. Допустимым является лишь такое перемещение, когда поле трубки «замещает» вытесняемое ею поле. Таким образом, на движение плазмы оказывается наложенной связь: трубка с плазмой должна «пробираться» между силовыми линиями так, чтобы магнитное поле при этом почти не искажалось.

Так как плазма стремится расшириться, то трубка с плазмой будет двигаться в сторону увеличения своего объема. Объем трубки есть  $V = \int s dl$ , где  $s$  — поперечное сечение трубки, а интеграл берется вдоль силовой линии. Но  $sH = \varphi$  есть магнитный поток этой трубки, который остается постоянным как вдоль трубки, так и во времени в силу вмороженности поля. Таким образом,  $V = \varphi \int \frac{dl}{H}$  и, следовательно, трубка с плазмой будет двигаться в сторону уменьшения «потенциальной энергии»  $U = -\int \frac{dl}{H}$  до тех пор, пока не достигнет области, где  $U$  минимальна, или не встретит область, заполненную плазмой. Если давление этой плазмы меньше, чем давление плазмы в движущейся трубке, то трубка вытеснит ее и будет «опускаться» дальше до тех пор, пока не достигнет области, где давление в трубке станет равным давлению плазмы. И вообще, при любом начальном распределении плазмы, она будет «переливаться» в сторону уменьшения  $U$ , пока не заполнит область, где  $U$  минимальна.

Что касается этого конечного устойчивого состояния, то оно совсем не обязательно должно быть таким, чтобы давление плазмы возрастало при убывании  $U$ .

Подобно тому как в земной атмосфере возможно устойчивое равновесие, когда температура воздуха падает с высотой, но градиент температуры при этом не превышает некоторого предельного значения  $\sim 10^{-2}$  град/м, так и в плазме устойчивость не теряется, если ее давление убывает при убывании  $U$  не очень быстро.

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Пусть плазма находится в равновесии, а ее давление  $p(\mathbf{r})$  возрастает в направлении возрастания  $U$ . Предположим, что некоторая трубка с плазмой, проходящая через точку  $\mathbf{r}$ , смещается на некоторую бесконечно малую величину, «раздвигая» другие трубки. Так как давление и потенциал  $U$  вдоль трубок постоянны, то нам достаточно рассмотреть, что происходит в окрестности точки  $\mathbf{r}$ . Обозначим смещение трубки в окрестности точки  $\mathbf{r}$  через  $\delta\mathbf{r}$ . Тогда для относительного изменения объема трубки при таком смещении получаем  $\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta U}{U} = \frac{\delta\mathbf{r}\nabla U}{U}$ . Если процесс происходит адиабатически, то давление плазмы внутри трубки изменится на величину  $\delta p = -\gamma p \frac{\delta V}{V} = -\gamma p \frac{\delta\mathbf{r}\nabla U}{U}$ . (Если теплопроводность большая, то нужно положить  $\gamma = 1$ ). Давление же в трубках, окружающих рассматриваемую нами, равно, очевидно,  $p(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{r}\nabla p$ . Если смещение происходит в сторону падения потенциала  $U$ , т. е.  $\delta U < 0$ ,  $\frac{\delta U}{U} > 0$ , а давление в смещенной трубке оказывается больше, чем давление окружающей плазмы, то трубка будет стремиться «погружаться» дальше в сторону падения  $U$ . Если же давление в трубке окажется меньше давления плазмы, т. е.  $-\gamma p \frac{\delta\mathbf{r}\nabla U}{U} < \delta\mathbf{r}\nabla p$ , то смещенная трубка будет вытесняться обратно и плазма будет устойчива. Наоборот, при смещении в сторону возрастания  $U$  устойчивость имеет место, если давление в трубке меньше давления окружающей плазмы, т. е. знак написанного выше неравенства должен измениться. Оба эти условия можно, очевидно, записать в виде одного  $(\delta\mathbf{r}\nabla p) \frac{\delta U}{U} > -\gamma p \frac{\delta\mathbf{r}\nabla U}{U} \frac{\delta U}{U}$ . Учитывая, что  $\frac{\delta U}{U} = \frac{\delta\mathbf{r}\nabla U}{U}$  и что в равновесии  $\nabla U \parallel \nabla p$ , мы запишем это условие устойчивости в виде  $\frac{\nabla p}{p} \frac{\nabla U}{U} > -\gamma \left(\frac{\nabla U}{U}\right)^2$  или

$$\nabla p \nabla U < \gamma p |U| \left(\frac{\nabla U}{U}\right)^2 \quad (1)$$

(следует учесть, что  $U$  всегда отрицательно).

Отсюда следует, что равновесие плазмы является устойчивым также и в том случае, когда давление плазмы возрастает при увеличении  $U$ , т. е.  $\nabla p \nabla u > 0$ , но при этом градиент давления не должен превосходить некоторого предельного значения, определяемого неравенством (1). Условие (1) выведено более строгим путем в работе [2], где установлено, что оно справедливо, вообще говоря, только для полей с замкнутыми силовыми линиями (возможно на бесконечности) и неприменимо, например, к винтовому полю. Если плазма имеет резкую границу, то на этой границе  $\nabla p \rightarrow \infty$  и условие (1) принимает вид  $\nabla p \nabla U < 0$ , т. е. плазма должна находиться по ту сторону от границы, где  $U$  меньше. Это условие было получено ранее в работе [1].

Таким образом, вопрос об удержании плазмы заданным магнитным полем сводится к исследованию потенциала  $U$  для этого поля. Рассмотрим с этой точки зрения различные частные случаи.

## 2. Поле прямого тока

Поле прямого проводника с током  $J$  равно, как известно,  $H = \frac{2J}{cr}$ , отсюда  $U = -\frac{2\pi r}{H} = -\frac{\pi c}{J} r^2$ . Как мы видим, потенциал  $U$  монотонно убывает с увеличением  $r$ . Это означает, что любая трубка с плазмой в таком поле будет вытесняться наружу в сторону увеличения  $r$ . Устойчивое равновесие возможно лишь в том случае, когда плазма удерживается от разлета какими-то стенками. Но это не означает, что давление на стенках должно быть велико. Согласно критерию устойчивости (1), плазма устойчива и в том случае, когда ее давление падает по направлению к стенкам, но при этом должно соблюдаться условие  $-\frac{1}{p} \frac{dp}{dr} < \gamma \frac{1}{U} \frac{dU}{dr}$ , т. е.  $-\frac{1}{p} \frac{dp}{dr} < \frac{2\gamma}{r}$ . Даже в случае хорошей теплопроводности, когда  $\gamma = 1$ , давление плазмы может падать как  $r^{-2}$ , т. е. довольно быстро. Таким образом, уже небольшого взаимодействия со стенками может оказаться достаточным для того, чтобы плазма была устойчивой\*).

Что касается случая, когда давление падает в направлении к проводнику с током, то такое расположение всегда устойчиво. Это означает, между прочим, что если в созданную каким-то образом плазму ввести проводник с током, то плазма отодвигается от этого проводника и никакой дополнительной неустойчивости при этом не возникает.

## 3. Ловушки с «охраняющими проводниками»

В работе С.И. Брагинского и Б.Б. Кадомцева [3] для стабилизации плазмы было предложено использовать «охраняющие проводники», которые должны как бы отгораживать плазму от слишком «экспансивного» магнитного поля. Среди всех возможных систем с охраняющими проводниками выделяются две простейшие — с прямыми стержнями и с кольцами, которые, естественно, следует проанализировать в первую очередь. В работе [3] подробно рассмотрен вопрос о поведении в таких системах полностью скинированной плазмы без замороженного в нее поля. Здесь мы подойдем к системам с проводниками с противоположной стороны, а именно — рассмотрим, как будет вести себя в них плазма с низким давлением, т. е. с большим замороженным полем. Другими словами, мы будем рассматривать эти системы как магнитные ловушки.

Начнем с рассмотрения системы с кольцами. Магнитное поле этой системы представлено качественно на рис. 1.

Мы предположим, что на оси  $z$  направление поля совпадает с направлением внешнего магнитного поля (что, впрочем, не существенно). Такая ситуация возникает при условии, что кольца короткозамкнутые и перед включением внешнего поля внутри колец поля не было: тогда полный поток внутри колец должен быть равен нулю. При таком поле внутри колец есть точки, например  $A$ , на которых поле обращается в нуль. Силовые линии, проходящие через эти точки, штриховые. Общей картины рис. 1

\*) Если проводник с током окружить стержнями с током, текущим в том же направлении, то плазма может быть устойчивой и в том случае, когда давление у стенок равно нулю (ср. § 3 и 4).

уже вполне достаточно для того, чтобы установить качественное поведение потенциала  $U$ . Так как система рис. 1 периодическая, то под  $U$  можно понимать интеграл по одному периоду  $-a/2 < z < a/2$ , где  $a$  — расстояние между соседними кольцами. Потенциал  $U$  есть функция силовой линии, поэтому его удобно рассматривать на плоскости  $z = 0$ , пересекающей все силовые линии. Качественно  $U$  имеет вид, представленный на рис. 2.

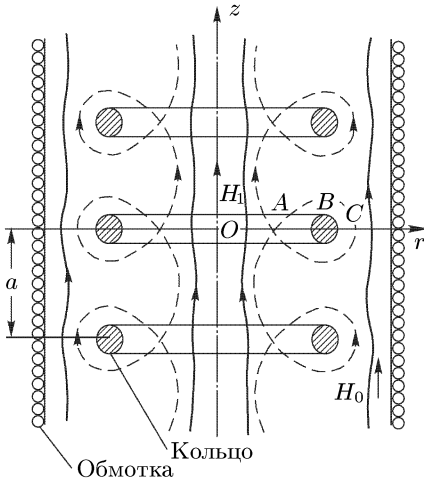


Рис. 1

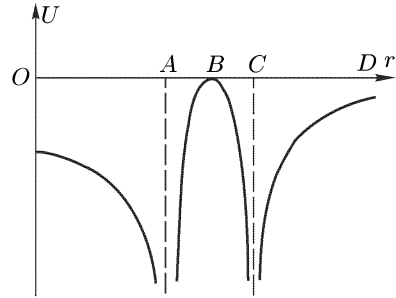


Рис. 2

При  $r = 0$  потенциал  $U = -a/H_1$ , где  $H_1$  — некоторое среднее значение поля на оси  $z$ , в точке  $D$   $U \approx -a/H_0$ , а в точках  $A$  и  $B$ , лежащих на штриховой силовой линии, потенциал  $U$  логарифмически (поскольку в точке  $A$  поле линейно обращается в нуль) стремится к  $-\infty$ . Как мы видим, потенциал  $U$  имеет «яму» на силовой линии, проходящей через точку  $A$ , где поле обращается в нуль. Не ограничивая себя условием отсутствия больших градиентов давления плазмы  $p(r)$ , мы примем здесь в качестве критерия устойчивости условие  $\nabla p \nabla U < 0$ . Тогда из рис. 2 следует, что любое такое расположение плазмы, когда ее давление убывает в направлении от штриховой силовой линии, наверняка является устойчивым. Более того, если в пространство между кольцами и внешней обмоткой будет внесена каким-то образом плазма, то она сама начнет двигаться в сторону колец, т. е. в сторону падения потенциала  $U$ , до тех пор, пока не «уляжется» на штриховую силовую линию. Следующая порция плазмы либо «ляжет» поверх первой, либо вытеснит ее на соседние линии в зависимости от того, давление которой из этих порций больше. (Мы предполагаем, что в плазме есть некоторая диссипация, которая «успокаивает» ее колебание около минимума потенциала  $U$ ). Таким образом, уже при простой инжекции плазмы снаружи система сама будет стремиться к устойчивому равновесию.

Итак, система с кольцами является магнитной ловушкой для плазмы. Точно так же можно показать, что ловушкой является и система с прямыми стержнями. Действительно, поле и в этом случае (рис. 3) имеет силовые линии, проходящие через точку  $O$ , где  $H = 0$ , поэтому потенциал  $U$  обращается в  $-\infty$  на этих линиях (рис. 4).

Как мы видим из рис. 4, плазма устойчива, если она не выходит за пределы силовой линии, на которой потенциал  $U$  имеет максимум (точка  $C$ ).



Будучи устойчивыми, системы рисунков 1 и 3 могут быть свернуты в тор. При этом потенциал  $U$ , конечно, немного изменится, в системе рис. 1, например, он возрастет на внутренней границе тора и уменьшится на его внешней границе. Однако общий характер потенциала, в частности, наличие «ям», останется прежним и, следовательно, сохранятся устойчивые состояния.

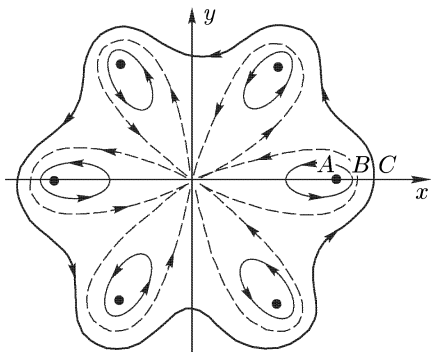


Рис. 3

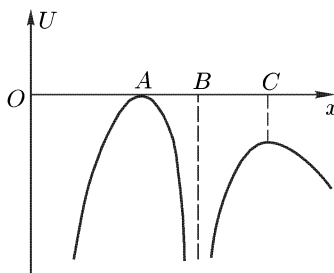


Рис. 4

Итак, системы с «охраняющими проводниками» являются устойчивыми в двух предельных случаях — как для плазмы без вмороженного поля, так и для плазмы, давление которой много меньше давления магнитного поля. Это дает основание думать, что данные системы обладают широким классом устойчивых равновесных состояний и в том случае, когда давление плазмы приближается к магнитному. В частности, значительно уменьшаются опасения относительно появления неустойчивости в системе с «охраняющими проводниками» при проникновении поля в плазму. Напомним, в чем они заключались. В работе [3] было показано, что полностью скинированная плазма располагается около стержней таким образом, что на ее границе появляются особые точки ( $A$  и  $C$  на рис. 5).

При таком расположении плазмы ее граница устойчива, так как магнитное поле во всех ее точках возрастает в направлении от поверхности плазмы, а этого, как показано в [3], вполне достаточно для устойчивости. Но как только поле начнет проникать в плазму за счет конечной проводимости, плазма выйдет на силовую линию  $ABC$  и около каждого стержня образуется плазменная «перемычка» или, вернее, «чехол» ( $AC$  на рис. 6). Возникает опасение, не появится ли неустойчивость в этих чехлах. Наличие вышеприведенных устойчивых решений для плазмы с низким давлением, имеющих точно такие же чехлы, хотя и не является строгим доказательством, но служит серьезным аргументом в пользу того, что чехлы могут быть устойчивыми и в случае,

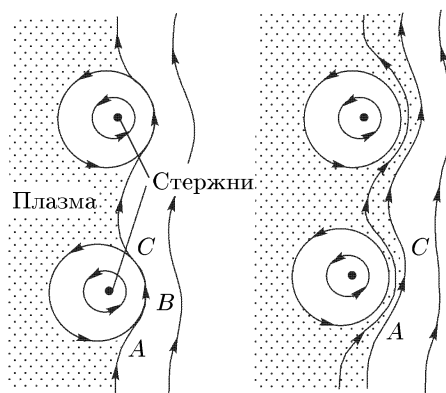


Рис. 5

Рис. 6

когда давление плазмы приближается к магнитному.

Но даже и при отсутствии неустойчивости само наличие этих чехлов является серьезным недостатком рассматриваемых систем. Действительно, как кольца, так и стержни в тороидальной системе должны быть каким-то образом подвешены к стенкам камеры, причем подвески должны обязательно пройти сквозь плазменные чехлы, которые окружают стержни. Следовательно, в системе необходимо возникнут потери на подвесках. Оценим величину этих потерь. Пусть система содержит  $N$  подвесок, диаметр которых равен  $d$ . Предположим, что толщина чехла есть  $b$  и что плотность плазмы в чехле равна плотности внутри системы и равна  $n$ . Тогда число частиц, гибнущих в единицу времени на подвесках, равно  $Nnvbd$ , где  $v$  — тепловая скорость частиц. Отсюда время жизни системы с объемом  $V$   $t = \frac{nV}{Nnvbd} = \frac{V}{Nbdv}$ . Полагая  $\frac{V}{N} \sim 10^6$  см<sup>3</sup>,  $v \sim 10^8$  см/с,  $bd \sim 1$  см<sup>2</sup>, получаем  $t \sim 10^{-2}$  с, что хотя и меньше времени жизни системы относительно «размораживания» поля (см. [3]), но не слишком мало.

Гораздо более опасным является засорение плазмы газом испаряющихся подвесок за счет бомбардировки их горячими ионами. Испарение подвесок можно значительно уменьшить с помощью пропускания по ним тока настолько большого, чтобы магнитные силовые линии около подвесок были замкнутыми. При этом ионы смогут попасть на подвески только за счет диффузии, так что плотность выделения энергии на подвесках будет порядка  $\frac{nT}{d} \frac{\rho^2}{\tau}$ , где  $\rho$  — средний ларморовский радиус ионов,  $\tau$  — среднее время ион-ионных соударений. Если  $d \sim \rho$ , то выделение энергии уменьшается в  $\omega\tau = \frac{eH}{Mc} \tau$  раз по сравнению с выделением энергии на подвесках без тока. Однако утечка частиц из системы при этом вряд ли уменьшится. Вдоль каждой подвески образуется «канал» с очень малым магнитным полем, и потенциал  $U$  будет иметь «яму» на силовых линиях, проходящих через этот канал. По этой «яме» плазма будет уходить из системы, и так как уход происходит, в конечном счете, за счет перепада давления в «канале», то утечка плазмы останется прежней, если ширина «канала» будет порядка ширины подвески  $d$ .

#### 4. Ловушки с «гофрированным полем»

В работе автора [4] было показано, что «гофрирование» магнитного поля, т. е. наложение на однородное поле небольшого периодического изменения, приводит к стабилизации движения отдельных частиц и, следовательно, к возможности создания магнитной ловушки. Теперь мы можем проанализировать гидродинамическое рассмотрение этих ловушек. Нам опять нужно найти потенциал  $U$ . Впрочем, качественный ход потенциала  $U$  нам уже известен: поле вблизи оси  $z$  в системе с кольцами (см. рис. 1) как раз и является гофрированным полем и для него потенциал  $U$ , как видно из рис. 2, монотонно убывает при удалении от оси. Это означает, что плазма с резкой границей, расположенная вблизи оси  $z$ , неустойчива: малые возмущения формы граничной поверхности будут нарастать со временем. Этот результат содержится и в работе Розенблюта и Лонгмайра [1]. Однако он еще не означает, что в системе с гофрированным полем невозможны

устойчивые состояния. Согласно условию (1) устойчивость не нарушается, если давление не очень быстро падает с  $U$ . В области от оси  $z$  до штриховой силовой линии  $\frac{\nabla_r U}{U} > 0$ , и поэтому условие (1) принимает вид

$$\frac{\nabla_r p}{p} > -\gamma \frac{\nabla_r U}{U} = -\gamma \frac{\nabla_r |U|}{|U|}, \text{ т. е. плазма устойчива, если ее давление убывает с } r \text{ не быстрее, чем } \text{const } |U|^{-\gamma}.$$

Так как  $U$  обращается в бесконечность на штриховой силовой линии, то мы приходим к выводу, что существует широкий класс устойчивых расположений плазмы с нулевым давлением на штриховой линии. При этом обмотка для создания магнитного поля (включая кольца) располагается снаружи от вакуумной камеры.

Разумеется, совершенно не обязательно, чтобы поле было в точности таким, как на рис. 1. Необходимо лишь, чтобы все гофрированное поле, включая штриховые силовые линии, проходящие через точки с  $H = 0$ , находилось бы внутри вакуумной камеры.

Как показано в [4], каждая отдельная частица в таком гофрированном поле совершает усиленный дрейф около оси системы. Поэтому в этой системе будет отсутствовать «перемешивание» температуры в направлении от оси к стенкам камеры, т. е. сохраняется нормальная замагниченная теплопроводность. (В этом отношении рассуждения работы [4] сохраняются).

Таким образом, в системе с гофрированным полем существуют устойчивые состояния плазмы с малой замагниченной теплопроводностью. Однако эти состояния отвечают, фактически, плазме, соприкасающейся со стенками, так как давление на штриховой линии все время равно нулю.

При этом потери энергии из системы не могут быть снижены до такой степени, как в конфигурациях, оторванных от стенок. Это означает, по-видимому, что ловушки с гофрированным полем должны практически выполняться как системы с охраняющими кольцами.

За обсуждение работы приношу благодарность академику М.А. Леонтовичу.

### Список литературы

1. Rosenbluth M., Longmire C. // Ann. Phys. 1957. V. 1. P. 120.
2. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 38.
3. Брагинский С.И., Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. III. С. 300.
4. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 7.

# О ДИНАМИКЕ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ \*)

В работе показано, что медленные по сравнению с циклотронной частотой ионов движения плазмы могут быть описаны совокупностью уравнений гидродинамики для движения поперек магнитного поля и кинетических уравнений для продольного движения. Эти уравнения могут быть несколько упрощены в случае плазмы, давление которой много меньше магнитного. Рассмотрен вопрос об устойчивости плазмы низкого давления в гофрированном поле.

## 1. Уравнения движения плазмы в сильном магнитном поле

Если плазма находится в сильном магнитном поле, то даже в отсутствие соударений распределение электронов и ионов по скоростям обладает осевой симметрией относительно направления магнитного поля. Это обстоятельство, как было показано Чью, Гольдбергером и Лоу [1], приводит к тому, что при наличии определенной симметрии, вследствие которой отсутствуют тепловые потоки вдоль силовых линий, медленные движения плазмы могут быть описаны уравнениями гидродинамики с неизотропным тензором давления.

Если симметрия подобного рода отсутствует, то такое приближение неправильно. Как будет показано ниже, движение плазмы в этом случае описывается системой уравнений гидродинамики для движения поперек поля и кинетических уравнений для продольного движения.

Точные уравнения движения плазмы представляют собой систему уравнений Максвелла и кинетических уравнений с самосогласованными полями для ионов

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f + \frac{e}{M} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = S \quad (1.1)$$

(где  $S$  — член столкновений) и аналогичного уравнения для электронов.

В разреженной высокотемпературной плазме средняя свободная длина пробега частиц может быть много больше характерного размера  $L$ , и в этом случае в (1.1) можно пренебречь членом столкновений.

В сильном магнитном поле средний ларморовский радиус ионов  $\rho_i$  много меньше  $L$  и третье слагаемое в (1.1) много больше первых двух. Действительно, если  $\omega$  — характерная частота, которую мы будем считать порядка  $v_T/L$ , где  $v_T$  — тепловая скорость ионов, то первые два члена в (1.1) меньше третьего в  $\frac{\omega}{\Omega_H} \sim \frac{\rho_i}{L}$  раз, где  $\Omega_H = \frac{eH}{Mc}$  — циклотронная частота ионов.

---

\*) Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 370–379.

Фактически только перпендикулярная компонента электрического поля  $\mathbf{E}_\perp$  является большой величиной; слагаемое с продольной компонентой  $\mathbf{E}_\parallel$  имеет тот же порядок величины, что и первые два члена в (1.1). Пренебрегая малыми величинами, имеем

$$\left\{ \mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

откуда следует, что  $f(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v} - \mathbf{v}_d)$ , где  $\mathbf{v}_d = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2}$   $c$  есть скорость электрического дрейфа, а функция  $F$  обладает осевой симметрией относительно направления магнитного поля. Таким образом, в нулевом приближении электроны и ионы дрейфуют с одинаковыми скоростями  $\mathbf{v}_d$  поперек магнитного поля.

Это обстоятельство можно выразить и другим образом. Если ввести поперечные макроскопические скорости для ионов  $\mathbf{v}_0$  и электронов  $\mathbf{v}_{0e}$

$$n_i \mathbf{v}_0 = \int \mathbf{v}_\perp f_i d\mathbf{v}, \quad n_e \mathbf{v}_{0e} = \int \mathbf{v}_\perp f_e d\mathbf{v}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{H}(\mathbf{H}\mathbf{v})}{H^2}$ ;  $n_i, n_e$  — плотности ионов и электронов соответственно, то мы можем сказать, что в нулевом приближении  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_{0e}$  совпадают, и  $\mathbf{E}_\perp = -\frac{1}{c} [\mathbf{v}_0\mathbf{H}]$ . Поэтому первые два уравнения Максвелла можно приближенно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}_0\mathbf{H}], \quad (1.3)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{4\pi e}{c} (n_i \mathbf{v}_0 - n_e \mathbf{v}_{0e}), \quad (1.4)$$

где во втором уравнении мы пренебрегли током смещения. Будем считать, что плотность плазмы достаточно велика, так что ленгмюровская частота

$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m}}$  больше циклотронной частоты электронов  $\omega_H = \frac{eH}{mc}$ . При этом условии плазму можно считать квазинейтральной

$$n_e = n_i = n, \quad (1.5)$$

и это условие заменяет нам третье уравнение Максвелла  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e)$ .

Уравнения (1.3), (1.4) совместно с уравнением

$$\text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (1.6)$$

служат для определения самосогласованных полей.

Найдем теперь следующее приближение в кинетических уравнениях. При этом мы рассмотрим только уравнение для ионов — преобразование уравнения для электронов производится совершенно аналогично.

Уравнение (1.1) без члена столкновений запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f + \frac{e}{M} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0\mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{e}{Mc} [\mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \mathbf{H}] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.7)$$

Левая часть этого уравнения является малой по сравнению с правой, и поэтому решение уравнения (1.7) можно искать в виде разложения по обратным степеням оператора, стоящего в правой части.

В уравнении (1.7) удобно перейти к новым переменным  $u, w, \alpha$ , где  $u = \mathbf{h}\mathbf{v}$  есть продольная компонента скорости,  $w$  — поперечная компонента относительной скорости  $w = \sqrt{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 - (\mathbf{h}\mathbf{v})^2}$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ ,  $\alpha$  — фаза. Если ввести локальный триедр  $\mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{n}$  — нормаль к силовой линии,  $\mathbf{b}$  — бинормаль, то скорость частицы можно представить в виде  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + u\mathbf{h} + w \cos \alpha \mathbf{n} + w \sin \alpha \mathbf{b}$ . В переменных  $u, w, \alpha$  правая часть в уравнении (1.7) записывается в виде  $\Omega_H \frac{\partial f}{\partial \alpha}$  и, следовательно, в нулевом приближении  $f = f_0(\mathbf{r}, t, u, w)$ . В следующем приближении полагаем  $f = f_0 + f_1$ , пренебрегая  $f_1$  в левой части (1.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f_0 + \left\{ \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{h} + \frac{e}{M} \mathbf{E}\mathbf{h} \right\} \frac{\partial f_0}{\partial u} + \\ + \left\{ -\frac{u}{w} \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \frac{u}{w} \mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{h} - \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{w} \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} - \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{w} (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}_0 + \right. \\ \left. + \frac{e}{M} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{w} \left( \mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}] \right) \right\} \frac{\partial f_0}{\partial w} = \Omega_H \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}. \quad (1.8) \end{aligned}$$

Чтобы это уравнение было разрешимо относительно  $f_1$ , должно, как известно, выполняться условие ортогональности левой части (1.8) к решению уравнения, сопряженного с  $\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 0$ . Одно условие разрешимости получается в результате усреднения (1.8) по  $\alpha$ . С учетом условия  $\mathbf{h}\mathbf{v}_0 = 0$  и следующего из уравнений (1.3), (1.6) соотношения

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla)\mathbf{h} = (\mathbf{h}\nabla)_\perp \mathbf{v}_0 = (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{v}_0 - \mathbf{h}\{ \mathbf{h}(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{v}_0 \}, \quad (1.9)$$

усреднение по  $\alpha$  приводит к уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla)f + u\mathbf{h}\nabla f + \left\{ \frac{w^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{h} + \frac{e}{M} \mathbf{E}\mathbf{h} + u\mathbf{v}_0(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h} + \right. \\ \left. + (\mathbf{h}\nabla) \frac{v_0^2}{2} \right\} \frac{\partial f}{\partial u} - \left\{ \frac{uw}{2} \operatorname{div} \mathbf{h} + \frac{w}{2} \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \frac{w}{2} \mathbf{v}_0(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h} \right\} \frac{\partial f}{\partial w} = 0, \quad (1.10) \end{aligned}$$

где мы опустили индекс «0» у функции распределения. Второе условие ортогональности является следствием нашего определения (1.2) скорости поперечного движения  $\mathbf{v}_0$ , означающего, что  $\int \mathbf{w}f_1 d\mathbf{v} = 0$ . Это условие получается путем умножения (1.8) на  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 - \mathbf{h}(\mathbf{h}\mathbf{v})$  и интегрирования по  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} Mn \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} \right)_\perp + (\mathbf{v}_0 \nabla)_\perp \mathbf{v}_0 + u_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + u_0 (\mathbf{v}_0 \nabla)\mathbf{h} + u_0 (\mathbf{h}\nabla)_\perp \mathbf{v}_0 \right\} + \\ + \nabla_\perp p_\perp^i + (p_\parallel^i - p_\perp^i)(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h} - en \left\{ \mathbf{E}_\perp + \left[ \frac{\mathbf{v}_0}{c} \mathbf{H} \right] \right\} = 0, \quad (1.11) \end{aligned}$$

где  $u_0 = \frac{1}{n} \int f u d\mathbf{v}$  — продольная компонента макроскопической скорости,  $p_\perp^i$  и  $p_\parallel^i$  — соответственно поперечное и продольное давление ионов:

$$p_\perp^i = \int \frac{Mw^2}{2} f d\mathbf{v}, \quad p_\parallel^i = \int Mu^2 f d\mathbf{v}. \quad (1.12)$$

Аналогичные уравнения имеют место и для электронов. Если сложить уравнение (1.11) с аналогичным уравнением для электронов, то члены с электрическим полем сокращаются, члены с магнитным полем дают силу  $\frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{H}]$ , давления складываются. Пренебрегая инерцией электронов и учитывая (9), мы запишем окончательно уравнение для поперечного движения в виде

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \mathbf{h}(\mathbf{h} \nabla) \frac{v_0^2}{2} + 2(\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + 2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}_0 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} \right\} + \nabla p_{\perp} - \mathbf{h}(\mathbf{h} \nabla) p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} - \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] = 0, \quad (1.13)$$

где  $\rho = Mn$ ,  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{h}u_0$ ,  $p_{\perp} = p_{\perp}^i + p_{\perp}^e$ ,  $p_{\parallel} = p_{\parallel}^i + p_{\parallel}^e$ .

Уравнение (1.13), совместно с уравнениями для давлений (1.12) и для полей (1.3)–(1.6) и кинетическими уравнениями для продольного движения ионов (1.10) и электронов, дает полное описание движения плазмы с частотой, значительно меньшей  $\Omega_H$ . Как мы видим, эти уравнения являются первым приближением в разложении точных уравнений по степеням малого параметра  $\frac{\omega}{\Omega_H}$ .

Пользуясь этим регулярным методом, можно получить приближения более высоких порядков. В частности, нетрудно получить второе приближение, в котором учитываются дрейфовые потоки. Кроме того, в приведенных уравнениях можно учесть член столкновений. В уравнении (1.10) он описывал бы процесс установления максвелловского распределения, а в (1.11) привел бы к появлению силы трения между электронами и ионами, т. е. к диффузии плазмы за счет конечной проводимости. Учет членов столкновений во втором приближении приведет к поперечной вязкости и теплопроводности плазмы. Все эти эффекты являются малыми и в ряде задач, как, например, при исследовании устойчивости плазмы, могут не учитываться.

Вопрос о сочетании гидродинамического описания поперек силовых линий и кинетического вдоль линий рассматривался в применении к малым колебаниям в работе [2]. Приведенный здесь метод обладает большей простотой и может быть использован для описания нелинейных течений плазмы.

## 2. Плазма низкого давления

Если давление плазмы много меньше давления магнитного поля, то в приведенных выше уравнениях можно произвести дальнейшее разложение по степеням малого параметра  $\frac{8\pi p}{H^2}$ . Такое разложение производится совершенно аналогично тому, как это делается в обычной магнитной гидродинамике [3].

В случае магнитного поля с замкнутыми силовыми линиями можно ограничиться первым приближением по  $\frac{8\pi p}{H^2}$ . При этом уравнения (1.5), (1.6), а также (1.10) и аналогичное уравнение для электронов остаются

без изменений; уравнение (1.4) принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (2.1)$$

а из уравнения (1.3) следует

$$\mathbf{v}_0 = \frac{[\mathbf{h}\nabla\Phi]}{H}, \quad (2.2)$$

где  $\Phi$  — функция  $\mathbf{r}$ ,  $t$ , удовлетворяющая условию

$$\mathbf{h}\nabla\Phi = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение поперечного движения (1.13) для плазмы низкого давления принимает вид

$$\int \operatorname{div} \left[ \frac{\mathbf{h}}{H}, \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \mathbf{h}(\mathbf{h}\nabla) \frac{v_0^2}{2} + 2(\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + 2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}_0(\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} \right) + \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} \right] \frac{dl}{H} = 0, \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{v}_0$  дается соотношением (2.2), а интегрирование производится вдоль силовой линии.

Полученные уравнения мы применим к рассмотрению устойчивости плазмы низкого давления. Для простоты ограничимся случаем поля с осевой симметрией: это может быть поле адиабатической ловушки с «магнитными пробками» или гофрированное поле.

Условия равновесия получаются из (1.8), (2.4), если положить в них нулю  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{u}_0$ , а также производную по времени. Если равновесное распределение плазмы обладает осевой симметрией, что мы будем предполагать в дальнейшем, то условие, следующее из (2.4), удовлетворяется тривиальным образом. Второе условие имеет вид

$$u\mathbf{h}\nabla f_0 + \left\{ \frac{w^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{h} + \frac{e}{M} \mathbf{E}_0 \mathbf{h} \right\} \frac{\partial f_0}{\partial u} - \frac{uw}{2} \operatorname{div} \mathbf{h} \frac{\partial f_0}{\partial w} = 0, \quad (2.5)$$

где через  $f_0$  обозначена равновесная функция распределения,  $\mathbf{E}_0 = -\nabla\varphi$  — электрическое поле в равновесии. С учетом  $\operatorname{div} \mathbf{h} = -\frac{1}{H}(\mathbf{h}\nabla)H$  из (2.5) получаем, что  $f_0$  вдоль силовой линии является функцией только  $I$ ,  $\varepsilon$ , где  $I = \frac{w^2}{H}$  — адиабатический инвариант,  $\varepsilon = u^2 + w^2 + \frac{2e}{M}\varphi$  — умноженная на  $2/M$  энергия иона.

Предположим теперь, что на равновесное состояние плазмы наложено малое возмущение. Полагаем

$$f = f_0 + f', \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}', \quad p_{\perp} = p_{\perp}^0 + p'_{\perp}, \quad p_{\parallel} = p_{\parallel}^0 + p'_{\parallel},$$

где величины со штрихами представляют собой отклонение от равновесного состояния, подставляем это в (1.10), (2.4) и пренебрегаем малыми высших порядков. При этом мы должны считать малой величиной также и скорость  $\mathbf{v}_0$ . Как следует из (2.1), (2.2),  $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0(\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} = -\frac{\mathbf{v}_0 \nabla H}{H}$ , поэтому линеаризованное уравнение (1.10) в переменных  $I$ ,  $\varepsilon$  можно записать



в виде

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + u(\mathbf{h}\nabla)f' + \mathbf{v}_0\nabla f' + \left\{ \frac{e}{M} \mathbf{E}'\mathbf{h} \cdot 2u - \mathbf{v}_0\nabla(u^2) + 2u^2\mathbf{v}_0(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h} \right\} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = 0, \quad (2.6)$$

где  $u = \sqrt{\varepsilon - IH - \frac{2e}{M}\varphi}$ ,  $f' = f'(\mathbf{r}, t, I, \varepsilon)$ ,  $f_0 = f_0(\mathbf{r}, I, \varepsilon)$ , причем функция  $f_0$  постоянна вдоль силовой линии. Учитывая, что вследствие (2.1)  $(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h} = -\frac{\nabla_{\perp}H}{H}$  и что

$$\operatorname{div} \left[ \frac{\mathbf{h}}{H}, \nabla p_{\perp} - 2p_{\perp} \frac{\nabla H}{H} \right] = 0,$$

запишем линеаризованное уравнение (2.4) в виде

$$\int \operatorname{div} \left[ \frac{\mathbf{h}}{H}, \rho \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (p'_{\parallel} + p'_{\perp}) \frac{\nabla H}{H} \right] \frac{dl}{H} = 0. \quad (2.7)$$

Задача об устойчивости плазмы низкого давления состоит в исследовании решения уравнений (2.6), (2.7).

Гидродинамическое исследование устойчивости плазмы [4], [5] показывает, что квадрат собственной частоты  $\omega^2$  малых колебаний плазмы является действительной величиной, поэтому устойчивость теряется при переходе частоты  $\omega$  через нуль. Можно думать, что и при кинетическом рассмотрении будет иметь место близкий к этому результат. Поэтому для получения критерия устойчивости можно рассмотреть только случай частот, близких к нулю. При этом в уравнении (2.6) второе слагаемое оказывается много больше остальных, поскольку оно описывает процесс установления функции распределения вдоль силовой линии, происходящий с тепловой скоростью. Поэтому уравнение (2.6) можно решать в виде разложения по обратным степеням оператора  $u(\mathbf{h}\nabla)$ . В первом приближении получаем  $\mathbf{h}\nabla f' = 0$ , т. е.  $f'$  является постоянной вдоль силовой линии. Условие ортогональности получается с помощью умножения (2.6) на  $u^{-1}$  и последующего интегрирования вдоль силовой линии. Слагаемое с электрическим полем при этом пропадает, поскольку при колебаниях плазмы низкого давления  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ .

Если ввести смещение плазмы от положения равновесия  $\boldsymbol{\eta}$ , так что  $\mathbf{v}_0 = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}$ , то из соотношения ортогональности получим

$$f' = - \left\{ \int \boldsymbol{\eta} \nabla f_0 \frac{dl}{u} - 2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \cdot \int H \boldsymbol{\eta} \nabla \left( \frac{u}{H} \right) dl \right\} \left( \int \frac{dl}{u} \right)^{-1}. \quad (2.8)$$

Введем ортогональную криволинейную систему координат  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  такую, чтобы линии  $\xi_3$  совпадали с силовыми линиями, а координата  $\xi_2$  представляла собой азимут. В этой системе координат  $\boldsymbol{\eta} \nabla f_0 = -\frac{\sqrt{g_{33}}}{H\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} \frac{\partial f_0}{\partial \xi_1}$ , где

$g_{33}$  — компонента метрического тензора,  $g = \operatorname{Det} g_{ik}$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Phi$ . Согласно условию  $\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{\sqrt{g} H}{\sqrt{g_{33}}} = 0$ , величина  $\frac{\sqrt{g_{33}}}{H\sqrt{g}}$  является постоянной

вдоль силовой линии. Так как  $\Psi$  и  $f_0$  также не зависят от  $\xi_3$ , то выражение  $\boldsymbol{\eta}\nabla f_0$  в (2.8) можно вынести за знак интеграла. Учитывая, что  $dl = \sqrt{g_{33}} d\xi_3$  и что согласно условию  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$  выражение  $\sqrt{g_{33}} H$  не зависит от  $\xi_1$ , мы можем вынести за знак второго интеграла в (2.8) оператор  $(\boldsymbol{\eta}\nabla)$ . Таким образом,

$$f' = -\boldsymbol{\eta}\nabla f_0 + 2\left(\boldsymbol{\eta}\nabla \int u dl\right) \left(\int \frac{dl}{u}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (2.9)$$

Заметим, что взятый с обратным знаком коэффициент перед  $\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$  в (2.9) представляет собой изменение энергии частицы  $\delta \varepsilon$  при условии сохранения продольного адиабатического инварианта  $J$ :

$$\delta J = \delta \int u dl = \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \boldsymbol{\eta}\nabla J = 0.$$

Обратимся теперь к уравнению (2.7). Оно может быть получено из вариационного принципа  $\delta \int L dt = \delta \int (T - V) dt = 0$ , где кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}\right)^2 d\mathbf{r}, \quad (2.10)$$

а потенциальная

$$V = -\frac{1}{2} \int \boldsymbol{\eta} \frac{\nabla H}{H} (p'_{\parallel} + p'_{\perp}) d\mathbf{r}. \quad (2.11)$$

Действительно, в (2.11) входит только радиальная компонента смещения  $\eta^1 \sim \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2}$ . Этой же компоненте пропорциональна сумма  $p'_{\parallel} + p'_{\perp}$ . Поэтому при варьировании (2.11) можно проварьировать только первый множитель, удвоив затем результат. Учитывая, что варьирование по  $\boldsymbol{\eta} = \frac{[\mathbf{h}\nabla\Psi]}{H}$  означает фактически варьирование по  $\Psi$ , и что  $\mathbf{h}\nabla\Psi = 0$ , нетрудно убедиться в правильности вариационного принципа.

Для устойчивости плазмы необходимо и достаточно, чтобы потенциальная энергия была положительна.

Подставляя в (2.11)

$$p'_{\parallel} + p'_{\perp} = \int M \left(u^2 + \frac{w^2}{2}\right) f' d\mathbf{v} = \frac{\pi M}{2} \int \left(u^2 + \frac{IH}{2}\right) f' \frac{H}{u} dI d\varepsilon, \quad (2.12)$$

получаем

$$V = \frac{\pi}{2} \int \frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g} H} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2}\right)^2 \cdot W_i(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (2.13)$$

где

$$W_i = M \int \left(u^2 + \frac{IH}{2}\right) \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \xi_1} - 2 \frac{\partial J}{\partial \xi_1} \left(\int \frac{dl}{u}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right\} \frac{\partial H}{\partial \xi_1} \frac{dI d\varepsilon}{uH} dl. \quad (2.14)$$

Добавляя сюда энергию электронов, получаем следующий критерий устойчивости:

$$W_i + W_e > 0, \quad (2.15)$$

где  $W_i$  дается формулой (2.14), а  $W_e$  — аналогичное выражение для электронов.

Критерий (2.15), в отличие от гидродинамического, в общем виде выглядит довольно сложно. В случае резкой границы у плазмы он значительно упрощается и в точности совпадает с критерием Розенблюта и Лонгмайра [6]. Некоторое упрощение имеет место также в случае максвелловского распределения электронов и ионов по скоростям с постоянной температурой вдоль силовых линий. При этом  $E_0 = 0$ , и условие (2.15) приводится к виду

$$\frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} \frac{\partial U}{\partial \xi_1} < \frac{\pi}{2} \int \left( \frac{M^2}{T} f_0 + \frac{m^2}{T_e} f_{0e} \right) \left( \frac{\partial I}{\partial \xi_1} \right)^2 \left( \int \frac{dl}{u} \right)^{-1} dI d\varepsilon, \quad (2.16)$$

где  $U = - \int \frac{dl}{H}$ ,  $J = \int u dl = \int \sqrt{\varepsilon - IH} dl$ ,  $f_{0e}$  — функция распределения электронов,  $T$  — температура.

Условие (2.16) означает, что давление плазмы не может слишком быстро возрастать с увеличением «потенциальной энергии»  $U$ , как это имело место и при гидродинамическом рассмотрении [3].

За обсуждение работы выражаю благодарность академику М.А. Леонтовичу.

#### Список литературы

1. Chew G., Goldberger M., Low F. // Proc. Roy. Soc. 1956. V. A236. P. 112.
2. Chandrasekhar S., Kaufman A., Watson K. // Ann. Phys. 1957. V. 2. P. 433.
3. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 38.
4. Hain K., Lüst R., Schlütter A. // Zs. Naturforsch. 1957. Bd. 12a. S. 833.
5. Bernstein I., Frieman E., Kruskal M., Kulsrud R. // Proc. Roy. Soc. 1958. V. A244. P. 17.
6. Rosenbluth M., Longmire C. // Ann. Phys. 1957. V. 1. P. 120.

## О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ \*)

В работе рассмотрен вопрос о неустойчивости равновесных магнито-гидродинамических конфигураций с замкнутыми силовыми линиями по отношению к определенному виду возмущений.

При исследовании устойчивости магнито-гидродинамических конфигураций с замкнутыми силовыми линиями особый интерес представляют возмущения, соответствующие «перестановке» соседних силовых трубок. В самом деле, в плазме с замкнутыми силовыми линиями отдельные силовые трубки с плазмой могут перемещаться на значительные расстояния без заметного искажения магнитного поля, которое могло бы приостановить такое движение. Поэтому отсутствие устойчивости по отношению к такого рода возмущениям приведет, очевидно, к конвективному перемешиванию силовых трубок с плазмой — простейшему виду турбулентности в плазме.

Так как с точки зрения стабилизации плазмы представляют особый интерес неоднородные магнитные поля, то является желательным получить условия конвективной неустойчивости без ограничения симметрии системы. Однако точное рассмотрение этой задачи с помощью кинетического уравнения представляет значительные трудности, поэтому мы воспользуемся гидродинамическим приближением.

Если ввести смещение  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$  данного участка плазмы из положения равновесия, то уравнение для малых колебаний плазмы может быть записано [1, 2] в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\eta}}{\partial t^2} = \nabla(\boldsymbol{\eta} \nabla p_0) + \gamma \nabla(p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}) + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \operatorname{rot} [\boldsymbol{\eta} \mathbf{H}], \mathbf{H}] + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \operatorname{rot} [\boldsymbol{\eta} \mathbf{H}]], \quad (1)$$

где  $\rho_0$  — плотность,  $p_0$  — давление плазмы,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\mathbf{H}$  — равновесное магнитное поле.

Уравнение (1), как было показано в работах [1, 2], и для случая  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$  в работе [3], является самосопряженным и может быть получено из вариационного принципа  $\delta \int L dt = \delta \int (T - V) dt = 0$ , где  $T = \frac{1}{2} \int \rho_0 \left( \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} \right)^2 d\mathbf{r}$  — кинетическая, а  $V$  — потенциальная энергия плазмы. Отвлекаясь от граничных эффектов, что справедливо при условии обращения в нуль нормальной компоненты смещения  $\eta_n$  на границе плазмы, имеем

$$V = \frac{1}{2} \int \gamma p_0 (\operatorname{div} \boldsymbol{\eta})^2 d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\eta} \nabla(\boldsymbol{\eta} \nabla p_0) d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi} \int (\operatorname{rot} [\boldsymbol{\eta} \mathbf{H}])^2 d\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi} \int \boldsymbol{\eta} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \operatorname{rot} [\boldsymbol{\eta} \mathbf{H}]] d\mathbf{r}. \quad (2)$$

\*) Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 380–383.

Для устойчивости плазмы необходимо и достаточно, чтобы при всех возмущениях потенциальная энергия  $V$  была положительно. Введем для удобства криволинейную систему координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  с силовыми линиями в качестве одного из семейств координатных линий, а именно  $\xi_3$ . Координату  $\xi_2$  выбираем таким образом, чтобы  $\frac{\partial p_0}{\partial \xi_2} = 0$ , т. е. чтобы поверхности  $\xi_1 = \text{const}$  совпадали с поверхностями  $p_0 = \text{const}$ .

Если потенциальную энергию (2) записать в криволинейных координатах, то во всех слагаемых, кроме первого, контравариантная компонента смещения  $\eta^3$  выпадает. Минимизирование первого слагаемого в (2) по  $\eta^3$  приводит (ср. [4]) к условию:

$$\text{div } \boldsymbol{\eta} = -\frac{1}{U} \int \frac{\text{div } \boldsymbol{\eta}_{\text{tr}}}{H} dl, \quad (3)$$

где

$$U = -\int \frac{dl}{H}, \quad (4)$$

а интегралы в (3), (4) берутся вдоль силовых линий. Через  $\boldsymbol{\eta}_{\text{tr}}$  в (3) обозначена составляющая смещения, третья компонента которой  $\eta_{\text{tr}}^3$  равна нулю:  $\boldsymbol{\eta}_{\text{tr}} = \{\eta^1, \eta^2, 0\}$ . Мы рассмотрим здесь только возмущения (с  $\eta^1, \eta^2$ ), не зависящими от  $\xi_3$ . Тем самым мы получим лишь необходимые, но не достаточные условия устойчивости плазмы в магнитном поле с замкнутыми силовыми линиями.

Потенциальная энергия (2) для таких возмущений имеет вид

$$\begin{aligned} V = & -\frac{1}{2} \int \gamma p_0 \frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g} H U} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_1} U \chi^1 + \frac{\partial}{\partial \xi_2} U \chi^2 \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 + \\ & + \frac{1}{8\pi} \int W \frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g} H} \left( \frac{\partial \chi^1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \chi^2}{\partial \xi_2} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 - \\ & - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g} H} \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} \cdot \chi^1 \left( \frac{\partial U \chi^1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U \chi^2}{\partial \xi_2} + U \frac{\partial \chi^1}{\partial \xi_1} + U \frac{\partial \chi^2}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2, \quad (5) \end{aligned}$$

где  $\chi^i = \frac{\sqrt{g} H}{\sqrt{g_{33}}} \eta^i$ ,  $g_{33}$  — компонента метрического тензора,  $g = \text{Det } g_{ik}$ ,

$$W = \int H dl. \quad (6)$$

Заметим, что из условия равновесия

$$\nabla p_0 = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] \quad (7)$$

следует:  $\frac{4\pi}{c} j^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_2} H \sqrt{g_{33}} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{H g_{23}}{\sqrt{g_{33}}} = 0$ , откуда с помощью интегрирования по  $\xi_3$  получаем  $\frac{\partial W}{\partial \xi_2} = 0$ , т. е.  $W$  является постоянной на поверхности  $p_0 = \text{const}$ . Аналогичным образом, интегрируя вдоль силовой линии первую компоненту (7), деленную на  $H$ , получаем

$$\frac{\partial W}{\partial \xi_1} = 4\pi U \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1}, \quad (8)$$

откуда следует, что  $U$  также является функцией только  $\xi_1$ .

Учитывая это обстоятельство, получаем, что подынтегральное выражение в (5) является квадратичной формой относительно  $\left(\frac{\partial\chi^1}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\chi^2}{\partial\xi_2}\right)$  и  $\chi^1$ . Условия того, что эта форма является положительно определенной, имеют вид

$$-\frac{W}{4\pi} \left(\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \xi_1}\right)^2 < \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} < \frac{\gamma p_0}{|U|} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_1}\right)^2,$$

или, так как  $W$  и  $U$  зависят лишь от  $\xi_1$ ,

$$-\frac{W}{4\pi} \left(\frac{\nabla U}{U}\right)^2 < \nabla U \nabla p_0 < \gamma p_0 \frac{(\nabla U)^2}{|U|}. \quad (9)$$

Неравенства (9) и являются условиями отсутствия конвективной неустойчивости. Второе неравенство в (9), совпадающее с условием устойчивости плазмы низкого давления [4], показывает, что давление плазмы не может слишком быстро убывать с  $U$ . Первое неравенство показывает, что в плазме, вообще говоря, имеет место неустойчивость при наличии крутого спада давления в сторону возрастания  $U$ .

#### Список литературы

1. Hain K., Lüst R., Schlüter A. // Zs. Naturforsch. 1957. Bd. 12a. S. 833.
2. Bernstein I., Frieman E., Kruskal M., Kulsrud R. // Proc. Roy. Soc. 1958. V. A244. P. 17.
3. Брагинский С.И., Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. III. С. 300.
4. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 38.

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЛАЗМЫ С ПОМОЩЬЮ НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ \*)

Основной проблемой регулируемой термоядерной реакции является удержание высокотемпературной плазмы, т. е. получение устойчивой, изолированной от стенок плазменной конфигурации. Один из наиболее прямых способов создания оторванной от стенок плазмы состоит в использовании хорошо известного пинч-эффекта, стабилизированного с помощью продольного магнитного поля и металлического кожуха (подробно этот вопрос рассмотрен С.И. Брагинским и В.Д. Шафрановым). Наряду с этим представляют интерес и другие возможности получения устойчивых конфигураций плазмы. В настоящем докладе рассматривается вопрос о стабилизации плазмы с помощью неоднородных магнитных полей специального вида. Предложенные здесь системы могут, по-видимому, использоваться как самостоятельно, так и в сочетании с пинч-эффектом.

### Стабилизация плазмы с помощью охраняющих проводников

Рассмотрим случай, когда внутри плазмы магнитное поле отсутствует. При этом предположим, что проводимость плазмы бесконечная, а все текущие по плазме токи сосредоточены на ее поверхности.

Критерий устойчивости такой полностью скинированной плазмы может быть выяснен с помощью простых качественных соображений. Действительно, неустойчивость плазменного цилиндра, стянутого магнитным полем собственного тока, тесно связана с убыванием магнитного поля по мере удаления от границы плазмы наружу. Особенно наглядно это видно при рассмотрении локальных возмущений границы. Если внутри плазмы магнитного поля нет, то при равновесии давление плазмы уравнивается внешним полем  $p = H^2/8\pi$  ( $H$  — поле на границе). Представим себе, что из плазмы случайно «высунулся» плоский «язык», ориентированный параллельно магнитным силовым линиям. Такой «язык» очень мало возмущает магнитное поле — он как бы «просовывается» между силовыми линиями, немного их раздвигая. Если поле уменьшается с удалением от границы плазмы, то кончик «языка» попадает в область меньшего магнитного давления и будет с ускорением вытягиваться дальше.

\*) Кадомцев Б.Б., Брагинский С.И. // Доклады советских ученых на Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. — М.: Главатом, 1959. С. 175-183.

Поэтому кажется естественным, что для устойчивости такого плазменного образования необходимо, чтобы поле возрастало при удалении от его границы. Этот результат подтверждается и строгим гидродинамическим рассмотрением.

Уравнения магнитной гидродинамики для малых колебаний плазмы могут быть записаны в виде одного самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка для смещения  $\xi$  из положения равновесия. Это уравнение может быть получено из вариационного принципа с действительным функционалом. Если давление  $p_0$  и плотность  $\rho_0$  плазмы постоянны, а токи текут только по ее поверхности, то из вариационного принципа получается следующее соотношение для собственных частот колебаний:

$$\omega^2 \rho_0 = \int_{V_i} \frac{p^2}{\gamma p_0} dV + \int_{V_i + V_e} \frac{H^2}{4\pi} dV + \int_{S_0} \frac{\xi_n^2}{8\pi} \frac{\partial (H_0^{(e)^2} - H_0^{(i)^2})}{\partial n} dS.$$

Здесь  $V_i$  — объем, занятый плазмой;  $V_e$  — внешний объем;  $S_0$  — граница плазмы;  $H_0^{(e)}$  и  $H_0^{(i)}$  — невозмущенные поля соответственно снаружи и внутри плазмы;  $p$ ,  $H$  — давление и поле малых колебаний;  $\xi_n$  — нормальная компонента смещения на границе  $S_0$ ;  $\frac{\partial}{\partial n}$  — производная по внешней нормали к  $S_0$ .

Из приведенного соотношения видно, что для устойчивости плазмы ( $\omega^2 > 0$ ) достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(e)^2} - H_0^{(i)^2}) > 0$$

во всех точках границы плазмы.

Если  $H_0^{(i)} = 0$ , то возрастание поля от границы плазмы является достаточным и, как видно из предыдущего качественного рассмотрения, необходимым условием ее устойчивости. Аналогичный результат был получен в [1]. Отсюда виден путь отыскания устойчивых систем. Так, например, бесконечный плоский слой плазмы (рис. 1а), снаружи от которого поле постоянно, не является неустойчивым [2]. Однако практически плоский проводник бесконечной ширины создать нельзя, а при любой конечной ширине неустойчивость возникает из-за влияния краев. Как известно, в плоском конденсаторе краевой эффект можно устранить с помощью охраняющих колец. Аналогичный прием можно использовать и в данном случае. Система, изображенная на рис. 1б, в которой часть плазмы заменена металлическими проводниками, является устойчивой. С увеличением магнитного поля граница плазмы продавливается внутрь, и при этом магнитное поле возрастает с удалением от границы (рис. 1в). Такая система тем более будет устойчива.

Существенным обстоятельством здесь является то, что охраняющие проводники не дают силовым линиям свободно перемещаться с плазмой. Силовые линии, подобно упругим нитям, натягиваются на проводниках, и из-за этого не могут развиваться перетяжки и искривления, которые приводят к неустойчивости цилиндрического столба плазмы. Этот эффект можно еще усилить, если окружить плазму решеткой из металлических



стержней, расположенных перпендикулярно силовым линиям (рис. 1 *г*). Если решетка достаточно густая, то она жестко определяет собой границу плазмы при условии, что давление магнитного поля снаружи от решетки больше давления плазмы. Действительно, магнитное поле не может глубоко «провисать» сквозь густую решетку. Поэтому если граница плазмы заметно отодвинется от решетки внутрь, магнитное поле на ней резко уменьшится. Если же плазма выйдет наружу, то ток со стержней перейдет на плазму, и она примет на себя полное магнитное давление, большее, чем давление плазмы. В результате установится некоторое равновесное и устойчивое положение границы плазмы, которое, грубо говоря, совпадает с поверхностью решетки. При этом часть магнитного давления воспринимается стержнями, и устойчивость достигается за счет некоторого проигрыша в величине магнитного поля, уравновешивающего плазму.

В случае плоской решетки можно произвести более детальное рассмотрение границы плазмы вблизи стержней. Так как снаружи от плазмы и стержней  $\text{rot } \vec{H} = 0$ ,  $\text{div } \vec{H} = 0$ , а на границе с плазмой  $H^2 = 8\pi r = \text{const}$ , то задача о границе плазмы аналогична гидродинамической задаче о струйном потенциальном течении несжимаемой жидкости. Пользуясь развитыми в теории струй методами конформных преобразований, можно найти магнитное поле и форму границы плазмы. Если давление магнитного поля не слишком сильно превосходит давление плазмы, то граница плазмы прогибается между стержнями, как показано на рис. 1 *д*. При этом магнитное поле возрастает в направлении от границы плазмы, так что она является устойчивой по отношению к малым возмущениям. Если между стержнями и плазмой имеется некоторый магнитный поток, то граница плазмы располагается так, как изображено на рис. 1 *е*. При этом плазма нигде не соприкасается со стержнями, так что прямой теплообмен между плазмой и стержнями отсутствует. Такая конфигурация также устойчива по отношению к малым колебаниям.

Таким образом, охраняющая решетка придает границе плазмы устойчивость по отношению к малым возмущениям, а также приводит к появлению постоянной по величине возвращающей силы при смещениях, превышающих расстояние между стержнями.

Что касается конкретных систем с охраняющими проводниками, то они могут быть весьма разнообразны. Простейшей системой является плазмен-

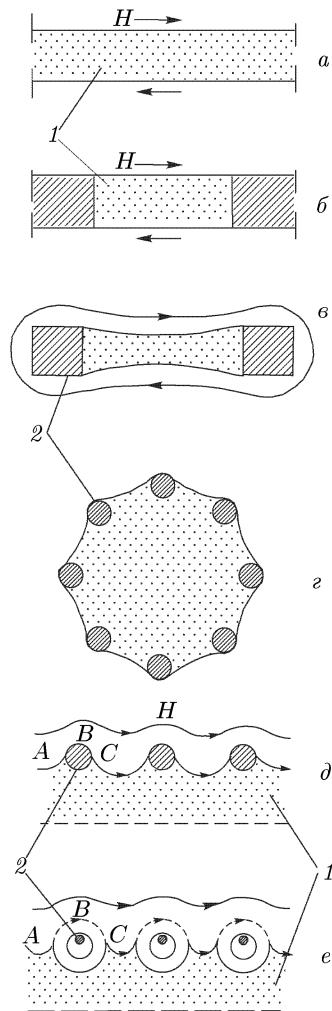


Рис. 1. Схема стабилизации плазмы с помощью охраняющих проводников: 1 — плазма; 2 — металл

ный цилиндр, причем решетку можно сделать либо из прямых стержней, расположенных вдоль образующих цилиндра, либо из колец, перпендикулярных образующим. В первом случае (рис. 1 *з*) ток по плазме и по стержням течет в одну и ту же сторону в направлении оси цилиндра. Этот ток создаст азимутальное магнитное поле. В системе с кольцами продольное магнитное поле создается дополнительной наружной обмоткой, а по кольцам и плазме течет азимутальный ток в направлении, противоположном направлению тока в обмотке. Каждая из этих систем может быть либо свернута в тор, либо ограничена с торцов. В системе со стержнями, например, на торцах могут стоять электроды, а ограничение системы с кольцами может быть осуществлено усилением магнитного поля вблизи торцов (магнитная пробка) с одновременным уменьшением диаметра крайних колец

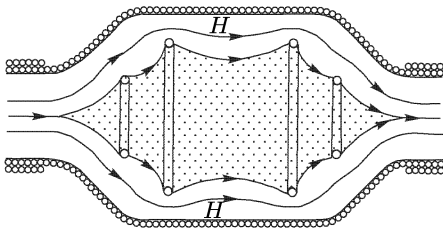


Рис. 2. Стабилизация плазмы с помощью магнитной пробки

внешней цепи. В самом деле, за время  $t_S = \frac{4\pi\sigma a^2}{c^2}$  ( $a$  — поперечный размер плазмы,  $\sigma$  — ее проводимость) вся плазма выйдет за пределы решетки и затем разрушится вследствие потери устойчивости. В действительности время существования плазмы может быть значительно меньше. Например, в системе рис. 2 при достаточно большой частоте соударений плазма в скин-слое будет уходить вдоль силовых линий с тепловой скоростью ионов  $v_T$ . Если длина системы равна  $L$ , то время вылета частиц вдоль силовых линий  $t_T = \frac{L}{v_T}$ .

В результате ухода плазмы из скин-слоя устанавливается некоторая независящая от времени толщина скин-слоя \*)

$$\delta = \sqrt{\frac{c^2}{4\pi\sigma} t_T},$$

и время существования плазмы  $t$  будет равно, очевидно,

$$t = t_T \frac{a}{\delta} = \sqrt{t_S t_T} = \sqrt{\frac{4\pi\sigma a^2}{c^2} \frac{L}{v_T}}$$

(при достаточно хорошей проводимости плазмы  $t \ll t_S$ ).

Аналогичное положение имеет место и в других системах. В самом деле, в результате диффузии магнитного поля плазма выйдет за стержень,

\*) В качестве толщины скин-слоя следует брать средний ларморовский радиус электронов  $\rho_e$ , если  $\delta < \rho_e$ .

на линию  $ABC$  в решении рис. 1  $d$  или на штриховую силовую линию в «оторванном» решении рис. 1  $e$ , так что вокруг каждого стержня образуется плазменный чехол. Но каждый стержень каким-то образом должен быть подвешен к стенкам камеры, причем подвески обязательно пройдут сквозь эти плазменные чехлы. Следовательно, в системе неизбежно возникнут потери на подвесках. Если подвески имеют диаметр  $b$ , а расстояние между подвесками данного стержня равно  $l$ , то вероятность гибели частицы при прохождении через один чехол равна  $\frac{b}{l}$ . Отсюда время жизни частиц в скин-слое  $t_T = \frac{L}{v_T} \frac{l}{b}$  ( $L \sim a$  расстояние между стержнями). Повторяя приведенные выше выкладки, получаем

$$t = \sqrt{t_s t_T} = \sqrt{\frac{4\pi\sigma a^2}{c^2} \frac{L}{v_T} \frac{l}{b}},$$

что при  $\frac{b}{l} \sim 10^{-2}$  на порядок больше времени жизни системы рис. 2.

Будучи погруженными в горячую плазму, подвески подвергнутся мощной бомбардировке ионами плазмы, что приводит к их испарению и загрязнению системы. Испарение подвесок можно значительно уменьшить, если пустить по ним ток настолько большой, чтобы магнитные силовые линии около подвесок были замкнутыми. Тогда ионы смогут попасть на подвеску только диффузионным способом, и плотность выделения энергии будет порядка

$$\frac{Tn}{b} \frac{\rho^2}{\tau} = nT v_T \frac{\rho}{b\omega\tau},$$

где  $n$  — плотность плазмы;  $T$  — ее температура;  $\rho$  — средний ларморовский радиус ионов;  $\tau$  — время ион-ион соударений;  $\omega = \frac{eH}{Mc}$  — ионная циклотронная частота.

Если  $\frac{\rho}{b} \sim 1$ , то выделение энергии уменьшается в  $\omega\tau$  раз по сравнению с выделением энергии  $nT v_T$  на подвесках без тока. При этом вдоль подвески, на некотором расстоянии от нее появится область с очень малым магнитным полем, которая будет играть роль канала для утечки плазмы; но если ширина канала порядка  $b$ , то эта утечка во всяком случае не будет превосходить прямых потерь на подвесках.

Из приведенных оценок следует, что время жизни плазмы хотя и меньше скин-слоя, но может достигать нескольких сотых секунды при  $a \sim 10^2$  и  $T$  порядка нескольких кэВ. Оценки показывают, что выделяющаяся за это время энергия термоядерных реакций может достигать тепловой в смеси  $DT$ . Можно ожидать, что наиболее перспективным будет использование охраняющих проводников в сочетании с пинч-эффектом. Как известно [3], плазменный шнур в тороидальной системе, обладающей азимутальной симметрией, может находиться в равновесии только при наличии тока вдоль шнура. Поэтому в такой системе нельзя менять направления тока: при обращении тока в нуль равновесие теряется. Если тор с сильным магнитным полем дополнить охраняющими кольцами, то в момент прохождения тока через нуль удержание плазмы будет осуществляться с помощью колец, и это позволит растянуть разряд на много периодов осевого

тока. С другой стороны, поле собственного тока, сжимая шнур, приведет, по-видимому, к уменьшению потерь на подвесках. Эти вопросы требуют экспериментального исследования.

## Магнитные ловушки

Вопрос о стабилизации плазмы допускает и иной, в некотором смысле противоположный, подход. Условия устойчивости становятся, очевидно, все более и более жесткими при увеличении давления плазмы. Поэтому если рассмотреть случай плазмы, давление которой много меньше давления магнитного поля, то это позволит нам определить минимальные требования к полю, способному удерживать плазму. В такой постановке эта способность является свойством самого поля, так как плазма низкого давления играет лишь роль пробного тела — она практически не искажает изучаемое нами поле. Поле, которое может удерживать квазинейтральную плазму бесконечно малого давления, мы будем называть магнитной ловушкой для плазмы. Рассмотрение магнитных ловушек для плазмы позволяет получить простой критерий удержания плазмы, который в какой-то степени дает ориентировку и в более сложных случаях.

1. Поскольку удержание плазмы подразумевает удержание отдельных частиц плазмы и исследование поведения заряженных частиц часто позволяет предугадать поведение плазмы, то не лишена интереса в каком-то смысле более простая задача о магнитных ловушках для частиц, т. е. магнитных полях, позволяющих в течение длительного времени удерживать заряженные частицы в ограниченной части пространства \*). Именно с них мы и начнем рассмотрение.

Ловушки для частиц естественно разбиваются на две группы: ловушки с замкнутыми силовыми линиями и адиабатические ловушки, основанные на сохранении поперечного инварианта  $I = \frac{w^2}{H}$  ( $w$  — компонента скорости, перпендикулярная магнитному полю). В адиабатических ловушках, предложенных Г.И. Будкером, удерживаются только те частицы, которые испытывают отражение от пробок, т. е. областей с сильным магнитным полем. Частицы с малым отношением  $\frac{w}{v}$  выходят через пробки, и хотелось бы каким-нибудь способом возвращать их обратно. Однако простое замыкание силовых линий не приводит к цели: движущиеся по замкнутым линиям частицы постепенно дрейфуют на стенки. Аналогичный дрейф имеет место и в других ловушках с замкнутыми линиями.

Как в ловушках с замкнутыми линиями, так и в адиабатических частицы совершают квазипериодическое движение: они движутся в основном по силовым линиям, лишь постепенно дрейфуя с одной линии на другую. Если магнитное поле настолько сильное, что полный дрейф за один обход силовой линии мал, то при таком движении, как можно показать, сохраняется продольный инвариант  $J = \int u dl$  ( $u$  — продольная компонента скорости,  $dl$  — элемент дуги силовой линии), а сама скорость дрейфа

\*) Рассмотрение магнитных ловушек для частиц представляет интерес также с точки зрения удержания заряженных продуктов термоядерных реакций.

пропорциональна градиенту  $J$ . Если электрическое поле отсутствует, то  $v = \text{const}$  и уравнение поверхности, по которой дрейфует частица, можно записать в виде

$$\Phi = \frac{1}{v} J = \int \sqrt{1 - \frac{IH}{v^2}} dl = \text{const}.$$

Таким образом, чтобы частица с заданными  $v$ ,  $J$  удерживалась внутри некоторого объема, поверхность  $\Phi$  должна быть замкнутой и целиком находиться внутри этого объема. Наиболее просто это условие выглядит для частиц с  $\frac{u}{v} = 1$ , т. е.  $J = 0$ . Для этих частиц  $\Phi$  означает просто длину силовой линии, и, следовательно, они будут удерживаться, если произвести «гофрировку» магнитного поля, другими словами, удлинить периферийные силовые линии по сравнению с внутренними.

Рассмотрим в качестве примера две ловушки с гофрированным полем (рис. 3). Каждая из них представляет собой две гофрированные ловушки с пробками, соединенные между собой перемычками  $A$ . Наличие пробок с полем  $H_m$  приводит к тому, что большая часть частиц оказывается запертой в гофрированных частях, и только частицы с  $\frac{w^2}{v^2} < \frac{H_0}{H_m} \ll 1$  пролетают через перемычки, совершая движение по замкнутым силовым линиям.

Первая система (рис. 3 а), которая может быть названа запертой ловушкой с магнитными пробками, действует в некотором смысле аналогично простой адиабатической ловушке. Если  $L \gg R$ , то длина силовой линии будет определяться гофрированной частью, а вклад от перемычек будет мал. Поэтому пролетающие через перемычку частицы будут стабилизированы: гофрировка поля приводит к вынужденному круговому дрейфу частиц около оси системы, который перекрывает дрейф в перемычках при условии  $\frac{\Delta L}{\pi a} > 1$  ( $\Delta L$  — удлинении периферийной линии по сравнению с центральной). Поэтому основным процессом потерь частиц из такой системы являются столкновения частиц в перемычках  $A$ , которые приводят к выводу их из конуса направлений  $\frac{w^2}{v^2} < \frac{H_0}{H_m}$  и последующему дрейфу на стенки перемычки. Но так как плотность в перемычках в  $\frac{H_0}{H_m}$  раз меньше плотности в прямых частях, а их объем в  $\frac{H_m L}{H_0 \pi R}$  раз меньше объема прямых частей, то утечка будет занижена в  $\frac{H_m L}{H_0 \pi R} \gg 1$  раз.

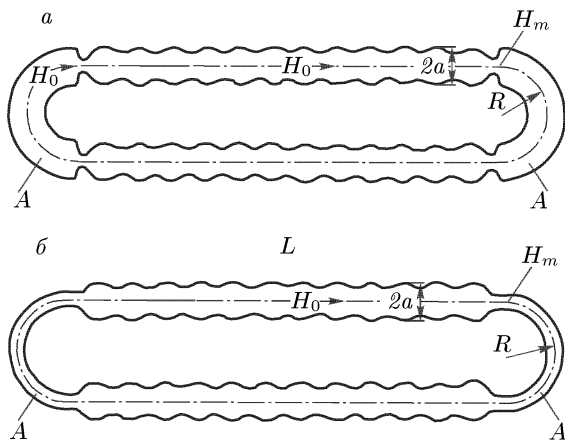


Рис. 3. Магнитные ловушки с «гофрированным» полем

Вторая система (рис. 3б) является скорее модифицированным тором. В ней также основная часть пролетающих через перемычки частиц оказывается стабилизированной. Однако частицы с малым  $\frac{u}{v} \sim \frac{\rho}{a}$  в перемычке успевают осесть на стенки за время пролета через перемычку, что приводит к дополнительной утечке энергии, которая превосходит утечку за счет теплопроводности при  $\lambda L$  ( $\lambda$  — средний свободный пробег ионов).

2. Ловушки с гофрированным полем позволяют удерживать отдельные частицы или по крайней мере основную их часть. Но это вовсе не означает, что они будут удерживать всю квазинейтральную плазму, так как в плазме возникают собственные электрические поля, которые могут существенно изменить характер движения отдельных частиц. Следующая задача состоит в отыскании условий удержания плазмы с бесконечно малым давлением. В гидродинамическом приближении и в предположении бесконечной проводимости эти условия имеют весьма простой вид и могут быть выяснены из простых качественных соображений. Как было показано в работе [4], в плазме с малым давлением допустимым является только такое движение, когда перемещаются отдельные силовые трубки, так что магнитное поле при этом почти не искажается. При таком движении объем трубки с плазмой изменяется пропорционально интегралу  $\int \frac{dl}{H}$  вдоль силовой линии. Стремление плазмы к расширению приводит к тому, что каждая трубка с плазмой будет стремиться двигаться в сторону увеличения этого интеграла.

В результате оказывается [5], что плазма низкого давления ведет себя аналогично неравномерно нагретому газу в поле сил тяжести, причем роль плотности газа играет давление плазмы, а роль потенциальной энергии — функция  $U = - \int \frac{dl}{H}$ . Действительно, если плазма в начальный момент имеет произвольное распределение, то в ней возникает конвекция — силовые трубки, в которых давление плазмы больше, начинают двигаться в сторону падения  $U$ , вытесняя трубки с меньшим давлением. Таким образом, плазма стремится к устойчивому состоянию, в котором ее давление падает с ростом  $U$ . Наряду с этим имеются и другие устойчивые состояния: подобно тому, как в земной атмосфере возможно устойчивое равновесие, когда температура воздуха не очень сильно падает с высотой, так и в плазме устойчивость не теряется, если ее давление возрастает при возрастании  $U$  не очень быстро.

В самом деле, пусть плазма находится в равновесии, и пусть некоторая трубка смещается в сторону возрастания  $U$  на некоторую бесконечно малую величину, раздвигая другие трубки. Если процесс происходит адиабатически, то давление плазмы при этом изменится на величину  $\delta p = -\gamma p \frac{\delta V}{V} = \gamma p \frac{\delta U}{|U|}$  ( $\gamma$  — показатель адиабаты). Если давление в трубке окажется меньше давления окружающей плазмы, которое равно  $p + dp$ , то трубка будет ускоренно двигаться далее в сторону возрастания  $U$ ; если же  $\delta p < dp$ , то трубка будет вытесняться обратно и плазма будет устойчива. Таким образом, для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы  $\frac{dp}{dU} < \frac{\gamma p}{|U|}$ , т. е. чтобы давление плазмы падало с  $U$  не быстрее, чем  $|U|^{-\gamma}$ .

Таким образом, вопрос об удержании плазмы заданным магнитным полем сводится к исследованию потенциала  $U$  для этого поля. Поле магнитной ловушки должно быть таким, чтобы потенциал  $U$  имел минимум внутри ограниченного объема и возрастал к стенкам. Оказывается, что поле систем с охраняющими проводниками полностью удовлетворяет этим условиям. Рассмотрим, например, систему с охраняющими кольцами, магнитное поле которой имеет вид, представленный на рис. 4. Так как система рис. 4 периодическая, то под  $U$  можно понимать интеграл по одному периоду  $-\frac{a}{2} < Z < \frac{a}{2}$ . Потенциал  $U$  есть функция силовой линии, поэтому его удобно рассматривать на плоскости  $Z = 0$ , пересекающей все силовые линии. На этой плоскости  $U$  имеет две «ямы» в точках  $A$  и  $C$ , лежащих на штриховой силовой линии, которая проходит через точку  $A$ , где поле обращается в нуль: при приближении к этим точкам  $U$  логарифмически стремится к  $-\infty$ . Вблизи стержня  $U$  максимально и близко к нулю, при  $r = 0$   $U = -\frac{a}{H_1}$  ( $H_1$  — некоторое среднее значение поля на оси  $Z$ ), а в точке  $D$   $U \approx -\frac{a}{H_0} > -\frac{a}{H_1}$ .

Отсюда видно, что любое расположение плазмы, при котором ее давление убывает в направлении от штриховой силовой линии, наверняка является устойчивым. Более того, произвольное распределение плазмы в такой системе само изменится таким образом, чтобы давление убывало от штриховой линии, т. е. плазма сама по себе будет стремиться к устойчивому равновесию.

Наряду с этими состояниями, в которых, как мы видим, имеются плазменные чехлы около колец, в системе с кольцами устойчивым является также и такое состояние плазмы, когда ее давление отлично от нуля только внутри штриховой силовой линии и обращается в нуль на этой линии; для устойчивости достаточно лишь, чтобы давление плазмы убывало с  $U$  не быстрее, чем  $|U|^{-\gamma}$ . Однако осуществление такого состояния является более тонким делом, оно требует специального приготовления плазмы. Кроме того, это состояние отвечает фактически плазме, соприкасающейся со стенками, так как оно предполагает, что на штриховой линии должно все время поддерживаться давление, равное нулю, в противном случае начнется образование чехлов.

Будучи устойчивой, система рис. 4 может быть свернута в тор: при достаточно малой тороидальности устойчивость не будет потеряна.

Аналогичное рассмотрение показывает, что и в других системах с охраняющими проводниками существуют устойчивые состояния плазмы низкого давления. Это означает, что системы с охраняющими проводниками являются, вместе с тем, магнитными ловушками для плазмы. Это обстоятельство хотя и не является строгим доказательством, но служит серьез-

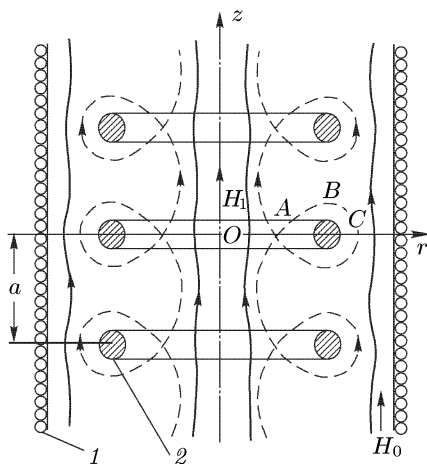


Рис. 4. Система удержания плазмы с охраняющими кольцами: 1 — обмотка; 2 — кольца

ным аргументом в пользу того, что в системах с охраняющими проводниками возможна стабилизация плазмы в очень широком интервале давлений.

Из проведенного рассмотрения следуют также условия устойчивости для ловушек с гофрированным полем. Действительно, магнитное поле системы рис. 4 является как раз полем гофрированного типа, и тот факт, что плазма в таком поле стремится расположиться вдоль штриховой линии, показывает, что по крайней мере в случае оторванных от стенок состояний плазмы магнитные ловушки с гофрированным полем должны практически выполняться как системы с охраняющими проводниками.

Авторы приносят глубокую благодарность академику М.А. Леонтовичу за обсуждение работы и ряд ценных указаний в процессе ее выполнения.

### *Список литературы*

1. *Bernstein I., Frieman E., Kruskal M., Kulsrud R.* // Proc. Roy. Soc. 1958. V. A244. P. 17.
2. *Kruskal M., Schwarzschild M.* // Proc. Roy. Soc. 1954 V. A223. P. 348.
3. *Шафранов В.Д.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 710.
4. *Rosenbluth M., Longmire C.* // Ann. Phys. 1957. V. 1. P. 120.
5. *Сагдеев Р.З., Кадомцев Б.Б., Рудаков Л.И., Веденов А.А.* Динамика разреженной плазмы в магнитном поле. // Доклад на Второй международной конференции по применению атомной энергии в мирных целях. Женева, 1958.



# ДИНАМИКА РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ\*)

## 1. Введение

Большой интерес для проблемы управляемых термоядерных реакций представляет характер движения и свойства высокотемпературной плазмы в магнитном поле. Наиболее общим методом исследования этих вопросов является описание плазмы с помощью кинетического уравнения Больцмана и уравнений Максвелла, связывающих самосогласованные электрические и магнитные поля с функцией распределения ионов и электронов.

В случае, когда длина свободного пробега частиц значительно больше характерных размеров, а время между столкновениями больше характерных времен, в решении кинетического уравнения столкновениями частиц можно пренебречь или учитывать их как малую поправку.

В отсутствие столкновений взаимодействие между частицами плазмы осуществляется через дальнедействующие электромагнитные силы. Каждая частица движется по траектории, описываемой уравнением движения с самосогласованными электрическими и магнитными полями. В этом случае решением кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \frac{e}{M} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1)$$

является произвольная функция первых интегралов уравнений характеристик

$$dt = \frac{d\mathbf{r}}{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{\frac{e}{M} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right)},$$

являющихся уравнениями движения отдельной частицы.

Решить точные уравнения движения в электромагнитных полях удастся только в отдельных простейших случаях, тем более что сами поля определяются совокупным движением всех частиц. Для ряда задач можно выработать методику, приводящую к уменьшению числа переменных и к упрощению уравнений характеристик.

Физическая система может характеризоваться «быстрыми» и «медленными» переменными. Если нас интересует изменение состояния системы за большие времена, то можно исключить быстрые переменные, так что состояние системы будет описываться лишь медленными переменными. Метод исключения быстрых переменных из кинетического уравнения был развит С.Т. Беляевым.

Мы произведем исключение быстрых переменных для частного случая, когда электрические и магнитные поля медленно меняются во времени и

---

\*) Сагдеев Р.З., Кадомцев Б.Б., Рудаков Л.И., Веденов А.А. // Доклады советских ученых на Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. — М.: Главатом, 1959. С. 152–164.

пространстве. Потребуем выполнение условий:

$$\frac{R_B}{L} \ll 1, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\omega T} \ll 1, \quad (3)$$

где  $R_B$  — ларморовский радиус;  $\omega$  — ларморовская частота частицы;  $L$  и  $T$  — характерный размер и характерное время задачи.

Полное движение частицы складывается из быстрого (ларморовского) вращения, характеризующегося быстропеременной фазой, и медленного дрейфа ларморовского «кружка».

Метод исключения быстрой переменной (фазы) из уравнений движения путем перехода к новым переменным  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\alpha$  разработан Н.Н. Боголюбовым и Д.Н. Зубаревым [1]. Опуская вычисления, приведем окончательный результат, ограничившись нулевым и первым приближением по  $\frac{R_B}{L}$  и  $\frac{1}{\omega T}$ :

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{v_{\perp}}{2\omega} \frac{d\omega}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \left( \varepsilon_0, \frac{e}{M} \mathbf{E} - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \nabla\omega - \frac{d\mathbf{w}}{dt} - v_{\parallel} \frac{d\varepsilon_0}{dt} \right), \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \varepsilon_0 v_{\parallel} + \frac{1}{\omega} \left[ \varepsilon_0, -\frac{e}{M} \mathbf{E} + \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \nabla\omega + \frac{d\mathbf{w}}{dt} + v_{\parallel} \frac{d\varepsilon_0}{dt} \right], \quad (6)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\omega, \quad \varepsilon_0 = \frac{\mathbf{B}}{B}, \quad \mathbf{w} = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2},$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_{\parallel}(\varepsilon_0 \nabla) + (\mathbf{w} \nabla).$$

В дальнейшем переменные  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\alpha$  будем называть дрейфовыми переменными.

Имея уравнения для характеристик, легко написать кинетическое уравнение для функции распределения, зависящей от дрейфовых переменных  $f = f(v_{\parallel}, v_{\perp}, \mathbf{R}, \alpha, t)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{R}}{dt} \nabla f + \frac{dv_{\parallel}}{dt} \frac{df}{dv_{\parallel}} + \frac{dv_{\perp}}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} + \frac{d\alpha}{dt} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Величины  $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ ,  $\frac{dv_{\parallel}}{dt}$ ,  $\frac{dv_{\perp}}{dt}$ ,  $\frac{d\alpha}{dt}$  даны выше. Разлагая полученное кинетическое уравнение по  $\frac{1}{\omega}$  (точнее по  $\frac{R_B}{L}$  и  $\frac{1}{\omega T}$ ), получим, что  $f_0$  ( $f = f_0 + f_1 + \dots$ ) не зависит от  $\alpha$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\parallel}(\varepsilon_0 \nabla f) + (\mathbf{w} \nabla f) + \left( \varepsilon_0, \frac{e}{M} \mathbf{E} - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \nabla\omega - \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right) \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + \frac{v_{\perp}}{2\omega} \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, мы получим уравнение, содержащее только медленные переменные. Учет редких столкновений дал бы малый член в правой части кинетического уравнения.

Связь электрических и магнитных полей с функцией распределения осуществляется с помощью уравнений Максвелла. Легко показать, что в

первом приближении по  $\frac{1}{\omega}$  скорость движения центра тяжести элементарного объема плазмы

$$n\mathbf{V} = \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}$$

не совпадает со средней скоростью дрейфа

$$n\mathbf{v}_{\text{др}} = \int \frac{d\mathbf{R}}{dt} f_0 v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\alpha$$

и равна

$$n\mathbf{V} = \int \left( -\text{rot} \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) f_0 v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\alpha.$$

С помощью этого выражения легко написать уравнения Максвелла:

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi e \int (f_0^i - f_0^e) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\alpha, \quad (8)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (9)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi e}{c} \int \left[ -\text{rot} \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right] (f_0^i - f_0^e) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\alpha. \quad (11)$$

Из последнего уравнения видно, что плазма обладает диамагнитными свойствами.

Совокупность уравнений (6)–(11) дает полную систему уравнений, описывающих плазму (столкновениями частиц пренебрегаем). Подчеркиваем, что полученная система уравнений является первым исчезающим приближением разложения точной системы уравнений для плазмы по малому параметру  $\frac{1}{\omega}$  (дрейфовое приближение).

## 2. Уравнения макроскопического движения плазмы

Обычное гидродинамическое рассмотрение справедливо, строго говоря, лишь при больших плотностях и низких температурах плазмы, когда свободный пробег до столкновения меньше характерного размера.

В работах [2] и [3] показано, что разложение кинетического уравнения (при условии отсутствия столкновений) по  $\frac{1}{\omega}$  или по  $\frac{M}{e}$  ( $M$  — масса частицы,  $e$  — заряд,  $\omega = \frac{eB}{Mc}$ ) позволяет получить замкнутую систему для низших моментов функции распределения, формально аналогичную системе уравнений магнитной гидродинамики с неизотропным тензором давления. Такое сходство результатов, полученных в двух, казалось бы противоположных случаях, объясняется тем, что магнитное поле, «заворачивая» частицы, симметризует распределение их по скоростям в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. В этом смысле действие магнитного поля аналогично влиянию столкновений.

В этом разделе из кинетического уравнения в дрейфовом приближении [5] выводятся уравнения газодинамики смеси двух газов (ионного и электронного).

Введем обозначения для моментов функции распределения:

$$\begin{aligned} n &= B \int f d^3v, & nu &= B \int v_{\parallel} f d^3v, \\ p &= MB \int f (v_{\parallel} - u)^2 d^3v, \\ \mu &= MB \int f \frac{v_{\perp}^2}{2B} d^3v, \\ Q &= MB \int f (v_{\parallel} - u)^3 d^3v. \\ d^3v &= d\mu dv_{\parallel} d\alpha, & \mu &= \frac{v_{\perp}^2}{2B}. \end{aligned}$$

Предполагая, что отсутствует поток тепла вдоль магнитного поля  $Q$ , проинтегрируем по скоростям уравнение дрейфового движения (4) и кинетическое уравнение (5), умноженное на различные степени скоростей  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$ .

В результате получим замкнутую систему уравнений, описывающую движение ионной компоненты плазмы:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n(\varepsilon_0 u + \mathbf{u}) = 0, \quad (12)$$

$$M \frac{du}{dt} = -\frac{\omega}{n} \left( \varepsilon_0 \nabla \frac{p}{\omega} \right) + \left( \varepsilon_0, e\mathbf{E} - \frac{\mu \nabla B}{n} - M \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right), \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{pB^2}{n^3} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\mu}{n} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = u\varepsilon_0 + \frac{1}{\omega} \left[ \varepsilon_0 - \frac{e}{M} \mathbf{E} + u \frac{d\varepsilon_0}{dt} + \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \frac{p}{nM} (\varepsilon_0 \nabla) \varepsilon_0 + \frac{\mu \nabla B}{n} \right]. \quad (16)$$

Уравнения для электронной компоненты отличаются лишь знаком заряда и массой. Отметим, что уравнения движения (13), (16) могут быть записаны с помощью неизотропного тензора давления

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} \mu B & 0 \\ 0 & \mu B \\ & p \end{pmatrix}.$$

Закон изменения давления дается уравнениями  $\frac{d}{dt} \frac{pB^2}{n^3} = 0$  и  $\frac{d}{dt} \frac{\mu}{n} = 0$ , что соответствует адиабатам с  $\gamma = 3$  для продольного и  $\gamma = 2$  для поперечного движения. Роль поперечного адиабатического инварианта играет магнитный момент иона (электрона). Уравнения Максвелла (8)–(11) можно переписать, введя моменты функции распределения  $n$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $\mu$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi e}{c} \left\{ -c \operatorname{rot} \frac{\mu_i + \mu_e}{e} \varepsilon_0 + (n_i \mathbf{v}_{\text{др}}^{(i)} - n_e \mathbf{v}_{\text{др}}^{(e)}) \right\}.$$

Рассмотрение движений вдоль силовых линий магнитного поля при помощи полученных уравнений требует выполнения специального условия отсутствия потока тепла вдоль силовых линий магнитного поля. При нарушении этого условия пользоваться уравнением (14) незаконно, а вся система уравнений движения (12)–(16) становится неприменимой. В таких случаях последовательное рассмотрение должно проводиться на основе более сложной системы уравнений (7)–(11).

### 3. Гидродинамика плазмы низкого давления

С точки зрения проблемы удержания плазмы наиболее интересным является вопрос о ее равновесии и устойчивости. В случае сильного магнитного поля этот вопрос можно исследовать с помощью уравнений гидродинамики, в которых давление, вообще говоря, следует считать неизотропным. Однако в тех случаях, когда плазма удерживается в равновесии в течение времени, большего времени столкновений, продольное и поперечное давление выравниваются, и поэтому при рассмотрении равновесия такой плазмы давление можно считать изотропным. Анизотропию давления в этом случае нужно было бы учитывать только при исследовании устойчивости, когда инкременты могут превышать частоту соударений. Но, как следует из работы [4], учет анизотропии возмущенного давления при изотропном равновесном давлении приводит только к улучшению условий устойчивости. Поэтому при рассмотрении устойчивости изотропной плазмы также можно пользоваться обычной гидродинамикой: полученные таким образом условия устойчивости обладают даже некоторым запасом.

Рассмотрим гидродинамическое описание плазмы, давление которой много меньше давления магнитного поля, т. е.  $\frac{8\pi p}{B^2} \ll 1$ . В этом случае уравнения магнитной гидродинамики допускают некоторое упрощение. Действительно, скорость магнитогидродинамических волн  $c_B = \sqrt{\frac{B^2}{4\pi\rho}}$  намного больше скорости звука  $c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ , поэтому, если не рассматривать магнитогидродинамических волн, то можно положить  $c_B = \infty$ . Это означает, что любое возмущение плазмы, приводящее к смещению силовой линии в некотором месте в поперечном направлении, мгновенно передается вдоль силовой линии, и вся плазма вдоль этой линии приходит в движение. Уравнения такого движения можно получить с помощью разложения уравнений гидродинамики по степеням малого отношения давления плазмы к давлению магнитного поля. Положим:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \dots, \\ \rho &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \dots, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \dots, \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \{ \mathbf{B}_0 + \varepsilon \mathbf{B}_1 + \dots \}. \end{aligned}$$

Подставим это разложение в уравнения магнитной гидродинамики, приравняем нулю выражения при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и примем затем  $\varepsilon = 1$ .

Таким образом, мы получим следующую систему уравнений:

$$[\text{rot } \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_0] = 0, \quad \text{div } \mathbf{B}_0 = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_0], \quad (18)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla p_0 = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_0] + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1], \quad (19)$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \text{div } \rho_0 \mathbf{v}_0 = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = 0. \quad (21)$$

Ограничиваясь лишь членами нулевого порядка малости, мы отбросим все остальные уравнения и опустим индекс 0. Из уравнения (17), отвлекаясь от случая бессильных полей, получаем

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathbf{B} = \sum I_i \nabla \varphi_i,$$

где  $I_i$  — внешние токи;  $\varphi_i$  — соответствующие или скалярные потенциалы (вообще говоря, неоднозначные).

Для простоты будем считать, что токи не изменяются со временем, а несущие их проводники неподвижны, тогда

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

и из (18) получаем

$$\mathbf{v} = \varepsilon_0 v_{\parallel} + \frac{[\varepsilon_0, \nabla \Phi]}{B},$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{\mathbf{B}}{B}$ ;  $v_{\parallel}$  — произвольная функция от  $r, t$ ;  $\Phi$  — функция  $r, t$ , удовлетворяющая условию  $\varepsilon_0 \nabla \Phi = 0$ .

Подставляя это выражение для  $\mathbf{v}$  в (19), мы должны рассматривать (19) как уравнение для определения  $\mathbf{B}_1$ . При этом, как известно, должно выполняться условие разрешимости: левая часть уравнения (19) должна быть ортогональна к решению однородного уравнения, сопряженного с уравнением

$$L\mathbf{B}_1 = [\text{rot } \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_0] = 0.$$

Это условие приводит к следующим уравнениям:

$$\rho \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial t} + \rho \varepsilon_0 (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \varepsilon_0 \nabla p = 0, \quad (22)$$

$$\int \text{div} \left\{ \frac{\rho}{B^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{B} [\varepsilon_0, (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}] - \frac{1}{B} [\varepsilon_0, \nabla p] \right\} \frac{dl}{B} = 0, \quad (23)$$

где интеграл берется вдоль любой силовой линии.

Совместно с (20), (21) эти уравнения описывают поведение плазмы низкого давления в нулевом приближении. Следует отметить, что этого приближения оказывается недостаточно в том случае, когда магнитное поле

таково, что силовые линии не замкнуты, а заполняют целую поверхность. Действительно, в этом случае  $\Phi$  должна быть постоянной на этой поверхности и у  $\mathbf{v}$  остаются только две степени свободы.

Если в уравнениях (22), (23) положить  $\mathbf{v} = 0$ , то мы получим условия равновесия, которые могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned}(\varepsilon_0 \nabla p) &= 0, \\ [\nabla p, \nabla U] &= 0, \\ U &= - \int \frac{dt}{B},\end{aligned}\tag{24}$$

т. е. давление  $p$  должно быть постоянно на поверхности  $U = \text{const}$ .

Уравнения (20)–(23) можно использовать для исследования устойчивости. Положим

$$\begin{aligned}p &= p_0 + p', \\ \rho &= \rho_0 + \rho', \\ \mathbf{v} &= \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_{\parallel} + \boldsymbol{\eta}_{\perp} = \boldsymbol{\eta}_{\parallel} \varepsilon_0 + \frac{[\varepsilon_0 \nabla \varphi]}{B},$$

где  $p_0, \rho_0$  — равновесные значения давления и плотности;  $p', \rho', \boldsymbol{\eta}$  — малые величины.

Подставляя эти выражения в (20)–(23) и пренебрегая малыми величинами высших порядков, мы получим линеаризованные уравнения для малых колебаний. Можно показать, что эти уравнения могут быть получены из вариационного принципа  $\delta \int L dt$  ( $L = T - V$ ;  $T$  — кинетическая энергия;  $T = \frac{1}{2} \int \rho_0 \left( \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} \right)^2 d\mathbf{r}$ ;  $V$  — потенциальная энергия плазмы). Если ввести криволинейные координаты  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , такие что линии  $\xi_3$  совпадают с силовыми линиями магнитного поля (по предположению замкнутыми), то можно записать

$$V = -\frac{1}{2} \int \frac{B\sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}} (\boldsymbol{\eta}_{\perp} \nabla p_0)(\boldsymbol{\eta}_{\perp} \nabla U) d\xi_1 d\xi_2 + \frac{1}{2} \int \gamma p_0 (\text{div } \boldsymbol{\eta})^2 d\mathbf{r},\tag{25}$$

где  $g_{33}$  — компонента метрического тензора;  $g = \text{Det } g_{ik}$ .

Для устойчивости плазмы необходимо и достаточно, чтобы потенциальная энергия  $V$  была положительно определенной, т. е. чтобы ее минимальное значение было положительным. Минимизирование (25) по  $\boldsymbol{\eta}_{\parallel}$  приводит к выражению

$$V_{\text{мин}} = -\frac{1}{2} \int \frac{B\sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}} \left\{ (\boldsymbol{\eta}_{\perp} \nabla p_0)(\boldsymbol{\eta}_{\perp} \nabla U) + \frac{\gamma p_0}{U} (\boldsymbol{\eta}_{\perp} \nabla U)^2 \right\} d\xi_1 d\xi_2,\tag{26}$$

из которого видно, что для устойчивости плазмы низкого давления необходимо и достаточно \*) выполнение неравенства

$$\nabla p_0 \nabla U + \frac{\gamma p_0}{U} (\nabla U)^2 < 0.\tag{27}$$

\*) Для поля с осевой симметрией это условие было получено в работе [4] несколькими методами.

Это условие сходно с условием конвекционной устойчивости неравномерно нагретого газа в поле тяжести: как в газе уменьшение температуры с высотой не может быть больше некоторого предела, так и в плазме давление не может, согласно (27), возрастать слишком быстро при увеличении  $U$ .

Если плазма имеет резкую границу, то первое слагаемое в (27) много больше второго, и, следовательно, условие устойчивости имеет вид

$$(\nabla p_0 \nabla U) < 0.$$

Это условие было получено ранее в работе [5] из энергетических соображений.

#### 4. Неустойчивость плазмы с анизотропным распределением скоростей ионов в магнитном поле

Если равновесное давление не является изотропным, то в плазме обнаруживается дополнительного рода неустойчивость. Чтобы исследовать этот эффект в чистом виде, мы рассмотрим случай однородной плазмы, являющейся устойчивой при изотропном давлении. При этом мы опять могли бы воспользоваться приведенными выше уравнениями анизотропной гидродинамики, но более точным является, конечно, кинетическое рассмотрение, которое может быть проведено до конца в рассматриваемом нами случае однородной плазмы. Расчеты показывают, что оба рассмотрения приводят к качественно согласующимся критериям устойчивости, хотя они и не совпадают количественно (ситуация здесь вполне аналогична имеющей место в вопросе о ленгмюровских колебаниях плазмы).

Предположим, что можно пренебречь соударениями между частицами и что длина волны возмущений много больше среднего ларморовского радиуса ионов, а инкременты много меньше ларморовской частоты. При этих условиях можно воспользоваться уравнениями (6)–(11) дрейфового приближения.

Невозмущенную функцию распределения выберем в виде

$$f_0(v_{\perp}^2, v_{\parallel}^2) = \frac{n_0 M^{3/2}}{\pi^{3/2} 2 T_{\perp} \sqrt{2 T_{\parallel}}} \exp\left(-\frac{M v_{\parallel}^2}{2 T_{\parallel}} - \frac{M v_{\perp}^2}{2 T_{\perp}}\right).$$

Линеаризуя исходные уравнения по малому возмущению и производя преобразования Фурье по координатам, а преобразования Лапласа по времени, получим характеристическое уравнение для инкремента  $p = p(k_y, k_z)$  (ось  $z$  направлена вдоль невозмущенного поля  $\mathbf{B}_0$ ).

Для малых  $p$  характеристическое уравнение имеет вид

$$\frac{p}{k_z} = \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{M}} \frac{\frac{8\pi n_0 T_{\perp}}{B_0^2} \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1\right) - \left(1 + \frac{8\pi n_0 T_{\perp}}{B_0^2} - \frac{8\pi n_0 T_{\parallel}}{B_0^2}\right) \frac{k_z^2}{k_y^2} - 1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{8\pi n_0 T_{\perp}}{B_0^2} \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}} \quad (k_z \neq 0; k_y \neq 0). \quad (28)$$

Возмущения экспоненциально нарастают во времени, если

$$\frac{8\pi n_0 T_{\perp}}{B_0^2} \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1\right) > \left(1 + \frac{8\pi n_0 T_{\perp}}{B_0^2} - \frac{8\pi n_0 T_{\parallel}}{B_0^2}\right) \frac{k_z^2}{k_y^2} + 1. \quad (29)$$



В предельном случае  $B_0 \rightarrow 0$  условие неустойчивости переходит в  $T_\perp > T_\parallel$ . Если же  $k_y = 0$ , то характеристическое уравнение имеет вид

$$\frac{p^2}{k_z^2} = -\frac{B_0^2}{4\pi n_0 M} \left\{ 1 + \frac{8\pi n_0 T_\perp}{B_0^2} - \frac{8\pi n_0 T_\parallel}{B_0^2} \right\}, \quad (30)$$

что соответствует альвеновской магнитогиродинамической ветви. При

$$\frac{8\pi n_0 T_\parallel}{B_0^2} > 1 + \frac{8\pi n_0 T_\perp}{B_0^2} \quad (31)$$

появляется неустойчивость. Если  $B_0 \rightarrow 0$ , этот критерий переходит в  $T_\parallel > T_\perp$ .

Дадим физическую интерпретацию неустойчивости возмущений в плазме, возникающей при анизотропии температур. Пусть на однородном фоне произошло некоторое возмущение плотности. Вследствие диамагнетизма неизотропной плазмы в местах, где увеличивается плотность, магнитное поле уменьшилось. Появился градиент магнитного поля и магнитные силовые линии искривились. При малой кривизне силовых линий ( $\frac{k_z}{k_y} \ll 1$ ) и  $T_\perp > T_\parallel$  основной силой, действующей на плазму, будет  $-(\boldsymbol{\mu}\nabla)B$ , которая стремится увеличить первоначальное возмущение. Если  $T_\perp < T_\parallel$ , сила  $-(\boldsymbol{\mu}\nabla)B$  скомпенсируется продольным давлением, препятствующим нарастанию возмущения плотности.

При большой кривизне силовых линий возмущенного магнитного поля ( $\frac{k_z}{k_y} \gg 1$ ,  $k_y$  мало) и при  $T_\parallel > T_\perp$  появляются большие нескомпенсированные центробежные силы  $-p\frac{\mathbf{R}}{R^2}$  ( $\mathbf{R}$  — радиус кривизны магнитной силовой линии). Нетрудно видеть, что они действуют в сторону увеличения первоначального возмущения.

Все изложенные расчеты линейны и естественно не могут дать ответа на вопрос о предельной амплитуде нарастающих колебаний анизотропной плазмы.

Рассмотрение второго приближения, проведенное для ряда простых предельных случаев, показывает, что возникновение описываемой неустойчивости приводит к перекачке кинетической энергии частиц из поперечного движения в продольное, если неустойчивость связана с тем, что  $T_\perp > T_\parallel$  и обратно — в противоположном случае. Поэтому представляется разумным предположить, что развитие неустойчивости происходит до тех пор, пока не выровняются энергии продольного и поперечного движения, т. е. пока не произойдет некоторое эффективное выравнивание поперечной и продольной «температур».

## 5. Исследование устойчивости цилиндрического плазменного шнура с помощью кинетического уравнения

В этом пункте мы рассмотрим вопросы устойчивости цилиндрического высокотемпературного плазменного шнура. Предположим, что выполнены все условия дрейфового приближения. Для простоты будем пренебрегать

температурой электронов в сравнении с температурой ионов. При этих предположениях можно воспользоваться исходными формулами предыдущего пункта.

В равновесном состоянии цилиндр плазмы предполагаем однородным по оси (ось  $Z$ ) и по азимуту ( $\varphi$ ). Вне цилиндра  $B_{\varphi e}^0(r) = \frac{2I}{r}$ ,  $B_{ze}^0 = \text{const}$ . Внутри цилиндра  $B_{\varphi i}^0 = 0$ ,  $B_{zi}^0 = B_0 = \text{const}$  (индексы  $i$ ,  $e$  относятся к полям внутри и вне цилиндра соответственно), функция распределения ионов

$$f_0(v_{\perp}^2, v_{\parallel}^2) = \frac{n_0 M^{3/2}}{\pi^{3/2} \cdot 2T_{\perp} \sqrt{2T_{\parallel}}} \exp\left(-\frac{Mv_{\parallel}^2}{2T_{\parallel}} - \frac{Mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}}\right)$$

( $n_0$  — плотность электронов).

Электрическим полем  $E_z$  пренебрегаем, предполагая, что оно всегда уничтожается движением электронов вдоль оси  $Z$ . Это справедливо при условии  $\frac{\partial}{\partial t} \ll \omega_0$  ( $\omega_0$  — ленгмюровская частота электронов).

На поверхности цилиндра должно выполняться условие

$$8\pi p_{\perp} = B_{\varphi e}^2 + B_{ze}^2 - B_{zi}^2,$$

где

$$p_{\perp} = \int \frac{Mv_{\perp}^2}{2} (f_0 + f_1) d\mathbf{v}.$$

Движение границы описывается уравнением дрейфа

$$\mathbf{v}_{\text{др}} = c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2}.$$

Возмущенные величины запишем в виде

$$F(r, \varphi, z, t) \sim F(r) e^{i(kz + m\varphi - \omega t)}.$$

Обычный способ вычислений приводит к дисперсионному уравнению

$$\frac{I_m(\alpha)}{\alpha I_m(\alpha)} \left(1 - \frac{(m + khe)^2}{k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m}\right) = h_{zi}^2 \left(1 + \frac{8\pi n_0 T_{\perp}}{B_0^2} + \frac{k\pi}{B_0^2} \int \frac{v_{\perp}^4 d^3v}{\omega + kv_{\parallel}} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}}\right). \quad (32)$$

Здесь  $I_m$ ,  $K_m$  — функции Бесселя от мнимого аргумента; параметр  $\alpha$  определяется соотношением

$$\alpha^2 = \frac{k^2 \left[1 + \frac{4\pi n_0}{B_0^2} (T_{\perp} - T_{\parallel})\right] - \frac{\omega^2}{c_B^2}}{1 + \frac{8\pi n_0 T_{\perp}}{B_0^2} + \frac{\pi k}{B_0^2} \int \frac{v_{\perp}^4 d^3v}{\omega + kv_{\parallel}} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}}},$$

$$c_B^2 = \frac{B_0^2}{4\pi n_0 M},$$

$$h_i = \frac{B_i^0}{B_{\varphi e}^0}.$$

Это уравнение по форме имеет много общего с дисперсионным уравнением, полученным В.Д. Шафрановым в магнитогидродинамическом приближении [6].

Рассмотрим ряд частных случаев.

1.  $T_{\perp} = T_{\parallel}$ .

В этом случае критерий устойчивости в точности совпадает с критерием, полученным В.Д. Шафрановым при  $\gamma = 2$ . Зависимость инкремента от волнового вектора будет, естественно, отличной от полученной в [6] в гидродинамическом приближении.

2.  $I = 0$ ;  $B_{\varphi e}^0 = 0$ ;  $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$ .

Магнитогидродинамическое рассмотрение при этом условии не дает никаких неустойчивостей. В нашем случае возможна неустойчивость цилиндра в продольном магнитном поле без тока вдоль оси. Критерий ее особенно просто можно записать для длин волн возмущений, по оси много больших радиуса плазменного шнура.

Шнур будет неустойчив, если

$$B_{ze}^2 + B_{zi}^2 + 4\pi n_0(T_{\perp}^0 - T_{\parallel}) < 0. \quad (33)$$

Это условие может быть выполнено лишь при

$$T_{\perp} < T_{\parallel}.$$

В противоположном предельном случае коротковолновых возмущений возможна неустойчивость и при  $T_{\perp} > T_{\parallel}$ . Критерий такой неустойчивости

$$\alpha_{(\omega=0)}^2 < 0. \quad (34)$$

3. Колебательная ветвь.

Учет теплового движения приводит к затуханию магнитозвуковых волн в цилиндре (аналогично затуханию Ландау). Для малых  $k$  мнимая часть  $\omega$  (считая затухание малым) имеет вид

$$Im(\omega) = \frac{8\pi n_0 T}{B_i^2} \frac{B_e^2}{B_i^2} \cdot \alpha^2 c_B^2 \frac{k\sqrt{\pi M/(2T)}}{2(m+k)(2m+1)} \exp\left[-\frac{M}{2T} \left(\frac{\omega}{k}\right)^2\right]. \quad (35)$$

Неустойчивость, связанная с анизотропией температур, может быть наблюдаема в опытах по так называемому адиабатическому нагреву, когда при падении магнитного поля уменьшается лишь поперечная температура плазмы, а продольная остается постоянной, если пренебречь столкновениями.

В экспериментах по быстрому сжатию плазменного шнура время сжатия может быть меньше времени свободного пробега ионов. Это автоматически приводит к анизотропии температур, что может сделать условия устойчивости более жесткими.

## 6. Нелинейные одномерные движения разреженной плазмы

Обратимся теперь к вопросу о том, какими особенностями характеризуется движение разреженной плазмы, далекой от равновесного состояния. Ограничимся случаем, когда все величины зависят лишь от одной пространственной координаты  $x$  поперек магнитного поля, направленного вдоль оси  $Z$ :

$$\mathbf{V} = \{0, 0, V(x)\}.$$

Тогда при выполнении условий (2) и (3) малости пространственных и временных градиентов справедлива система уравнений (12)–(16) гидроди-

намического типа. Однако для произвольного движения плазмы, вообще говоря, по истечении некоторого времени эти условия перестают выполняться.

Действительно, формальное сходство системы уравнений (12)–(16) с уравнениями обычной газовой динамики при  $\gamma = 2$  позволяет непосредственно обобщить на случай разреженной плазмы в магнитном поле известное решение Римана, приводящее к образованию ударной волны, резкий перепад скорости и температуры на фронте которой приводит к сильному возрастанию энтропии, вследствие вязкости и теплопроводности плазмы. В разреженной плазме, однако, картина образования «разрыва» иная. В [7] была выдвинута гипотеза о возможности ударной волны и в этом случае. В качестве механизма, приводящего к неадиабатичности, рассматривалось несохранение магнитного момента ионов в поле с большими градиентами.

Строгое исследование этого вопроса является весьма сложным, поскольку даже движение одиночного заряда в произвольных неоднородных полях не поддается расчету без вычислительных машин. Если проследить за изменением энергии ларморовского вращения заряда на «скачке» магнитного поля, что могло бы служить простейшей идеализацией процессов внутри фронта волны, то окажется, что дополнительное (неадиабатическое) возрастание энергии ларморовского вращения отдельных ионов еще не означает неадиабатического возрастания энергии хаотического движения, так как происходит группировка фаз вращения ионов на ларморовской окружности. Эта группировка фаз приводит к тому, что суммарный локальный заряд ионов будет осциллировать. В самосогласованной задаче это могло бы привести к возникновению колебаний. Длина затухания, которое в принципе может иметь место и в отсутствии столкновений (например, вследствие механизма Ландау или из-за «размешивания» фаз в неоднородном магнитном поле) будет определять длину волны. Условие (3) при увеличении крутизны профиля скорости нарушается раньше, чем (2), так как

$$T \sim \frac{L}{\left(\frac{B^2}{4\pi\rho} + u^2\right)^{1/2}}.$$

Поэтому можно было бы ожидать длину волны колебаний, равной по порядку величины

$$\lambda \sim \left(\frac{B^2}{4\pi\rho} + u^2\right)^{1/2} \frac{1}{\omega_i}$$

(для плазмы низкого давления  $\lambda \sim \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}\omega_i} = \frac{c}{\omega_{Li}}, \omega_{Li}^2 = \frac{4\pi e^2 n}{M}$ ).

Однако можно показать, пользуясь точными уравнениями движения ионов и электронов, что, если пренебречь давлением плазмы, для применимости решения Римана вместо (3) (условие (2) тогда выполняется тождественно, так как  $p_{\perp} = 0$ ) достаточно предположить квазинейтральность плазмы. Отступление от квазинейтральности появляется, очевидно, когда характерный пространственный масштаб, уменьшаясь, сравнивается с дебаевским радиусом, который в нерелятивистском случае меньше,

чем  $\frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}\omega_i}$ .

В обычной газовой динамике единственным типом стационарного движения является установившаяся ударная волна. В разреженной плазме существует, кроме того, решение, представляющее собой бегущую магнитозвуковую волну конечной амплитуды. Длина такой волны (которая может иметь вид одиночного импульса)  $\sim \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho\omega L_i}}$ , и в ней существенно разделение зарядов. Если пренебречь тепловым движением, уравнение, связывающее скорость этой волны с амплитудой магнитного поля, имеет вид

$$u^2 = \frac{(B_1 + B)^2}{16\pi\rho_0},$$

причем амплитуда магнитного поля в волне  $B_1$  не может превышать  $3B_0$ .

Поправка к скорости за счет теплового движения имеет вид

$$u_1 = \frac{\alpha^2 \left( \sqrt{u_0^2 - \gamma} - \frac{3}{4} u_0 \right)}{2u_0^2 - \gamma - 2u_0 \sqrt{u_0^2 - \gamma}},$$

где

$$u_0 = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad \gamma = \frac{(B_1 - B_0)B_0}{2\pi\rho_0}, \quad \alpha^2 = \frac{2T_0}{M}.$$

Из этой формулы видно, что переход к волне малой амплитуды приводит к бессмысленному результату (знаменатель обращается в нуль). Этот факт, по-видимому, связан с существованием в линейном приближении затухания, аналогичного затуханию Ландау.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность академику М.А. Леонтовичу за ценные советы и постоянное внимание к работе.

### Список литературы

1. Боголюбов Н.Н., Зубарев Д.Н. // Укр. мат. ж. 1955. Т. VII. С. 5.
2. Chew G., Coldberger M., Low F. // Proc. Roy. Soc. 1956. V. A236. P. 112.
3. Watson K., Watson K. and Brueckner K. // Phys. Rev. 1956. V. 102. P. 12.
4. Bernstein I., Frieman E., Kruskal M., Kulsrud R. // Proc. Roy. Soc. 1956. V. A244. P. 17.
5. Rosenbluth M., Longmire C. // Ann. Phys. 1957. V. 1. P. 120.
6. Шафранов В.Д. // Атомная энергия. 1956. № 5. С. 38.
7. Сагдеев Р.З., Веденов А.А. О механизме инжекции в атмосферах звезд. // Выступление на VI Всесоюзном совещании по космогонии. Июнь 1957.

# О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА \*)

Исследуется устойчивость плазменного шнура с распределенным током по отношению к аксиально-симметричным возмущениям, включая возмущения типа энтропийных волн.

Известно, что плазменные конфигурации с замкнутыми силовыми линиями обладают тем своеобразием, что в них наиболее опасной является конвективная или перестановочная неустойчивость, соответствующая перестановке соседних силовых трубок [1]. В настоящей работе производится подробное исследование простейшей конфигурации такого типа, а именно, прямого аксиально-симметричного плазменного шнура, удерживаемого магнитным полем текущего вдоль него тока. При этом основное внимание уделяется возмущениям конвективного типа, т. е. постоянным вдоль силовых линий. Равновесное распределение частиц по скоростям предполагается максвелловским, что справедливо, если время удержания шнура в равновесии превышает время между соударениями. Проводимость плазмы считается бесконечной.

## 1. Гидродинамическое приближение

Как показано в работах [2, 3], уравнения магнитной гидродинамики для малых колебаний приводятся к одному самосопряженному уравнению для смещения  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}, t)$  плазмы из положения равновесия. Это уравнение может быть получено [2, 3] из вариационного принципа наименьшего действия, откуда следует, что для устойчивости плазмы необходимо и достаточно, чтобы потенциальная энергия малых колебаний была положительной.

Мы предположим, что плазма ограничена проводящим кожухом, на границе которого радиальная компонента  $\eta_r$  обращается в нуль. Тогда потенциальная энергия равна

$$V = \frac{1}{2} \int \left\{ \gamma p (\operatorname{div} \boldsymbol{\eta})^2 + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} [\boldsymbol{\eta} \mathbf{H}])^2 + \boldsymbol{\eta} \nabla p \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{4\pi} [\boldsymbol{\eta} \operatorname{rot} \mathbf{H}] \operatorname{rot} [\boldsymbol{\eta} \mathbf{H}] \right\} d\mathbf{r}, \quad (1)$$

причем в силу самосопряженности компонента смещения вдоль поля из двух последних слагаемых в (1) выпадает. В выражении (1)  $p$  и  $\mathbf{H}$  представляют собой равновесные давление и магнитное поле,  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты.

В рассматриваемом нами случае  $H_z = 0$  потенциальная энергия (1) для аксиально-симметричных возмущений представляет собой квадратичную форму от двух независимых переменных  $\eta_r, \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}$ . Условие того, что эта

---

\*) ЖЭТФ. 1959. Т. 37. Вып. 4(10). С. 1096–1101.

форма является положительно определенной, имеет вид

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{4\gamma}{2} + \gamma\varepsilon, \quad (2)$$

где  $\varepsilon = 8\pi p/H^2$ . Нетрудно убедиться, что оно может быть также получено как следствие одного из общих условий конвективной устойчивости [1].

Рассмотрим теперь возмущения, зависящие от азимута  $\varphi$ . Без ограничения общности эту зависимость можно выбрать в виде

$$\eta_r = \eta_r(r, z) \cos m\varphi, \quad \eta_\varphi = \eta_\varphi(r, z) \sin m\varphi, \quad \eta_z = \eta_z(r, z) \sin m\varphi.$$

При этом в (1) появятся множители  $\cos^2 m\varphi$ ,  $\sin^2 m\varphi$ , дающие при усреднении 1/2. Вариация (1) по  $\eta_\varphi$  дает  $\operatorname{div} \eta = 0$ , откуда получаем

$$V = \frac{1}{4} \int \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{m^2 H^2}{r^2} (\eta_r^2 + \eta_z^2) + \frac{1}{4\pi} \left[ H \frac{\partial \eta_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (H \eta_r) \right]^2 + \right. \\ \left. + \eta_r \frac{dp}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \eta_r) + \frac{\partial \eta_z}{\partial z} \right] + \eta_r \left[ \frac{\partial \eta_z}{\partial z} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial r} (H \eta_r) \right] \frac{dp}{dr} \right\} dr. \quad (3)$$

Выражение (3) представляет собой квадратичную форму от  $\eta_r$ ,  $\eta_z$ ,  $\partial \eta_r / \partial r + \partial \eta_z / \partial z$ . Условие того, что эта форма является положительно определенной, имеет вид \*)

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{m^2}{\varepsilon}. \quad (4)$$

При  $\varepsilon < (2/3)\gamma$  более сильным является условие (2), а при  $\varepsilon > (2/3)\gamma$  — условие (4) с  $m = 1$ . Интересно отметить, что на многих фотографиях «сжимающегося» шнура можно отчетливо выделить две области: внутреннюю, где развиваются змейковые неустойчивости ( $m = 1$ ), и внешнюю, где в основном преобладают аксиально-симметричные возмущения. Эта картина полностью согласуется с условиями (2), (4).

Полагая

$$\frac{d \ln p}{d \ln r} = \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon} & \text{при } \varepsilon > \frac{2}{3}\gamma, \\ -\frac{4\gamma}{2 + \gamma\varepsilon} & \text{при } \varepsilon < \frac{2}{3}\gamma \end{cases} \quad (5)$$

и учитывая условие равновесия, которое можно записать в виде

$$\frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \left( \frac{d \ln \varepsilon}{d \ln r} - 2 \right), \quad (6)$$

нетрудно получить предельное устойчивое распределение давления. Для  $\gamma = 5/3$  оно имеет вид

$$p = p_0 \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad r = a(1 - \varepsilon) \text{ при } \varepsilon > 0,4, \\ p = 18,1 p_0 \left( \frac{\varepsilon}{1 + (5/4)\varepsilon} \right)^{5/2}, \quad r = 3,94 a \frac{1 + (5/4)\varepsilon}{\varepsilon^{3/4}} \text{ при } \varepsilon < 0,4, \quad (7)$$

где  $p_0$ ,  $a$  — константы интегрирования. Это распределение обладает особенностью при  $r \rightarrow 0$  и экспериментально недостижимо. Однако если

\*) В другой форме это соотношение содержится в работе [4].

вдоль оси  $z$  расположить металлический проводник с током, то можно добиться, чтобы плазма вблизи оси была устойчивой. При этом необходимо, как следует из (2), (4), (6), чтобы величина  $\varepsilon$  всюду была меньше 1, а давление плазмы не слишком быстро убывало с радиусом.

## 2. Кинетическое рассмотрение

В высокотемпературной плазме время соударений может достигать весьма больших значений, и в этом случае гидродинамическое приближение является неверным.

В сильном магнитном поле можно воспользоваться уравнениями дрейфового приближения, представляющими собой сочетание уравнений гидродинамики для движения поперек силовых линий и кинетического — для продольного движения [5].

В рассматриваемом нами случае осевой симметрии они имеют вид

$$Mn \frac{\partial^2 \boldsymbol{\eta}}{\partial t^2} = -\nabla p'_{\perp} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} (p'_{\parallel} - p'_{\perp}) + \frac{1}{4\pi} [\text{rot rot } [\boldsymbol{\eta}, \mathbf{H}], \mathbf{H}] + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \text{rot } [\boldsymbol{\eta}, \mathbf{H}]], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'}{\partial t} + \frac{u}{r} \frac{\partial f'}{\partial \varphi} + \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} \nabla f_0 + \frac{u}{r} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \varphi} \nabla f_0 - \\ - \left\{ \frac{u}{T} e E'_{\varphi} - \frac{Mu^2}{T} \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_r}{\partial t} + \frac{Mw^2}{2T} \text{div} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t} - \frac{Mw^2}{2T} \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_r}{\partial t} \right\} f_0 = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь  $f_0$  — равновесная максвелловская функция распределения ионов,  $T$  — температура,  $E'_{\varphi}$  — азимутальная компонента электрического поля,  $f'$  — возмущение функции распределения,  $p'_{\perp}$  и  $p'_{\parallel}$  — возмущения соответственно поперечного и продольного давлений;  $M$  — масса,  $n$  — плотность ионов,  $u$  — продольная,  $w$  — поперечная скорости ионов.

Рассмотрим возмущения, зависящие от азимута как  $e^{im\varphi}$  ( $m \neq 0$ ) и предположим, что частота колебаний  $\omega \ll v_T/r$ , где  $v_T$  — средняя тепловая скорость ионов. Тогда в уравнении (9) можно пренебречь производными по времени, в соответствии с чем получаем

$$f' = -\boldsymbol{\eta} \nabla f_0 - ire E'_{\varphi} \frac{f_0}{MT}.$$

Аналогичное соотношение имеет место и для электронов. Поле  $E'_{\varphi}$  находится из условия квазинейтральности и, как нетрудно видеть,  $E'_{\varphi} = 0$ . Таким образом,  $f' = -\boldsymbol{\eta} \nabla f_0$ , откуда  $p'_{\parallel} = p'_{\perp} = -\boldsymbol{\eta} \nabla p_0$ . Если подставить это в (8), то мы получим уравнение, в точности совпадающее с магнитогидродинамическим с  $\text{div } \boldsymbol{\eta} = 0$ , т. е. приходим к тому же критерию устойчивости (4), что и в гидродинамическом приближении.

Рассмотрим теперь возмущения с осевой симметрией ( $m = 0$ ). Уравнение (9) при этом может быть проинтегрировано по времени и приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} p'_{\perp} &= -\eta_r \frac{dp}{dr} - 2p \text{div } \boldsymbol{\eta} + p \frac{\eta_r}{r}, \\ p'_{\parallel} &= -\eta_r \frac{dp}{dr} - p \text{div } \boldsymbol{\eta} - 2p \frac{\eta_r}{r}, \end{aligned} \quad (10)$$



совпадающим с адиабатами Чу, Гольдбергера и Лоу [6]. Как было показано в работе [3], уравнения гидродинамики с такого рода анизотропией давления также могут быть получены из вариационного принципа с потенциальной энергией, равной в нашем случае

$$V_k = \frac{1}{2} \int \left\{ \eta_r \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} \frac{dp}{dr} + 2p(\operatorname{div} \boldsymbol{\eta})^2 - \frac{2p}{r} \eta_r \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} + 3p \frac{\eta_r^2}{r^2} + \frac{1}{4\pi} \left[ H \frac{\partial \eta_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (H \eta_r) \right]^2 + \frac{1}{H} \frac{dp}{dr} \eta_r \left[ H \frac{\partial \eta_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (H \eta_r) \right] \right\} dr. \quad (11)$$

Условие того, что квадратичная форма (11) от  $\eta_r$ ,  $\operatorname{div} \boldsymbol{\eta}$  является положительно определенной, имеет вид

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{7/2 + 5\varepsilon/4}{1 + \varepsilon}. \quad (12)$$

Это условие несколько слабее (2), и поэтому представляет интерес выяснить влияние соударений между частицами, которые приводят к выравниванию продольного и поперечного давлений. Чтобы не усложнять выкладок, мы пренебрежем разницей между временами выравнивания электронных и ионных давлений и введем некоторое среднее время релаксации  $\tau$ . Учитывая, что при соударениях полная энергия частиц сохраняется, нетрудно видеть, что релаксация давления описывается соотношениями

$$-\frac{\partial p'_\perp}{\partial t} = -\frac{1}{3\tau} (p'_\perp - p'_\parallel), \quad \frac{\partial p'_\parallel}{\partial t} = -\frac{2}{3\tau} (p'_\parallel - p'_\perp). \quad (13)$$

Предположим, что все величины меняются со временем по закону  $e^{\lambda t}$ . Тогда соотношение (10) с учетом эффекта соударений запишется в виде

$$p'_\perp + \frac{1}{3\lambda\tau} (p'_\perp - p'_\parallel) = -\eta_r \frac{dp}{dr} - 2p \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} + \frac{p}{r} \eta_r, \quad (14)$$

$$p'_\parallel + \frac{2}{3\lambda\tau} (p'_\parallel - p'_\perp) = -\eta_r \frac{dp}{dr} - p \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} - \frac{2p}{r} \eta_r.$$

Если определить отсюда  $p'_\parallel$ ,  $p'_\perp$  и подставить в уравнение (8), то, пренебрегая инерционным членом в левой части, получим уравнение, которое можно рассматривать как уравнение Эйлера вариационной задачи  $\delta(V_k + V/(\lambda\tau)) = 0$  с собственным числом, равным нулю, т. е. его решение удовлетворяет уравнению

$$V_k + \frac{V}{\lambda\tau} = 0. \quad (15)$$

Здесь  $V_k$  дается соотношением (11), а  $V$  — формулой (1). Из (15) следует, что  $\lambda\tau$  является действительной величиной.

Пусть энергия  $V_k$  является положительной, т. е. без соударений, состояние плазмы является устойчивым. Тогда, если  $V$  является положительной, то уравнение (15) имеет лишь затухающие решения с  $\lambda < 0$ , а если  $V$  может принимать отрицательные значения, то среди всех экстремальных значений функционала  $F = V_k + V/(\lambda\tau)$  обязательно найдется такое, которое обращается в нуль при изменении параметра  $\lambda\tau$  от 0 до  $\infty$ . Это означает, что уравнение (15) имеет решения с инкрементом  $\lambda \sim 1/\tau > 0$ . Таким образом, две ветви (динамическая и связанная со столкновениями) малых колебаний, даваемые кинетическим уравнением, приводят к критерию устойчивости, в точности совпадающим с гидродинамическим.

### 3. Дрейфовая неустойчивость шнура

В работе Церковникова [7] было показано, что при определенных условиях в плазменном шнуре могут нарастать колебания, фазовая скорость которых порядка скорости дрейфа частиц. Так как в произведенном им кинетическом рассмотрении трудно выяснить физический смысл дрейфовой неустойчивости, то мы рассмотрим здесь этот вопрос с помощью уравнений гидродинамики, в которых сохраним малые величины порядка  $\rho/r$ , где  $\rho$  — ларморовский радиус ионов. В соответствии с этим в уравнениях переноса тепла учтем дрейфовые [8] тепловые потоки электронов ( $\alpha = e$ ) и ионов ( $\alpha = i$ ):

$$\mathbf{q}_\alpha = -\frac{5n_\alpha T_\alpha}{2e_\alpha H^2} [\mathbf{H} \nabla T_\alpha],$$

но пренебрежем обычной теплопроводностью и вязкостью, предполагая, что частота соударений частиц много меньше циклотронной частоты ионов, а длина волны возмущений много больше  $\rho$ . Предположим далее, что дебаевский радиус много меньше всех характерных длин, и, следовательно, выполняется условие квазинейтральности  $n_i = n_e = n$ . При этом условии и предположении, что все величины изменяются по закону  $\exp(-i\omega t + ikz)$  линеаризованные уравнения непрерывности записываются в виде

$$n' = -\operatorname{div}(\boldsymbol{\eta} n) = -\operatorname{div}(n \boldsymbol{\xi}) + \frac{kv_0}{\omega} n'. \quad (16)$$

Здесь  $n'$  — возмущенная плотность,  $\boldsymbol{\eta}$  — смещение ионов, а  $\boldsymbol{\xi}$  — электронов из положения равновесия,

$$v_0 = \frac{c}{eHn} \frac{dp}{dr}$$

— равновесная дрейфовая скорость электронов, приводящая к электрическому току вдоль оси шнура.

В качестве уравнений движения примем уравнение Эйлера

$$-\omega^2 n M \boldsymbol{\eta} + \nabla p' = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H}', \mathbf{H}] + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}'] \quad (17)$$

и уравнение переноса импульса для электронов, в котором пренебрежем инерционным членом

$$\frac{1}{n} \nabla p'_e - \frac{n'}{2n^2} \nabla p = -e \mathbf{E}' - \frac{e}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}'] + \frac{i\omega e}{c} [\boldsymbol{\xi} \mathbf{H}]. \quad (18)$$

Линеаризованные уравнения переноса тепла согласно [8] имеют вид

$$\begin{aligned} \omega \left( T'_e + \xi_r \frac{dT}{dr} + \frac{2}{3} T \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \right) - kv_0 T'_e + \frac{i}{2\tau} (T'_e - T'_i) = \\ = -\frac{5}{3} \frac{kT'_e}{n} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{rncT}{eH} \right) + \frac{5}{3} \frac{kcT}{eH} \frac{dT}{dr} \left( \frac{n'}{n} + \frac{T'_e}{T} - \frac{H'}{H} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \omega \left( T'_i + \eta_r \frac{dT}{dr} + \frac{2}{3} T \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} \right) + \frac{i}{2\tau} (T'_i - T'_e) = \\ = \frac{5}{3} \frac{kT'_i}{n} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{rncT}{eH} \right) - \frac{5}{3} \frac{kcT}{eH} \frac{dT}{dr} \left( \frac{n'}{n} + \frac{T'_i}{T} - \frac{H'}{H} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь последний член в левой части учитывает теплообмен между электронами и ионами,  $\tau$  — характерное время выравнивания температур.

Уравнения (16)–(20) совместно с уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' = \frac{4\pi e}{c} \{-n' \mathbf{v}_0 + i\omega(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})n\}, \quad (21)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}' = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}' \quad (22)$$

представляют собой полную систему уравнений малых колебаний.

Если отвлечься от магнитозвуковых колебаний, то в  $z$ -компоненте уравнения (17) можно пренебречь членом инерции, откуда получаем

$$p' + \frac{H'H}{4\pi} = 0. \quad (23)$$

Радиальная компонента (17) с учетом (23) дает

$$\eta_r = -\frac{2p'}{\omega^2 M r n}. \quad (24)$$

Из уравнения (21) с учетом (16), (23) имеем

$$\xi_r - \eta_r = \frac{kc}{e\omega n H} p', \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) = \frac{kv_0}{\omega} \frac{n'}{n} - \frac{kc}{\omega e H n^2} \frac{dn}{dr} p'. \quad (25)$$

Учитывая (23)–(25), приводим остальные уравнения к системе трех алгебраических уравнений

$$(\nu - q) \frac{T'}{T} + \left\{ 2 + \left( \frac{2}{5} + \frac{\varepsilon}{2} \right) q - s \right\} \frac{\theta}{T} + \left\{ -\frac{2}{5} \nu + s + \frac{4}{\nu k^2 \rho^2} \left( \frac{2}{5} q - s \right) \right\} \frac{p'}{p} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{5}{2} \left( 2 + \frac{\varepsilon}{2} q \right) \frac{T'}{T} + \left( \nu + \frac{i}{\tau^*} - q \right) \frac{\theta}{T} - \frac{5}{3} \frac{\varepsilon}{2} s \frac{p'}{p} = 0, \quad (27)$$

$$(\nu - q) \frac{T'}{T} + (q - s) \frac{\theta}{T} + \left\{ -\nu \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) - 4 + \varepsilon + \frac{4}{\nu k^2 \rho^2} \left[ 2 + \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) q - s \right] \right\} \frac{p'}{p} = 0. \quad (28)$$

Здесь

$$T' = \frac{T'_e + T'_i}{T}, \quad \theta = \frac{T'_e - T'_i}{T}, \quad q = \frac{d \ln p}{d \ln r}, \quad s = \frac{d \ln T}{d \ln r},$$

$$\nu = \frac{\omega e H r}{k c T}, \quad \tau^* = \tau \frac{k c T}{e H r}, \quad \rho = \sqrt{\frac{T M c^2}{e^2 H^2}},$$

$\rho$  — средний ларморовский радиус ионов. Уравнение (26) представляет собой полусумму, а (27) — полуразность уравнений переноса тепла (19), (20). Уравнение (28) получено из (22) подстановкой электрического поля из (18). Условие обращения в нуль детерминанта системы (26)–(28) дает дисперсионное уравнение четвертой степени. Так как коэффициенты этого уравнения являются функциями  $r$ , а частота считалась не зависящей от  $r$ , то возмущения должны быть локальными по  $r$ , строго говоря,  $\delta$ -функциями. Предположим, что длина волны возмущения много меньше ларморовского радиуса ионов  $k\rho \ll 1$ , тогда в дисперсионном уравнении будет присутствовать большой коэффициент  $1/(k^2 \rho^2)$ . При этом два корня являются большими, порядка  $\nu \sim 1/(k\rho)$ . Для них получаем

$$\omega^2 = \frac{2p}{Mnr} \left\{ \frac{d \ln p}{d \ln r} + \frac{4\gamma}{2 + \gamma\varepsilon} \right\}, \quad (29)$$

где  $\gamma = 5/3$ . Это, очевидно, частота конвективных колебаний, и условие  $\omega^2 > 0$  в точности совпадает с критерием (2).

Другие два корня порядка единицы и определяются уравнением

$$\left(\nu - q + \frac{i}{\tau^*}\right)(\nu - q) = \gamma^2 \frac{(4 + \varepsilon q)^2}{4\gamma + q(2 + \gamma\varepsilon)} \left\{1 + \left(\frac{7}{10} + \frac{\varepsilon}{4}\right)q - s\right\}. \quad (30)$$

Если (2) выполнено, то условие положительности мнимых частей корней уравнения (30) имеет вид

$$\frac{d \ln T}{d \ln r} < 1 + \left(\frac{7}{10} + \frac{\varepsilon}{4}\right) \frac{d \ln p}{d \ln r}. \quad (31)$$

В случае малой кривизны  $r \rightarrow \infty$  оно переходит в условие  $d \ln T / d \ln p < < 7/10 + \varepsilon/4$ , полученное ранее Церковниковым и представляющее собой гидродинамический аналог одного из условий, полученных в [7] с помощью кинетического уравнения. Условие (31) показывает, что при заданном  $d \ln p / d \ln r$  температура не может слишком быстро расти с  $r$ , а при заданном градиенте температуры давление должно не очень быстро падать с  $r$ .

Интересно отметить, что при  $d \ln T / d \ln r = 0$  условие (31) имеет вид (2) с  $\gamma = 5/7$ . Таким образом, дрейфовая теплопроводность приводит к более жесткому условию устойчивости, чем обычная, учет которой привел бы, очевидно, к условию (2) с  $\gamma = 1$  (изотермичность).

Согласно (26)–(28) при  $\nu \sim 1$  имеем  $p'/p \sim (k\rho)^2 T'/T \ll T'/T \sim \theta/T$ , т. е. рассматриваемые колебания представляют собой энтропийные волны, или возмущение температур  $T_e$  и  $T_i$  при постоянном давлении. Вследствие дрейфа частиц эти волны перемещаются вдоль оси шнура, а плазма, согласно (24), (25), совершает радиальные колебания  $\eta_r \approx \xi_r \sim rT'/T$ , которые компенсируют изменение давления за счет дрейфовой теплопроводности.

Если условие (31) не выполнено, то происходит раскачка таких колебаний, что приводит к перемешиванию тепла по радиусу до тех пор, пока градиент температуры не упадет до значения, даваемого соотношением (31).

Следует отметить, что в этих колебаниях существенную роль играет отличие температуры электронов от температуры ионов, поскольку  $\theta \rightarrow 0$  при  $\tau^* \rightarrow 0$  и уравнение (30) имеет только один и притом действительный корень  $\nu = q$ .

### Список литературы

1. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 370.
2. Hain K., Lüst R., Schlüter A. // Zs. Naturforsch. 1957. Bd. 12a. S. 833.
3. Bernstein J., Frieman E., Kruskal M., Kulsrud K. // Proc. Roy. Soc. 1958. V. A224. P. 17.
4. Tayler R. // Proc. Phys. Soc. 1957. V. B70. P. 1049.
5. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 380.
6. Chew G., Goldberger M., Low F. // Proc. Roy. Soc. 1956. V. A236. P. 112.
7. Церковников Ю.А. // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 67.
8. С.И. Брагинский. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 459.

## О РАВНОВЕСИИ ПЛАЗМЫ ПРИ ВИНТОВОЙ СИММЕТРИИ \*)

Приведен простой пример равновесия плазмы в магнитном поле с винтовой симметрией.

Задача о равновесии плазмы в магнитном поле сводится к решению системы уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \nabla p = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}]. \quad (1)$$

Мы рассмотрим здесь случай винтовой симметрии, когда давление плазмы  $p$  и компоненты магнитного поля  $H_r$ ,  $H_\varphi$ ,  $H_z$  в цилиндрической системе координат зависят только от  $r$  и  $\zeta = kz - m\varphi$  ( $m$  — целое число,  $\lambda = 2\pi/k$  — период изменения  $p$  и  $\mathbf{H}$  вдоль оси  $z$ ). Как показано Джонсоном и др. [1], система уравнений (1) может быть приведена в этом случае к одному нелинейному уравнению. В самом деле, из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_r) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( -\frac{m}{r} H_\varphi + kH_z \right) = 0$$

следует, что \*\*)

$$H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \quad \frac{m}{r} H_\varphi - kH_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

где  $\psi$  — произвольная функция от  $r$ ,  $\zeta$ . Далее, из соотношения  $\mathbf{H} \nabla p = 0$  следует, что  $p$  является функцией только  $\psi$ , а из уравнения  $\nabla p \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$  вытекает, что  $mH_z + krH_\varphi = I$ , где  $I$  — произвольная функция от  $\psi$ . С помощью этих соотношений компонента уравнения равновесия (1) вдоль  $\nabla \psi$  преобразуется к виду

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{k^2 r^2 + m^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + 4\pi \frac{dp}{d\psi} + \frac{I}{k^2 r^2 + m^2} \frac{dI}{d\psi} + \frac{2kmI}{(k^2 r^2 + m^2)^2} = 0. \quad (2)$$

Задаваясь определенными функциональными зависимостями  $p$  и  $I$  от  $\psi$  и решая уравнение (2), можно было бы в принципе получить всевозможные

\*) ЖЭТФ. 1959. Т. 37. В. 5(11). С. 1352-1354.

\*\*) Если проинтегрировать это соотношение по объему, ограниченному поверхностью  $\psi = \text{const}$  и плоскостями  $z = 0$ ,  $z = 2\pi/k$ , то получим

$$\psi = \frac{k}{2\pi} (m\Phi_\varphi - \Phi_z),$$

где

$$\Phi_z(\psi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\psi)} H_z r \, dr \, d\varphi, \quad \Phi_\varphi(\psi) = \int_0^{2\pi/k} \int_0^{r(\psi)} H_\varphi \, dr \, dz.$$

равновесные конфигурации с винтовой симметрией. Однако задача решения нелинейного уравнения слишком сложна. Лишь в простейшем случае, когда  $I$  и  $dp/d\psi$  представляют собой линейные функции от  $\psi$ , уравнение (2) оказывается линейным и может быть решено методом разделения переменных.

Мы рассмотрим здесь еще более простой пример равновесной конфигурации, когда  $I = \text{const}$ ,  $p = p_0 + (a/4\pi)\psi$ . При этом уравнение (2) приводится к виду

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{k^2 r^2 + m^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -a - \frac{2kIm}{(k^2 r^2 + m^2)^2}. \quad (3)$$

Отсюда получаем

$$\psi = -\frac{ar^2}{8} (k^2 r^2 + 2m^2) - \frac{kr^2 I}{2m} + A \left( \frac{k^2 r^2}{2} + m^2 \ln r \right) + \psi_1, \quad (4)$$

где  $A = \text{const}$ ,  $\psi_1(r, \zeta)$  — произвольное решение однородного уравнения.

По известной функции  $\psi$  находим давление плазмы и магнитное поле:

$$p = p_0 + \frac{a}{4\pi} \left\{ -\frac{ar^2}{8} (k^2 r^2 + 2m^2) - \frac{kr^2 I}{2m} + A \left( \frac{k^2 r^2}{2} + m^2 \ln r \right) + \psi_1 \right\}, \quad (5)$$

$$H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = H_{1r}, \quad (6)$$

$$H_\varphi = \frac{1}{m^2 + k^2 r^2} \left( m \frac{\partial \psi}{\partial r} + krI \right) = -\frac{mar}{2} + \frac{mA}{r} + H_{1\varphi}, \quad (7)$$

$$H_z = \frac{1}{m^2 + k^2 r^2} \left( -kr \frac{\partial \psi}{\partial r} + mI \right) = \frac{I}{m} - kA + \frac{akr^2}{2} + H_{1z}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{H}_1$  — безвихревое магнитное поле, определяемое функцией  $\psi_1$ .

Как мы видим, магнитное поле складывается из однородного магнитного поля вдоль оси  $z$ , поля от однородного ( $j_z = \text{const}$ ) и сосредоточенного на оси  $z$  ( $J_0 \sim A$ ) продольных токов, поля от азимутального линейно растущего с  $r$  тока  $j_\varphi$ , а также произвольного безвихревого поля  $\mathbf{H}_1$  с винтовой симметрией.

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае ( $I = \text{const}$ )  $j_\varphi = [kr/(2\pi m)]j_z$ , т. е. ток течет по винтовым линиям  $\zeta = \text{const}$ , чем и объясняется возможность добавления произвольного поля  $\mathbf{H}_1$  с той же симметрией без нарушения условия  $\mathbf{j} \nabla p = 0$ .

Для простоты ограничимся рассмотрением частного случая, когда

$$\psi_1 = \sin \zeta \cdot kr [BI'_m(kr) + CK'_m(kr)], \quad (9)$$

где  $A = \text{const}$ ,  $B = \text{const}$ ,  $I_m$  — функция Бесселя от мнимого аргумента,  $K_m$  — функция Макдональда. Общее решение уравнения для  $\psi_1$  может быть представлено в виде ряда по функциям типа (9).

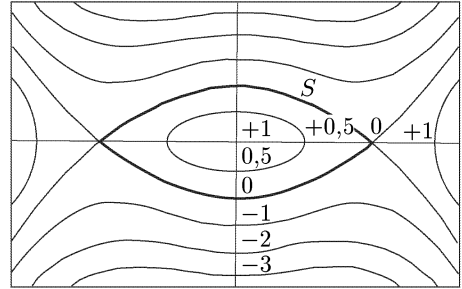
Если потребовать, чтобы давление  $p$ , а следовательно, и функция  $\psi$  были регулярными при  $r \rightarrow 0$ , то следует положить  $A = C = 0$ . При этом  $\psi$  принимает вид

$$\psi = -\frac{ar^2}{8} (k^2 r^2 + 2m^2) - \frac{kr^2 I}{m} + B \sin \zeta \cdot kr I'_m(kr). \quad (10)$$

Пусть  $a > 0$ ,  $I > 0$ ; тогда при достаточно малом  $B$  (а если  $m > 2$ , то при любом  $B$ , но достаточно малых  $r$ ) вблизи оси  $z$  существует область,

где функция  $\psi$  и давление  $p$  убывают с радиусом. Такое решение можно интерпретировать как равновесие плазмы внутри камеры, стенки которой совпадают с поверхностью  $\psi = -4\pi r_0/a$ , где давление плазмы обращается в нуль. Для  $m = 2$ , например, распределение давления имеет вид, представленный на рисунке, где качественно изображен ход линий постоянного давления на плоскости  $z = \text{const}$  ( $p_0 = 1$ ).

Как видно из (10), при увеличении коэффициента  $B$ , т. е. при усилении магнитного поля  $\mathbf{H}_1$  от внешней винтовой обмотки, условия равновесия ухудшаются, в частности, уменьшается предельное давление  $p_0$ , при котором плазма с нулевым давлением на стенках камеры еще может быть в равновесии, а также сокращается поперечный размер области, где  $p > 0$ . Это объясняется тем, что увеличение поля  $\mathbf{H}_1$  приводит к большему искривлению силовых линий, и при этом уменьшается область, где силовые линии не уходят в бесконечность в радиальном направлении. (На рисунке эта область ограничена сепаратриссой  $S$ ).



Рассмотрим другой частный случай, когда  $a > 0$ ,  $I < -am^3/(4k)$ . Если  $B$  достаточно мало, то при  $B > 0$  функция  $\psi$  будет иметь максимум  $\psi = \psi_0$  на некоторой винтовой линии  $r = r_0$ ,  $\sin \zeta = 1$ . Так как  $\psi$  уменьшается при удалении от этой линии, то при достаточно малом давлении существует равновесное состояние плазмы, в котором давление обращается в нуль на некоторой винтовой трубке  $\psi = \text{const} < \psi_0$ , окружающей линию  $r = r_0$ ,  $\sin \zeta = 1$ . Таким образом, данное решение является простейшим представителем равновесных состояний плазмы в камерах в виде винтовых труб. Заметим, что при рассмотрении равновесия в камерах такого типа константы  $A$  и  $C$  можно считать отличными от нуля, и это позволяет несколько расширить семейство простейших решений рассмотренного вида.

#### Список литературы

1. Johnson J., Oberman C., Kulsrud R., Frieman E. // Proc. II Inter. conf. on the peaceful uses of atomic energy. Geneva, 1958. P/1875.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ \*)

Получено локальное условие устойчивости для произвольной тороидальной системы. Обсуждается вопрос об устойчивости плазмы низкого давления в таких системах.

1. В настоящей работе исследуется устойчивость плазмы в тороидальных системах. В таких системах поверхности постоянного давления  $p = \text{const}$  представляют собой семейство вложенных друг в друга поверхностей тороидального типа, на которых целиком лежат силовые линии магнитного поля и линии тока. Следуя Крускалу и Кульсруду [1], введем следующие функции от  $p$ :

$$\begin{aligned} \psi &= \int \mathbf{H} d\mathbf{S}_2, & \chi &= \int \mathbf{H} d\mathbf{S}_1; \\ I &= \int \mathbf{j} d\mathbf{S}_2, & J &= \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{H} dl_1 = \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{H} dl_0 - \int \mathbf{j} d\mathbf{S}_1. \end{aligned}$$

Здесь  $\psi$  — продольный магнитный поток через поперечное сечение  $S_2$  поверхности  $p = \text{const}$ ;  $\chi$  — азимутальный поток через поверхность  $S_1$ , проходящую через произвольный (не делающий ни одного оборота по малому периметру) замкнутый контур  $l_1$  вдоль тороида  $p = \text{const}$  и магнитную ось  $l_0$ , являющуюся предельной поверхностью равного давления при стремлении ее поперечного размера к нулю;  $I$  — продольный ток,  $J$  — азимутальный ток, включая ток внешней обмотки;  $\Omega$  — объем тороида  $p = \text{const}$ .

Для исследования устойчивости оказывается более удобным ввести специальную криволинейную систему координат. Пусть на поверхностях  $p = \text{const}$  или, что то же самое,  $\psi = \text{const}$  введены произвольные продольная  $\zeta'$  и поперечная  $\theta'$  координаты, изменяющиеся в пределах от 0 до 1 при полном обходе тороида. Координаты  $\theta'$ ,  $\zeta'$  совместно с  $\psi$  образуют некоторую криволинейную систему координат. Как было показано в [1], магнитное поле в рассматриваемой нами геометрии можно представить в виде

$$\mathbf{H} = [\nabla\psi, \nabla\vartheta], \quad (1)$$

где

$$\vartheta = \theta' - \mu\zeta' + \lambda, \quad \mu = \mu(\psi) = \frac{d\chi}{d\psi},$$

а  $\lambda$  — некоторая однозначная функция координат. Как видно из (1),  $\mathbf{H}\nabla\vartheta = 0$ , т. е. соотношение  $\vartheta = \text{const}$  определяет положение силовой линии на поверхности  $\psi = \text{const}$  и, следовательно, величина  $\mu$  представляет собой число оборотов силовой линии по малому периметру при одном обходе вдоль тороида.

Введем теперь новые координаты  $\theta$ ,  $\zeta$ , такие что  $\vartheta = \theta - \mu\zeta$ . В этих координатах все силовые линии при движении вдоль  $\zeta$  вращаются по  $\theta$  с одной и той же постоянной скоростью  $\mu$ . Выбор координат  $\theta$ ,  $\zeta$  допус-

\*) ЖЭТФ. 1959. Т. 37. В. 6(12). С. 1646–1651.



кает, конечно, большой произвол, который частично будет использован в дальнейшем.

Так как  $\vartheta$  определена с точностью до произвольной функции от  $\psi$ , то ее выбором, т. е. переносом начала отсчета  $\theta$ ,  $\zeta$ , можно добиться, чтобы  $G_{12} = G_{13} = 0$ , где  $G_{ik} = \int (g_{ik}/\sqrt{g}) d\theta d\zeta$ ,  $g_{ik}$  — метрический тензор,  $g = \text{Det } g_{ik}$ . Будем считать в дальнейшем, что это условие выполнено.

В координатах  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$  контравариантные компоненты магнитного поля равны  $H^i = (1/\sqrt{g})\{0, \mu, 1\}$ , а ковариантные  $H_i = \mu g_{i2}/\sqrt{g} + g_{i3}\sqrt{g}$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} I &= \frac{c}{4\pi} \int_{\zeta=\text{const}} H_2 d\theta = \frac{c}{4\pi} (\mu G_{22} + G_{23}), \\ J &= \frac{c}{4\pi} \int_{\theta=\text{const}} H_3 d\zeta = \frac{c}{4\pi} (\mu G_{23} + G_{33}). \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение равновесия плазмы, как показано Крускалом и Кульсрудом, можно записать в виде

$$\frac{dp}{d\psi} \frac{d\Omega}{d\psi} = -\frac{1}{c} \left( \mu \frac{dI}{d\psi} + \frac{dJ}{d\psi} \right). \quad (3)$$

**2.** При обычном предположении идеальной проводимости для исследования устойчивости плазмы удобно воспользоваться энергетическим принципом [2, 3]. Мы предположим, что плазма заполняет весь объем вплоть до идеально проводящих стенок. Тогда нормальная компонента смещения плазмы из положения равновесия обращается в нуль на стенках, и полная энергия  $E$  малых колебаний в гидродинамическом приближении равна

$$\begin{aligned} E &= T + V = \frac{\omega^2}{2} \int \rho \boldsymbol{\eta}^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \gamma p (\text{div } \boldsymbol{\eta})^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi} \int (\text{rot } [\boldsymbol{\eta} \mathbf{H}])^2 d\mathbf{r} - \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \int [\boldsymbol{\eta} \text{ rot } \mathbf{H}] \text{rot } [\boldsymbol{\eta} \mathbf{H}] d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\eta} \nabla p \text{ div } \boldsymbol{\eta} d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\rho$  — плотность плазмы,  $\omega$  — инкремент (предполагается, что смещение плазмы из положения равновесия  $\boldsymbol{\eta}$  изменяется со временем по закону  $e^{\omega t}$ ).

Уравнение малых колебаний плазмы может быть получено из вариационного принципа  $\delta E = 0$ , причем сама энергия  $E$  этих колебаний равна нулю. Это означает, что неустойчивость может иметь место только в том случае, когда потенциальная энергия отрицательна. Поэтому при исследовании устойчивости мы могли бы ограничиться только потенциальной энергией  $V$ . Тем не менее, мы включим в рассмотрение и кинетическую энергию  $T$ , что позволит нам не только получить оценки для инкремента  $\omega$ , но и правильно рассмотреть поведение возмущения вблизи особой точки\*).

При этом мы можем ограничиться случаем малых инкрементов  $\omega \rightarrow 0$ , так как нас интересует в первую очередь критерий устойчивости, т. е. условие появления решения с  $\omega > 0$ . Считая инкремент  $\omega$  малым, временно пренебрежем кинетической энергией. Разобьем смещение  $\boldsymbol{\eta}$  на

\*) На последнее обстоятельство указал А.А. Веденов.

два слагаемых  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_{\text{tr}} + \boldsymbol{\eta}_{\parallel}$ , где  $\boldsymbol{\eta}_{\parallel}$  параллельно вектору  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ , а третья компонента  $\eta_{\text{tr}}^3$  обращается в нуль. Нетрудно показать, что компонента смещения  $\boldsymbol{\eta}_{\parallel}$  вдоль поля выпадает из трех последних слагаемых в (4) и содержится только в первых двух слагаемых. Если возмущение не является постоянным вдоль силовых линий, то при помощи соответствующего выбора  $\boldsymbol{\eta}_{\parallel}$  можно добиться, чтобы второе слагаемое в (4) обратилось в нуль, и тогда потенциальная энергия будет равна сумме последних трех слагаемых, которую мы обозначим через  $V_{\text{tr}}$ .

Преимущество вариационного принципа состоит в том, что, используя различного рода пробные функции для  $\boldsymbol{\eta}$ , можно получать некоторые необходимые условия устойчивости. Мы рассмотрим здесь возмущения вида

$$\eta^1 = \xi(\psi) \exp [2\pi i(m\theta + n\zeta)], \quad \eta^2 = -\frac{i}{2\pi} \alpha(\psi) \exp [2\pi i(m\theta + n\zeta)],$$

где  $\xi, \alpha$  без ограничения общности можно считать действительными функциями. Для таких возмущений потенциальная энергия  $V_{\text{tr}}$  принимает вид

$$\begin{aligned} V_{\text{tr}} = & \frac{1}{8\pi} \int \left\{ 4\pi^2 G_{11}(\mu m + n)^2 \xi^2 + G_{22} \left( \frac{d}{d\psi} \mu \xi - n\alpha \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2G_{23} \left( \frac{d}{d\psi} \mu \xi - n\alpha \right) \left( \frac{d\xi}{d\psi} + m\alpha \right) + G_{33} \left( \frac{d\xi}{d\psi} + m\alpha \right)^2 \right\} d\psi + \\ & + \frac{1}{2c} \int \left\{ c \frac{dp}{d\psi} \frac{d^2 \Omega}{d\psi^2} \xi^2 + 2\alpha \xi (\mu m + n) \frac{dI}{d\psi} - \xi^2 \frac{d\mu}{d\psi} \frac{dI}{d\psi} - 2\xi \left( \frac{d\xi}{d\psi} + m\alpha \right) \left( \mu \frac{dI}{d\psi} + \frac{dJ}{d\psi} \right) \right\} d\psi. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь первый интеграл всегда положителен, и неустойчивость может появиться только за счет второго. Поэтому окрестность точек  $\psi = \psi_0$ , где  $\mu m + n = 0$  и подынтегральное выражение первого интеграла минимально, представляют наибольшую опасность для устойчивости. Как было показано Сайдемом [4] для прямого шнура с цилиндрической симметрией, вблизи этих точек, где смещение  $\boldsymbol{\eta}$  почти постоянно вдоль силовых линий, может возникнуть неустойчивость локального типа. Аналогичный результат для прямого слабо неоднородного вдоль оси шнура был получен в работе Джонсона и др. [5]. Представляет интерес обобщить это рассмотрение на случай произвольной тороидальной системы.

При исследовании неустойчивости локального типа можно положить в (5)

$$\mu m + n = m \frac{d\mu}{d\psi} (\psi - \psi_0) \equiv m\mu' x$$

и считать постоянными все коэффициенты. Минимизирование полученного выражения по  $\alpha$  после дополнительного интегрирования по частям дает

$$V_{\text{tr}} = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ 4\pi^2 G_{11} m^2 \mu'^2 x^2 \xi^2 + R\mu'^2 \left( \frac{d}{dx} x\xi \right)^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int Q\xi^2 dx, \quad (6)$$

где

$$Q = \frac{dp}{d\psi} \left\{ \frac{d^2\Omega}{d\psi^2} - \frac{I\mu'}{\mu I + J} \frac{d\Omega}{d\psi} + \frac{1}{\mu I + J} \left( \mu \frac{dI}{d\psi} + \frac{dJ}{d\psi} \right) \frac{d\Omega}{d\psi} \right\},$$

$$R = G_{22} - \frac{4\pi I^2}{c(\mu I + J)} > 0.$$

Учтем теперь отброшенную нами ранее инерцию. Она проявляется не только в наличии кинетической энергии, но и в том, что при малых  $x$  плазма не успевает выравнять давление вдоль силовых линий, и поэтому необходимо учесть ее сжимаемость. Чтобы не усложнять рассмотрение, мы несколько упростим выражение для кинетической энергии  $T$ , а именно, заменим ее на меньшую квадратичную форму  $T'$ , представляющую собой сумму квадратов:

$$T' = \frac{\omega^2}{2} \int \left\{ A \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 + B \eta_{\parallel}^2 \right\} d\mathbf{r}, \quad (7)$$

где  $B \sim \rho$ ,  $A \sim \rho a^2/m^2$ ,  $a$  — малый радиус тороида  $\psi = \text{const}$ . Здесь мы полностью пренебрегли кинетической энергией движения в направлении  $\psi$  и учли, что  $m\alpha \sim d\xi/d\psi$ . Замена  $T$  на  $T'$  приводит лишь к некоторому повышению инкремента  $\omega$  и никак не сказывается на условии устойчивости.

Минимизируя  $E = T' + V$  по  $\eta_{\parallel}$ , получаем

$$\omega^2 B \eta_{\parallel} - \gamma p (\mathbf{h}\nabla) \text{div } \boldsymbol{\eta} = 0. \quad (8)$$

Здесь  $(\mathbf{h}\nabla) = (1/H\sqrt{g}) d/d\zeta$ , где  $d/d\zeta$  — полная производная вдоль  $\mathbf{h}$ . Пусть

$$\eta_{\parallel} = f(\mathbf{r}) \exp [2\pi i(m\theta + n\zeta)],$$

где  $f(\mathbf{r})$  — некоторая произвольная действительная функция. Умножим (8) на  $H\sqrt{g}$  и проинтегрируем по  $\zeta$  вдоль силовой линии. Учитывая, что при малых  $x$  экспонента  $\exp [2\pi i(m\theta + n\zeta)]$  является медленно меняющейся функцией вдоль силовой линии, получаем

$$\frac{\omega^2}{2\pi i m \mu' x} \langle B H \sqrt{g} f \rangle \exp [2\pi i(m\theta + n\zeta)] - \gamma p \text{div } \boldsymbol{\eta} = 0, \quad (9)$$

где угловые скобки означают усреднение вдоль силовой линии. Умножим теперь (9) на  $\sqrt{g} \exp [-2\pi i(m\theta + n\zeta)]$  и проинтегрируем по  $\theta, \zeta$ . Учитывая, что  $\text{div } \boldsymbol{\eta} = \text{div } \boldsymbol{\eta}_{\text{tr}} + (\mathbf{H}\nabla)\eta_{\parallel}/H$ , получаем

$$\frac{\omega^2}{2\pi i m \mu' x} \langle B H \sqrt{g} f \rangle \frac{d\Omega}{d\psi} - \gamma p \left\{ \xi \frac{d^2\Omega}{d\psi^2} + 2\pi i m \mu' x \int \frac{f}{H} d\zeta d\theta \right\} = 0. \quad (10)$$

Из (9) и (10) находим

$$\text{div } \boldsymbol{\eta} = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \varkappa^2 x^2} \frac{d^2\Omega}{d\psi^2} \left( \frac{d\Omega}{d\psi} \right)^{-1} \xi \exp [2\pi i(m\theta + n\zeta)], \quad (11)$$

где

$$\varkappa^2 = 4\gamma p \pi^2 m^2 \mu'^2 \int \frac{f}{H} d\theta d\zeta \left[ \frac{d\Omega}{d\psi} \langle B H \sqrt{g} f \rangle \right]^{-1} \approx \gamma p \frac{4\pi^2 m^2 \mu'^2}{\rho \langle H^2 \rangle} \left( \frac{d\Omega}{d\psi} \right)^{-2}. \quad (12)$$

Подставляя (11) в выражение для энергии  $E$  и пренебрегая кинетической энергией продольного движения, получаем окончательно

$$E = \frac{1}{2} \int \left\{ \omega^2 A \frac{d\Omega}{d\psi} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 + \frac{R}{4\pi} \mu'^2 \left( \frac{d}{dx} x\xi \right)^2 + \right. \\ \left. + \gamma p \frac{\omega^4}{(\omega^2 + \varkappa^2 x^2)^2} \left( \frac{d^2\Omega}{d\psi^2} \right)^2 \left( \frac{d\Omega}{d\psi} \right)^{-1} \xi^2 + \pi G_{11} m^2 \mu'^2 x^2 \xi^2 + Q \xi^2 \right\} dx. \quad (13)$$

Варьирование (13) по  $\xi$  приводит к дифференциальному уравнению второго порядка, которое можно преобразовать к виду

$$\frac{d^2 u}{ds^2} - \left\{ \frac{1}{(1+s^2)^2} + \frac{q}{1+s^2} + \frac{q'}{(1+s^2)(1+k^2 s^2)^2} + \omega^2 b \frac{s^2}{1+s^2} \right\} u = 0, \quad (14)$$

где

$$s^2 = \frac{R\mu'^2}{4\pi A\omega^2 d\Omega/d\psi} x^2, \quad u = \xi \sqrt{1+s^2}, \\ b = \frac{16\pi^3 G_{11} A m^2 d\Omega/d\psi}{(R\mu')^2}, \quad k^2 = \frac{4\pi A \varkappa^2 d\Omega/d\psi}{R\mu'^2} \sim \frac{8\pi p}{H^2}, \\ q = \frac{4\pi Q}{R\mu'^2}, \quad q' = \frac{4\pi \gamma p}{R\mu'^2} \left( \frac{d^2\Omega}{d\psi^2} \right)^2 \left( \frac{d\Omega}{d\psi} \right)^{-1}.$$

Уравнение (14) аналогично уравнению Шредингера для частицы, потенциальная энергия которой определяется выражением в фигурных скобках, причем наличие связанных состояний с  $\omega^2 > 0$  дает неустойчивость, а отсутствие связанных состояний соответствует устойчивости. В области  $s^2 \gg 1$  оно значительно упрощается:

$$\frac{d^2 u}{ds^2} - \frac{qu}{s^2} = \omega^2 b u. \quad (15)$$

При  $\omega \rightarrow 0$  это уравнение имеет решение  $u = s^\nu$ , где

$$\nu = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1+4q}.$$

Таким образом, если  $q < -1/4$ , то  $u$  является осциллирующей функцией, и, следовательно, имеет место неустойчивость. С другой стороны, пользуясь теоремой сравнения, можно показать, что уравнение (14) при  $q > -1/4$  не имеет ни одного связанного состояния, т. е. локально плазма устойчива. В развернутой форме это условие представляет собой следующее неравенство:

$$\frac{dp}{d\psi} \left\{ \frac{d^2\Omega}{d\psi^2} - \frac{I\mu'}{\mu I + J} \frac{d\Omega}{d\psi} + \frac{1}{\mu I + J} \left( \mu \frac{dI}{d\psi} + \frac{dJ}{d\psi} \right) \frac{d\Omega}{d\psi} \right\} > -\frac{R}{16\pi} \left( \frac{d\mu}{d\psi} \right)^2. \quad (16)$$

Оценка показывает, что возмущения являются локальными по  $\psi$  только при  $m^2 \gg 1$ . Поэтому условие (16) является лишь необходимым: оно относится только к возмущениям с большими  $m$ , т. е. локальными и по азимуту  $\theta$ .

**3.** Рассмотрим случай плазмы низкого давления, когда  $\varepsilon = 8\pi p/H^2 \ll 1$ . При этом, как следует из уравнения равновесия (3), наряду с  $dp/d\psi$  малыми величинами являются также  $\mu dI/d\psi$  и  $dJ/d\psi$ . Предположим, что поле

неоднородно вдоль тора (как это имеет место в стеллараторе с винтовой обмоткой [6] и в ловушках с гофрированным полем [7]) и пусть глубина модуляции поля достаточно большая, так что  $d^2\Omega/d\psi^2$  не является малой величиной. Так как продольный ток  $I \sim \varepsilon J \ll J$ , то в левой части неравенства (16) можно пренебречь всеми членами, кроме первого, и можно положить  $R \approx G_{22}$ .

Пользуясь произволом в выборе координат  $\theta$ ,  $\zeta$ , можно добиться, чтобы  $R$  было минимальным. По порядку величины

$$g_{22} \sim (2\pi r)^2, \quad \sqrt{g} \sim \pi r^2 \left( \frac{d\zeta}{dz} \right)^{-1},$$

где  $r = r(z)$  — средний радиус поперечного сечения  $\zeta = \text{const}$  тороида  $\psi = \text{const}$ ;  $z$  — некоторая продольная координата  $0 < z < L$ , где  $L$  — длина тора. Нетрудно проверить, что  $G_{22}$  минимально при  $\sqrt{g} \sim r$ , т. е.

$$G_{22} = 4\pi^2 a^2 \left( \frac{d\Omega}{d\psi} \right)^{-1} = 4\pi^2 \left( \frac{d\Omega}{d\psi} \right)^{-1} \int_0^L r^2 \frac{dz}{L},$$

где  $a$  — среднеквадратичное значение малого радиуса  $r$ .

Учитывая, что вдоль силовой линии  $d\theta = \mu d\zeta$ , и следовательно,  $dl = \sqrt{g} H d\zeta$ , получаем

$$\frac{d\Omega}{d\psi} = \iiint \sqrt{g} d\theta d\zeta = \iint \frac{\mathbf{h} dl}{H} d\theta = -U,$$

где  $U$  есть усредненное по  $\theta$  значение от интеграла вдоль силовой линии  $-\int dl/H$ . Таким образом, для систем с достаточно глубоко модулированным полем условие устойчивости (16) может быть представлено в виде

$$\nabla p \nabla U < \frac{\pi a^2}{4|U|} (\nabla \mu)^2. \quad (17)$$

В плазме низкого давления  $k^2 \sim \varepsilon \ll 1$ , поэтому уравнение (14) приводится к виду (15) только при  $s^2 \gg 1/\varepsilon$ , и инкремент  $\omega$  соответствующих возмущений порядка  $\sqrt{\varepsilon/b}$ . В области  $1 \ll s^2 \ll 1/\varepsilon$  в уравнении (15) следует поставить  $q + q'$  вместо  $q$  и соответствующее условие устойчивости имеет вид  $q + q' > -1/4$ , или

$$\nabla p \nabla U < \frac{\pi a^2}{4|U|} (\nabla \mu)^2 + \gamma p \frac{(\nabla U)^2}{|U|}. \quad (18)$$

Это условие соответствует более быстрым сжимаемым возмущениям с  $\omega \sim 1/\sqrt{b}$ . При  $\mu \rightarrow 0$  оно переходит в условие устойчивости для систем с замкнутыми силовыми линиями [7], в то время как инкремент более медленных несжимаемых возмущений, при которых плазма успевает выравнять давление вдоль силовых линий, стремится к нулю, так что условие (17) при таком переходе отпадает.

Условие (17) можно интерпретировать как стремление плазмы занять область с минимальной «потенциальной энергией»  $U$ , причем такому перемещению препятствует эффект перекрещенности силовых линий. Как

в стеллараторе с винтовой обмоткой, так и в ловушке с гофрированным полем «потенциальная энергия»  $U$  минимальна на стенках камеры, куда и стремится уйти плазма. В этом отношении существенно отличается от них система с охраняющими кольцами [7], где  $U$  минимальна внутри камеры и растет к внешним проводникам. Поэтому было бы желательно провести экспериментальное исследование устойчивости плазмы в таких системах.

### *Список литературы*

1. *Kruskal M., Kulsrud R.* // Second United Nations Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958. P/1876.
2. *Hain K., Lüst R., Schlüter A.* // Zs. Naturforsch. 1957. V. 12A. 833.
3. *Bernstein J., Frieman E., Kruskal M., Kulsrud M.* // Proc. Roy. Soc. 1958. V. A224. P. 19.
4. *Suydam B.* // Second United Nations Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958. P/354.
5. *Johnson J., Oberman C., Kulsrud R., Frieman E.* // Second United Nations Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958. P/1875.
6. *Spitzer L.* // Second United Nations Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958. P/2170.
7. *Кадомыц Б.Б., Брагинский С.И.* // Доклад на 2-й конф. Объединенных наций по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958. P/2212.

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО СТОЛБА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ И «АНОМАЛЬНАЯ» ДИФФУЗИЯ \*)

Показано, что положительный столб газового разряда становится неустойчивым при наложении продольного магнитного поля достаточно большой величины. Возникающие вследствие неустойчивости колебания приводят к увеличению потока заряженных частиц на стенку, т. е. к возрастанию эффективной «диффузии», в согласии с экспериментальными данными.

### 1. Введение

Вопрос о диффузии электронов и ионов поперек магнитного поля представляет большой интерес для физики плазмы. Между тем к настоящему времени имеются весьма противоречивые данные на этот счет [1–10], причем в ряде экспериментальных условий была обнаружена аномально большая диффузия плазмы поперек магнитного поля [1, 3, 5–8]. В связи с этим особый интерес представляют эксперименты по диффузии плазмы в положительном столбе газового разряда, в частности, работа Ленерта и Ху [6] (см. также [5]). Такой разряд без магнитного поля хорошо изучен как теоретически, так и экспериментально, и поэтому он представляет собой удобный объект для теоретического исследования и сопоставления полученных результатов с экспериментальными данными. Именно этой задаче и посвящена настоящая работа.

Ленерт и Ху измеряли электрическое поле  $E$  вдоль столба в зависимости от величины продольного магнитного поля  $H$ . Они обнаружили, что при не очень сильном магнитном поле электрическое поле уменьшается с увеличением  $H$  в количественном соответствии с теоретической зависимостью коэффициента амбиполярной диффузии от магнитного поля. Однако при некотором критическом поле  $H_k$  порядка нескольких килогаусс наблюдается резкое изменение характера зависимости  $E$  от  $H$ : электрическое поле растет с  $H$  и в некоторых случаях даже превосходит то значение, которое оно имело при  $H = 0$ . Такое возрастание  $E$  служит косвенным указанием на значительное увеличение коэффициента диффузии по сравнению с «классическим», т. е. обусловленным столкновениями электронов и ионов с молекулами нейтрального газа.

Ниже будет показано, что это явление объясняется неустойчивостью положительного столба в продольном поле и возникновением колебаний «диффузионного» типа.

\*) *Kadomtsev B.B., Nedospasov A.V. // J. Nuclear Energy. 1960. Part C. V. 1. P. 230.*

## 2. Неустойчивость положительного столба

Из простых качественных соображений видно, что продольное магнитное поле может привести к потере устойчивости плазменного шнура с током. Действительно, в отсутствие магнитного поля всякое возмущение плазмы быстро ликвидируется усиленной диффузией частиц из областей с повышенной плотностью. В частности, при змеевидном искривлении шнура поток частиц на стенку увеличивается там, где шнур оказывается ближе к стенке, и уменьшается с обратной стороны, в результате чего восстанавливается исходное состояние. При наличии магнитного поля на плазму действует дополнительная сила  $\frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{H}]$ , где  $\mathbf{j}$  — плотность тока. При винтовом искривлении шнура, в зависимости от того, является ли оно право- или левовинтовым, эта сила может быть направлена либо к оси разряда, либо к стенкам. В последнем случае она способствует увеличению начального возмущения. При возрастании магнитного поля эта сила увеличивается, а поперечная диффузия и вместе с ней стабилизирующее действие стенок уменьшается, поэтому при достаточно большом магнитном поле плазменный столб будет неустойчив.

Для исследования устойчивости воспользуемся уравнениями диффузии для электронов и ионов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v}_i = \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v}_e = Zn. \quad (1)$$

Здесь  $n$  — плотность электронов (и равная ей плотность ионов),  $Z = Z(T_e)$  — число ионизаций, производимое в единицу времени одним электроном,  $T_e$  — температура электронов,  $\mathbf{v}_e$  и  $\mathbf{v}_i$  — направленные скорости электронов и ионов, которые могут быть найдены из уравнений движения.

Уравнение движения для электронов имеет вид

$$\frac{T_e}{mn} \nabla n = -\frac{e}{mc} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] + \frac{e}{m} \nabla \varphi - \frac{\mathbf{v}_e}{\tau}, \quad (2)$$

где  $m$  — масса электрона,  $\frac{1}{\tau}$  — частота столкновений,  $\varphi$  — потенциал электрического поля. При  $\Omega\tau = \frac{eH}{mc} \tau \gg 1$  из уравнения (2) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{e\perp} &= \frac{b_e}{\Omega\tau} [\mathbf{h}\nabla\varphi] - \frac{D_e}{\Omega\tau} \frac{1}{n} [\mathbf{h}\nabla n] + \frac{b_e}{(\Omega\tau)^2} \nabla\varphi - \frac{D_e}{(\Omega\tau)^2} \frac{\nabla n}{n}, \\ v_{ez} &= b_e \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{D_e}{n} \frac{\partial n}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ ,  $b_e$  — подвижность электронов,  $D_e$  — их коэффициент диффузии.

Предположим далее, что частота столкновений ионов  $1/\tau_i$  с молекулами нейтрального газа много больше как их циклотронной частоты  $\frac{eH}{\mu c}$ , так и частоты рассматриваемых нами колебаний. Тогда можно пренебречь действием магнитного поля на ионы и их инерцией, в соответствии с чем имеем

$$\mathbf{v}_i = -b_i \nabla\varphi, \quad (4)$$

где  $b_i$  — подвижность ионов. Мы пренебрегли здесь диффузией ионов, учет которой, как можно показать, дает лишь малую поправку порядка отношения ионной температуры к электронной.



Подставляя выражения для скоростей (3), (4) в (1), получим два уравнения для  $n$ ,  $\varphi$ :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{b_e}{\Omega\tau} \mathbf{h}[\nabla\varphi\nabla n] - \frac{D_e}{(\Omega\tau)^2} \Delta_{\perp} n + \frac{b_e}{(\Omega\tau)^2} \operatorname{div}(n\nabla_{\perp}\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} \left( b_e n \frac{\partial\varphi}{\partial z} - D_e \frac{\partial n}{\partial z} \right) = Zn, \quad (5)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} - b_i \operatorname{div}(n\nabla\varphi) = Zn. \quad (6)$$

В равновесном состоянии  $n$  и  $\varphi$  зависят только от расстояния до оси трубки. Предположим, что средний свободный пробег ионов  $\lambda_i$  много меньше радиуса трубки  $a$ . Тогда в качестве краевого условия можно принять равенство нулю плотности на стенке (условие Шоттки), и из (5), (6) получим

$$n_0(r) = N_0 J_0(\beta_0 r), \quad \frac{d\varphi_0}{dr} = \frac{D_e}{b_e + b_i(\Omega\tau)^2} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dr}, \quad Z = \frac{b_i}{b_e} \frac{D_e \beta_0^2}{1 + \frac{b_i}{b_e}(\Omega\tau)^2}. \quad (7)$$

Здесь  $\beta_0 = \frac{\alpha_0}{a}$ ,  $\alpha_0$  — первый корень функции Бесселя нулевого порядка  $J_0$ ,  $N_0$  — плотность при  $r = 0$ .

Для исследования устойчивости необходимо найти частоту малых колебаний шнура. В силу цилиндрической симметрии равновесного состояния возмущение можно выбрать в виде  $f(r)e^{im\psi + ikz - i\omega t}$  ( $\psi$  — азимутальный угол), линеаризованные уравнения имеют вид

$$\left\{ -i\omega - Z + ikv_0 + k^2 D_e + \frac{im}{r} \frac{b_e}{\Omega\tau} \frac{d\varphi_0}{dr} \right\} n' - \frac{D_e}{(\Omega\tau)^2} \Delta_{\perp} n' + \frac{b_e}{(\Omega\tau)^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r n' \frac{d\varphi_0}{dr} \right) - \left\{ k^2 b_e n_0 + \frac{im}{r} \frac{b_e}{\Omega\tau} \frac{dn_0}{dr} + \frac{m^2}{r^2} \frac{b_e n_0}{(\Omega\tau)^2} \right\} \varphi' + \frac{b_e}{(\Omega\tau)^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r n_0 \frac{d\varphi'}{dr} \right) = 0, \quad (8)$$

$$(-i\omega - z)n' + b_i k^2 n_0 \varphi' + b_i \frac{m^2}{r^2} n_0 \varphi' - b_i \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( n_0 \frac{d\varphi'}{dr} + n' \frac{d\varphi_0}{dr} \right) = 0. \quad (9)$$

Здесь  $v_0 = b_e E$  — направленная (токовая) скорость электронов в равновесном состоянии,  $E$  — продольное электрическое поле.

Уравнения (8), (9) должны быть дополнены граничными условиями. Два из них сводятся к требованию регулярности  $n'$ ,  $\varphi'$  при  $r \rightarrow 0$ , третье представляет собой равенство нулю плотности на стенке, а четвертое может быть найдено из условия равенства электронного и ионного токов на стенку. Так как  $\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} \sim \frac{1}{\lambda_i}$  на границе есть величина постоянная, то это условие удовлетворяется, если потенциал  $\varphi'$  на стенке является конечным.

Точное решение системы уравнений (8), (9) представляет значительные трудности. Поэтому мы найдем приближенное решение, задаваясь определенной зависимостью  $n'$ ,  $\varphi'$  от радиуса. Мы ограничимся здесь возмущениями с  $m = 1$ , так как именно они определяют границу устойчивости. При этом для плотности естественно выбрать зависимость  $n' = n_1 J_1(\beta_1 r)$ ,

где  $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{a}$ ,  $\alpha_1$  — первый корень функции Бесселя  $J_1$ . Для  $\varphi'$  выберем точно такую же зависимость:  $\varphi' = \varphi_1 J_1(\beta_1 r)$ . Основание для такого выбора будет видно из дальнейшего.

Подставим эти выражения в уравнения (8), (9), умножим их на  $J_1(\beta_1 r)r dr$  и проинтегрируем по  $r$ . Тогда получим систему двух алгебраических уравнений для  $n_1, \varphi_1$ :

$$\left\{ -i\omega - Z + ikv_0 + k^2 D_e + \frac{\beta_1^2}{(\Omega\tau)^2} - im \frac{L}{\Omega\tau} \frac{D_e \beta_0^2}{1 + \frac{b_i}{b_e} (\Omega\tau)^2} - \frac{Q}{(\Omega\tau)^2} \frac{D_e \beta_0^2}{1 + \frac{b_i}{b_e} (\Omega\tau)^2} \right\} \frac{n_1}{n_0} - \left\{ k^2 b_e - im A \beta_0^2 \frac{b_e}{\Omega\tau} + C \frac{b_e \beta_1^2}{(\Omega\tau)^2} \right\} \varphi_1 = 0, \quad (10)$$

$$\left\{ -i\omega - Z + \frac{b_i}{b_e} \frac{Q D_e \beta_0^2}{1 + \frac{b_i}{b_e} (\Omega\tau)^2} \right\} \frac{n_1}{n_0} + C b_i \beta_1^2 \varphi_1 = 0. \quad (11)$$

Здесь  $n_0$  — некоторое среднее значение невозмущенной плотности,  $A = 0,66$ ,  $C = 0,79$ ,  $L = 0,74$ ,  $Q = 1,56$  — появляющиеся после интегрирования константы.

В уравнении (11) мы пренебрегли движением ионов вдоль оси ввиду того, что  $\frac{b_i}{b_e} \ll 1$ .

Приравняв нулю детерминант системы (10), (11), нетрудно получить дисперсионное уравнение для  $\omega$ . Устойчивость имеет место только тогда, когда мнимая часть частоты отрицательна. Пользуясь дисперсионным уравнением, это условие можно записать в виде

$$Kx^4 + Fx^2 + Y \leq mBv^* x \frac{b_e}{b_i}, \quad (12)$$

где

$$K = \frac{1,28 + y}{y(y+1)}, \quad F = \frac{0,8(y+2)}{y}, \quad Y = \frac{0,48(1+y)}{y} + 0,1 \frac{b_e}{b_i} \frac{1}{1+y}, \quad (13)$$

$$B = 0,163, \quad x = \frac{k\Omega\tau}{\beta_1}, \quad v^* = \frac{v_0}{\beta_0 D_e}, \quad y = \frac{b_i}{b_e} (\Omega\tau)^2.$$

Из соотношения (12) видно, что неустойчивость может возникнуть только при  $m > 0$  и при достаточно большой токовой скорости электронов  $v_0$ . Без продольного тока плазма устойчива.

В длинной трубке возможны произвольные значения  $x$ . Поэтому неустойчивость возникнет, когда левая часть (12) окажется равной правой в единственной точке. При этом будут равны также производные. Дифференцируя равенство (12) по  $x$ , умножая результат на  $x$  и вычитая одно из другого, получим для  $x$  биквадратное уравнение, откуда:

$$x^2 = \frac{-F + \sqrt{F^2 + 12KY}}{6K}, \quad v^* = \frac{2b_i x}{b_e B} (2Kx^2 + F). \quad (14)$$

Соотношение (14) определяет границу устойчивости  $v^* = v^*(y)$ , где  $v^* = \frac{b_e E}{\beta_0 D_e} = \frac{eE}{\beta_0 T_e}$ . Но температура электронов есть функция от  $E/p$ , на-

дежно определенная экспериментально [11, 12]. Точно также известны подвижности  $b_e$ ,  $b_i$  [13, 14]. Пользуясь этими данными, можно вычислить  $v^*$  и  $\frac{b_e}{b_i}$  для тех значений  $E$ , при которых наблюдается нарушение монотонной зависимости  $E$  от  $H$ , а затем с помощью (14) найти  $y$ , а следовательно и теоретическое значение для критического поля  $H_K$ .

Такой расчет был проделан для гелия. Значения электрического поля, соответствующие  $H = H_K$ , брались из опытов Ленерта и Ху [6], значения  $T_e$  — из [11]. Сравнение рассчитанных значений  $H_{KT}$  с измеренными  $H_{K\kappa}$  дается в табл. 1.

Таблица 1

$ap$	см · мм рт. ст.	0,24	0,45	0,89	1,45	1,6	1,8	3,0
$a$	см	0,535	1	1	1	0,535	1	1
$H_{K\kappa}/p$	кГс·мм рт. ст.	5,5	3,6	2,4	1,6	1,9	1,5	0,9
$H_{KT}/p \text{ He}^+$	кГс·мм рт. ст.	5,1	2,8	2,0	1,6	1,5	1,4	1,0
$H_{KT}/p \text{ He}^{++}$	кГс·мм рт. ст.	—	3,3	2,1	1,6	1,5	1,4	1,0

Здесь последняя точка первого столбца не вычислена потому, что в этих условиях нельзя пренебрегать действием магнитного поля на ионы.

Аналогично был произведен расчет для аргона, для которого имеется только одна экспериментальная точка:  $H_{K\kappa} = 3,7$  кГс при  $a = 1$  см,  $p = 0,92$  мм рт. ст. И в этом случае расчетное значение критического поля  $H_{KT} = 3,3$  кГс хорошо согласуется с экспериментальным.

Так как все коэффициенты в (12) имеют примерно один порядок величины, то  $x$  оказывается порядка единицы, т. е. неустойчивость появляется на длинноволновых возмущениях:  $ka = \frac{\alpha_0 x}{\Omega\tau} \ll 1$ . Это объясняет, почему в опытах Ленерта и Ху зависимость от длины трубки  $L$  исчезала только при  $\frac{L}{a} \gtrsim 50$ . В более коротких трубках величина  $x$  ограничена снизу. Поэтому в зависимости от конкретных соотношений между различными параметрами в (12) шнур может либо стать вновь устойчивым при увеличении  $H$ , либо быть устойчивым при всех  $H$  по отношению к возмущениям с  $m = 1$ . В этом случае потеря устойчивости может проявляться в возникновении колебаний с  $m > 1$ .

Вернемся еще к вопросу о выборе радиальной зависимости для  $\varphi'$ . Умножим уравнение (9) на  $\frac{b_e}{b_i} \frac{1}{(\Omega\tau)^2}$ , сложим его с (8) и пренебрежем малыми членами порядка  $\frac{b_i}{b_e} y \sim \left(\frac{eH\tau_i}{M_c}\right)^2$ . С учетом (7) получаем

$$n' \frac{D_e \beta_0^2}{b_e} \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_0} x v^* + \frac{m}{r(1+y)} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \right\} \approx \frac{m}{r} \frac{dn_0}{dr} \varphi'. \quad (15)$$

Пользуясь условием (12), можно проверить, что при появлении неустойчивости выражение в левой части (15) оказывается положительным всюду, за исключением небольшой области вблизи стенки, где оно меняет знак и стремится к конечной отрицательной величине при  $r \rightarrow a$ . Так как вбли-

зи стенки плотность  $n'$  мала, то вклад от этой области тоже мал, а при остальных значениях  $r$  функция  $J_1(\beta_1 r)$  удовлетворительно аппроксимирует  $\varphi'$ .

### 3. «Аномальная» диффузия

Возникающие вследствие неустойчивости колебания шнура приводят к появлению азимутального электрического поля. Вследствие этого электроны получают возможность дрейфовать в радиальном направлении и в среднем это проявляется как увеличение подвижности поперек магнитного поля, или «аномальная» диффузия.

Чтобы количественно описать этот эффект, необходимо отказаться от линеаризации уравнений диффузии. Если магнитное поле не намного превосходит  $H_k$ , то амплитуда колебаний будет мала, их можно считать гармоническими и по-прежнему положить

$$\begin{aligned} n &= n_0(r) + n_1 \cos(\psi + kz - \omega t) J_1(\beta_1 r), \\ \varphi &= \varphi_0(r) + \varphi_1 \cos(\psi + kz - \omega t + \delta) J_1(\beta_1 r), \end{aligned} \quad (16)$$

где сдвиг фаз  $\delta$  приближенно можно считать не зависящим от  $r$ .

Подставляя эти выражения в уравнения (5), (6) и усредняя их по времени, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left\{ \frac{b_e}{(\Omega\tau)^2} n_0 \frac{d\varphi_0}{dr} - \frac{D_e}{(\Omega\tau)^2} \frac{dn_0}{dr} + \frac{b_e}{\Omega\tau} \frac{n_1 \varphi_1}{r} \frac{\sin \delta}{2} J_1^2(\beta_1 r) + \right. \\ \left. + \frac{b_e}{(\Omega\tau)^2} \beta_1 \frac{n_1 \varphi_1}{r} J_1(\beta_1 r) J_1'(\beta_1 r) \frac{\cos \delta}{2} \right\} = Z n_0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left\{ b_i n_0 \frac{d\varphi_0}{dr} + b_i \frac{n_1 \varphi_1}{2} \beta_1 J_1(\beta_1 r) J_1'(\beta_1 r) \frac{\cos \delta}{2} \right\} = Z n_0. \quad (18)$$

При малой амплитуде колебаний приближенное решение уравнений (17), (18) можно найти, полагая

$$n_0 = N_0 J_0(\beta_0 r), \quad \frac{d\varphi_0}{dr} = \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \frac{D_e}{b_e(1+y)} S,$$

где  $S = \text{const}$ .

Подставим это в уравнения (17), (18), умножим их на  $J_0(\beta_0 r) r dr$  и проинтегрируем по  $r$ . Из полученных уравнений находим  $Z$  и  $S$ :

$$Z = \frac{b_i}{b_e} \frac{D_e \beta_0^2 \Phi}{1+y}, \quad S = \Phi - p \frac{(\Phi-1)(1+y)}{\Omega\tau} \text{ctg} \delta. \quad (19)$$

Здесь  $\Phi = 1 + \Omega\tau s \cdot \sin \delta$ ,  $s$  — некоторая малая величина порядка амплитуды колебаний,  $p = 2,6$  — константа, выражающаяся через интегралы от функции Бесселя.

Что касается уравнений для малых колебаний, то в них можно пренебречь нелинейными членами, поскольку они содержат вторые гармоники и пропадают при усреднении по полупериоду. Поэтому  $n'$ ,  $\varphi'$  можно опять считать комплексными и все изменение в уравнениях (8), (9) сводится к

замене  $Z$  и  $\frac{d\varphi_0}{dr}$  на их новые значения. Производя эту замену и повторяя выкладки, получим следующее дисперсионное уравнение ( $m = 1$ ):

$$\frac{i\omega}{c} \left\{ \frac{c(1+y)}{y} + \frac{x^2}{y} - iA \left( \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right)^2 \frac{b_e}{b_i \Omega \tau} \right\} = \frac{D_e \beta_1^2}{(\Omega \tau)^2} \left\{ i\Omega \tau \frac{\alpha_0}{\alpha_1} v^* x + 1 - \left( \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right)^2 \Phi + x^2 \left[ 1 + \left( \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right)^2 \frac{SQ - \Phi}{c(1+y)} \right] - i \frac{\Omega \tau}{1+y} \left[ SL + A \left( \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right)^2 \frac{SQ - \Phi}{c} \right] \right\}. \quad (20)$$

Условие  $\text{Im } \omega = 0$  принимает вид

$$\frac{1+y+0,78S-0,5\Phi}{y(1+y)} x^4 + \frac{0,8y+1,8+0,6S-0,8\Phi}{y} x^2 + 0,8(1-0,4\Phi) \frac{1+y}{y} + 0,1 \frac{b_e}{b_i} \frac{1,35-0,3\Phi}{1+y} = 0,163 \frac{b_e}{b_i} x v^*. \quad (21)$$

При этом частота колебаний, определяемая уравнением (20), приближенно равна:

$$\omega \approx \frac{b_i}{b_e} \frac{3D_e \beta_1^2}{\Omega \tau} - \{1 - 0,4\Phi + x^2\}. \quad (22)$$

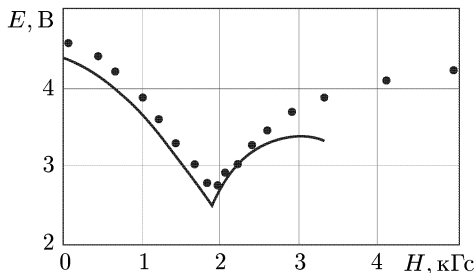
Из ионного уравнения нетрудно найти сдвиг фаз  $\delta$ . Он определяется соотношением:

$$\text{ctg } \delta = \frac{b_i D_e \beta_0^2}{b_e (1+y) \omega} (QS - \Phi). \quad (23)$$

Подставляя (22), (23) в (19), найдем связь между  $S$  и  $\Phi$ :

$$S \approx \Phi \frac{1,3 + x^2 - 0,7\Phi}{1,5 + x^2 - 0,9\Phi}. \quad (24)$$

Задаваясь определенным значением для  $\Phi$  и подставляя (24) в (25), получим уравнение для  $x$ ,  $y$ . Стационарные колебания возможны только в том случае, если равенство (21) удовлетворяется в одной единственной точке, т. е. кривые, определяемые правой и левой частями (21), касаются. Из этого условия можно определить теоретическую кривую  $v^* = v^*(y, \Phi)$ . С другой стороны, мы знаем экспериментальную зависимость  $v^*(E/p)$ . В свою очередь, согласно (19)  $E/p = f(\sqrt{(1+y)/\Phi} ap)$ , где  $f(ap)$  — экспериментально определенная зависимость  $E/p$  от  $ap$  без магнитного поля. Находя пересечение рассчитанной таким образом кривой  $v^* = v^*(y)$  с кривой, определяемой условием  $\text{Im } \omega = 0$ , мы найдем  $y = y(\Phi)$ , а следовательно, связь между  $E$  и  $H$  при установившихся колебаниях.



На рисунке представлено сравнение рассчитанной таким образом кривой с экспериментальными результатами работы (6) для  $a = 1$ ,  $p = 0,89$ . Как мы видим, теоретическая кривая не только качественно, но и количественно хорошо согласуется с экспериментальной вплоть до  $H = 3$  кГс,

где  $\Phi = 4$ , т. е. усредненный поток частиц на стенки в четыре раза больше диффузионного. Возникающее при дальнейшем увеличении  $H$  расхождение между теоретической и экспериментальной зависимостями  $E$  от  $H$  может быть связано либо с неточностью приближенного решения, либо с появлением более коротковолновых колебаний (в частности, с  $m > 1$ ).

#### 4. Соотношения подобия

Уравнения (5), (6), описывающие диффузионные процессы в плазме, обладают той особенностью, что длина, время и магнитное поле входят в них только в комбинации с давлением, т. е. в виде  $ap$ ,  $tp$ ,  $H/p$ . Это следует из того, что  $Z$  пропорционально, а  $b$ ,  $D$  и  $\tau$  обратно пропорциональны давлению. Уравнения (5), (6) неявно зависят еще от температуры электронов и ионов, которые определяются балансом энергии, т. е. в конце концов, величиной  $E/p$ .

Все это позволяет сделать вывод, что если имеются две геометрически подобные системы с одинаковыми параметрами  $ap$ ,  $E/p$ ,  $H/p$ , то уравнения (5), (6) для них совпадают, и поэтому в них будут протекать процессы, отличающиеся только масштабом времени. Этот результат остается справедливым также и при учете действия магнитного поля на движение ионов, их диффузии и инерции.

Далее, уравнения (5), (6) линейны по плотности  $n$ , т. е. абсолютная величина  $n$ , или, другими словами, величина электрического тока, никак не влияет на процессы в столбе.

Таким образом, если степень ионизации настолько мала, что можно пренебречь столкновениями ионов с электронами, то имеет место следующее соотношение подобия:  $E/p$  и  $\omega/p$  являются функциями только  $ap$ ,  $H/p$  и не зависят от величины тока.

Сопоставление полученных Ленертом и Ху экспериментальных зависимостей  $E$  от  $H$  для различных  $a$  и  $p$  показывает, что такое соотношение подобия выполняется. То же самое можно видеть из таблицы значений для критического поля  $H_k$ .

#### 5. Заключение

Итак, положительный столб газового разряда оказывается неустойчивым, если магнитное поле становится больше критического  $H_k$ . Если магнитное поле не намного превышает  $H_k$ , то в плазме возникают регулярные колебания с частотой  $f = \frac{\omega}{2\pi} \sim \frac{10b_i D_e}{\Omega \tau b_e a^2}$ , что для гелия в условиях экспериментов Ленерта и Ху составляет примерно  $10^4$  Гц. Возможно, что наблюдавшееся еще Фабрикантом и Рохлиным [15] смещение максимума электронной плотности от оси разряда в магнитном поле также связано с наличием таких колебаний.

Можно думать, что при дальнейшем увеличении  $H$  будут возбуждаться все более высокие гармоники и колебания шнура примут нерегулярный хаотический характер. Это как раз и будет то турбулентное состояние плазмы, мысль о котором впервые была высказана Бомом [1]. По аналогии с обычной турбулентностью можно было бы попытаться построить теорию

такого турбулентного разряда, однако для этого необходимы более полные экспериментальные данные относительно интенсивности и спектра его колебаний.

Настоящая работа была выполнена после обсуждения затронутых здесь вопросов с В.Д. Шафрановым, которому авторы приносят свою искреннюю благодарность.

### Список литературы

1. *Guthrie A., Wakerling R.* The characteristics of Electrical Discharge in Magnetic Field. — New York, 1949.
2. *Simon A.* // Phys. Rev. 1955. V. 98. P. 317; report P/336 on the Second United Nations Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958.
3. *Bostick W.H., Levin M.A.* // Phys. Rev. 1955. V. 97. P. 13.
4. *Недоспасов А.В.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 1338.
5. *Lehnert B.* // report P/146 on the Second United Nations Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958.
6. *Hoh F.C., Lehnert B.* // report IIIb, 25 on the Fourth Intern. Conf. on Ionization Phenomena in Gases. Uppsala, 1959.
7. *Жаринов А.В.* // Атомная энергия. 1959. Т. 7. С. 215, 220.
8. *Ellis R.A., Goldberg L.P., Gorman J.G.* // report IVd, 4 on the Fourth Intern. Conf. on Ionization Phenomena in Gases. Uppsala, 1959.
9. *Сыргой А.С., Грановский В.Л.* // Радиотехника и электроника. 1959. Т. 4. С. 1854.
10. *Васильева И.А., Грановский В.Л.* // Радиотехника и электроника. 1959. Т. 4. С. 2051.
11. *Klarfeld B.* // J. Phys. USSR. 1941. V. 5. P. 155.
12. *Karelina N.A.* // J. Phys. USSR. 1942. V. 6. P. 218.
13. *Engel A.* Ionized Gases. — Oxford, 1955.
14. *Грановский В.Л.* Электрический ток в газе. — М.: Гостехиздат, 1952. Т. 1.
15. *Фабрикант В., Рохлин Г.* // ДАН СССР. 1938. Т. 20. С. 437.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ \*)

Поле магнитного диполя представляет собой простейшую ловушку с магнитными пробками. В реальных условиях такой ловушкой является магнитное поле Земли, а существование ионных поясов около Земли [1, 2] непосредственно демонстрирует ее эффективность. Между тем известно [3, 4], что плазма в ловушках такого типа, вообще говоря, неустойчива. Поэтому представляет интерес теоретически рассмотреть условия устойчивости плазмы, находящейся в равновесии в поле диполя.

Для простоты воспользуемся гидродинамическим приближением, которое в случае изотропного распределения частиц по скоростям дает несколько более жесткий критерий устойчивости, чем точное кинетическое рассмотрение [5].

Если поверхность диполя не проводит тока, то наиболее опасной является конвективная или перестановочная неустойчивость [3, 4]. Для поля точечного диполя соответствующее условие устойчивости [4] принимает вид

$$-R \frac{dp}{dR} < 4\gamma p, \quad (1)$$

где  $p$  — давление плазмы,  $R$  — расстояние в экваториальной плоскости от диполя до данной силовой линии,  $\gamma$  — показатель адиабаты.

Однако поверхность Земли из-за наличия сравнительно плотной ионосферы является скорее идеальным проводником, вследствие чего тангенциальная компонента электрического поля, а следовательно, и смещение плазмы вблизи Земли равны нулю, т. е. концы силовых линий «вморожены» в поверхность. Это приводит к запрету конвективной неустойчивости, т. е. к дополнительной стабилизации плазмы.

Для исследования этого эффекта воспользуемся энергетическим принципом [6], согласно которому для устойчивости плазмы необходимо и достаточно, чтобы потенциальная энергия  $V$  малых колебаний была положительной. Следовательно, потеря устойчивости плазмы эквивалентна обращению в нуль минимального значения потенциальной энергии

$$V = \frac{1}{8\pi} \int (\text{rot } [\boldsymbol{\eta}\mathbf{H}])^2 d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int [\boldsymbol{\eta}\mathbf{j}] \text{rot } [\boldsymbol{\eta}\mathbf{H}] d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\eta} \nabla p \text{div } \boldsymbol{\eta} d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \gamma p (\text{div } \boldsymbol{\eta})^2 d\mathbf{r}, \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\eta}$  — смещение плазмы из положения равновесия,  $\mathbf{H}$  — равновесное магнитное поле,  $\mathbf{j}$  — плотность тока.

Мы предположим, что давление плазмы мало по сравнению с давлением магнитного поля, так как только в этом случае магнитное поле можно считать дипольным:

$$H_r = \frac{2 \cos \theta}{r^3}, \quad H_\theta = \frac{\sin \theta}{r^3}, \quad H_\varphi = 0. \quad (3)$$

\*) Кадомцев В.Б., Рокотян В.Е. // Доклады АН СССР. 1960. Т. 133. № 1. С. 68–70.



Тогда в выражении (2) первый член много больше остальных, чем мы и воспользуемся в дальнейшем.

В соотношении (2) все слагаемые, кроме последнего, содержат только поперечную компоненту  $\boldsymbol{\eta}_\perp$ , перпендикулярную магнитному полю. Так как последний член мал, то положим  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\perp = \{\xi \sin \theta, -2\xi \cos \theta, \alpha\}$ , где  $\xi, \alpha$  — произвольные величины, и учтем впоследствии вклад от продольного смещения как некоторое возмущение.

Введем ортогональную систему координат  $\psi, \zeta, \varphi$ , где  $\psi = 1/R = \sin^2 \theta / r$  — функция тока ( $\mathbf{H} \nabla \psi = 0$ ),  $\zeta = \cos \theta / r^2$  — потенциал магнитного поля ( $\mathbf{H} = \nabla \zeta$ ),  $\varphi$  — азимут. Выражая из уравнения равновесия

$$\nabla p = [\mathbf{j} \mathbf{H}] \quad (4)$$

плотность тока  $j$  через градиент давления и учитывая, что, согласно (4),  $\mathbf{H} \nabla p = 0$ , т. е. давление является функцией только  $\psi$ , получим

$$V = \int \left\{ \frac{1}{8\pi} (\text{rot} [\boldsymbol{\eta} \mathbf{H}])^2 - 3 \frac{dp}{d\psi} \xi^2 \frac{\sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)}{r^3} + \frac{1}{2} \gamma p (\text{div} \boldsymbol{\eta})^2 \right\} \frac{d\psi d\zeta d\varphi}{H^2}. \quad (5)$$

Мы должны найти минимум этого выражения. Пусть  $\eta$  зависит от азимута как  $e^{im\varphi}$ . Нетрудно проверить, что за исключением третьей компоненты  $\text{rot} [\boldsymbol{\eta} \mathbf{H}]$  азимутальное смещение  $\alpha$  всюду входит в произведение с  $m$ . Поэтому если положить  $m\alpha = \beta$  и устремить  $m \rightarrow \infty$ , оставляя  $\beta$  фиксированным, то это лишь уменьшит потенциальную энергию.

Далее, минимизируем (5) по  $\beta$ . При этом можно не учитывать последнего слагаемого, являющегося малым. Подставляя найденное значение для  $\beta$  в (5), получим

$$V = 2\pi \int \{ (a\xi' + b\xi)^2 + (c + d)\xi^2 \} d\zeta d\psi, \quad (6)$$

где  $\xi' = \frac{d\xi}{d\zeta}$ ,  $a = \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{\sqrt{8\pi} r^3}$ ,  $b = \frac{3 \cos \theta (3 + \cos^2 \theta)}{\sqrt{8\pi} r (1 + 3 \cos^2 \theta)}$ ,  $c = -3 \frac{dp}{d\psi} r^3 \sin^2 \theta \times$   
 $\times (1 + \cos^2 \theta) (1 + 3 \cos^2 \theta)^{-2}$ ,  $d = \frac{\gamma p (\text{div} \boldsymbol{\eta}_\perp)^2}{2H^2}$ ,  $\text{div} \boldsymbol{\eta}_\perp = \frac{6\xi (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta}{r (1 + 3 \cos^2 \theta)}$ .

Варьирование функционала (6) по  $\xi$  приводит к уравнению  $z'' - Uz = 0$ , где  $z = a\xi$ ,  $U = [b^2 - (ab)'] + aa'' + c + d]a^{-2}$ , и, таким образом, наша задача оказывается аналогичной квантовомеханической задаче о появлении уровня с нулевой энергией для частицы, движущейся в потенциальной яме  $U$ . Эта яма оказывается очень узкой:  $|U|$  уменьшается вдвое при  $\zeta \sim 0,2/R$ . Поэтому можно воспользоваться теорией возмущений, считая яму  $\delta$ -образной. Это дает нам искомое условие устойчивости

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U d\zeta = \int [(b - a')^2 + c + d] \frac{d\zeta}{a^2} > -\frac{2}{\zeta_0}, \quad (7)$$

где  $\zeta_0$  — точка пересечения силовой линии с проводящей поверхностью. Если эта поверхность представляет собой сферу радиуса  $a$ , то  $\zeta_0 = \frac{\cos \theta_0}{a^2} = \frac{R^2}{a^2} \sqrt{1 - \frac{a}{R}}$ , где  $\theta_0$  — координата упомянутой точки в сферической системе координат.

Учтем теперь продольное смещение  $\eta_{\parallel}$ , для чего в выражении для  $d$  полагаем  $\operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_{\perp} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} (H^2 \eta_{\parallel})$  и минимизируем (6) по  $\eta_{\parallel}$ . Тогда условие (7) примет вид

$$\int [(a' - b)^2 + c] a^{-2} d\zeta + \frac{1}{2} \gamma p \left( \int \frac{\operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_{\perp}}{H^2} d\zeta \right)^2 \left( \int \frac{d\zeta}{H^2} \right)^{-1} > -\frac{2}{\zeta_0}. \quad (8)$$

Производя численное интегрирование, получаем окончательно

$$-R \frac{dp}{dR} < \frac{H^2}{8\pi} \left[ 0,9 + 1,2 \left( \frac{a}{R} \right)^2 \left( 1 - \frac{a}{R} \right)^{-1/2} \right] + 4\gamma p. \quad (9)$$

По сравнению с (1) здесь появилось дополнительное слагаемое, учитывающее замороженность силовых линий. Для сравнения с экспериментальными данными это условие удобнее записать через производную от магнитного поля в экваториальной плоскости. Положим  $H = (1 - \Delta)/R^3$ , где  $\Delta$  характеризует отклонение поля от дипольного за счет наличия тока  $j$ . Учитывая, что  $\Delta$  — симметричная функция от  $\theta - \pi/2$ , находим

$$j = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{H})_{\varphi} = \frac{1}{4\pi R^3} \frac{\partial \Delta}{\partial R}.$$

Выражая с помощью (4) производную от давления через плотность тока, запишем (9) в виде

$$-R \frac{\partial \Delta}{\partial R} < \frac{1}{2} \left[ 0,9 + 1,2 \left( \frac{a}{R} \right)^2 \left( 1 - \frac{a}{R} \right)^{-1/2} \right] + \frac{16\pi\gamma p}{H^2}. \quad (10)$$

Магнитное поле Земли в области второго пояса было измерено экспериментально [7], и эти данные непосредственно дают  $\Delta/R^3$ , т. е. отклонение поля от дипольного. Полагая приближенно  $a/R = 0$ ,  $\gamma = 5/3$ ,  $4\pi\rho/H^2 = \Delta$ , можно проверить, что условие (10) выполняется всюду, за исключением узкого интервала от 21 000 до 22 000 км, где магнитное поле слишком быстро растет с  $R$ .

### Список литературы

1. Вернов С.Н., Чудаков А.Е. и др. // ДАН. 1959. Т. 125. С. 304.
2. Van Allen J., Frank L. // Nature. 1959. V. 183. P. 430.
3. Rosenbluth M., Longmire C. // Ann. Phys. 1957. V. 1. P. 120.
4. Кадомыц Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 380.
5. Kruskal M., Oberman C. // Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 275.
6. Bernstein J., Frieman E., Kruskal M., Kulsrud R. // Proc. Roy. Soc. 1958. V. A224. P. 17.
7. Долгинов С.Ш., Пушков Н.В. // ДАН. 1959. Т. 129. С. 77.

## О ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПЛАЗМЫ В ЛОВУШКЕ С МАГНИТНЫМИ ПРОБКАМИ \*)

Теоретически рассмотрен вопрос о конвективной турбулентности разреженной плазмы в ловушке с магнитными пробками. Эта турбулентность возникает как результат неустойчивости плазмы в такой ловушке. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными Иоффе, Тельковского, Соболева и Юшманова о времени жизни плазмы в ловушке рассматриваемого типа.

### 1. Введение

Ловушка с магнитными пробками [1] представляет собой одну из возможных систем для удержания высокотемпературной плазмы. В простейшем варианте она представляет собой область однородного магнитного поля  $H_0$  с «пробками» на концах, т. е. участками с усиленным магнитным полем  $H_m$ . Схематически такая ловушка изображена на рис. 1.

Если магнитное поле достаточно сильное, так что ларморовский радиус частицы  $\rho$  много меньше характерных размеров, то адиабатический инвариант  $\mu = Mw^2/2H$

( $M$  — масса частицы,  $w$  — ее поперечная скорость) с большой точностью является величиной постоянной. Поэтому поле такого вида представляет собой хорошую ловушку для частиц, у которых  $\sin \alpha = w/v > H/H_m$ , где  $u$  — продольная, а  $v = (u^2 + w^2)^{1/2}$  — полная скорости.

Однако вопрос об удержании квазинейтральной плазмы оказывается более сложным. Дело в том, что в такой ловушке магнитное поле убывает в радиальном направлении, и поэтому плазма в силу своего диамагнетизма будет выталкиваться из центральной области к стенкам. С точки зрения движения отдельных частиц, такая неустойчивость проявляется в возникновении разделения зарядов и появлении такого электрического поля, которое приводит к дрейфу частиц обоого знака в радиальном направлении.

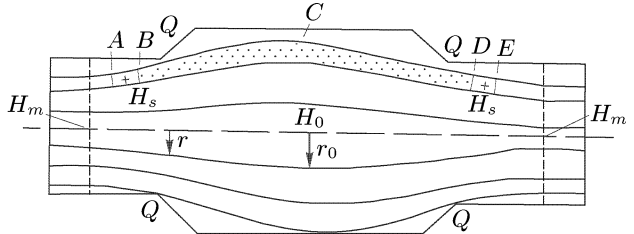


Рис. 1

\*) ЖЭТФ. 1961. Т. 40. Вып. 1. С. 328–336.

Если давление плазмы много меньше давления магнитного поля, то к неустойчивости приводят только конвективные, или перестановочные, возмущения [2, 3], соответствующие перестановке соседних силовых трубок без возмущения магнитного поля. Электрическое поле при таких возмущениях является безвихревым, причем его потенциал оказывается постоянным вдоль силовых линий. Поэтому если имеет место хороший электрический контакт с торцевыми электродами, то такие возмущения невозможны, и плазма с достаточно низким давлением будет устойчива.

Наличие или отсутствие контакта зависит от многих конкретных деталей эксперимента. Так, например, в пиротроне Поста [4], где горячая плазма создается путем адиабатического сжатия инжектируемой извне холодной плазмы, такой контакт осуществляется, по-видимому, за счет наличия достаточно плотной холодной плазмы (обсуждение этого вопроса см. в работе Поста и др. [5]). В других условиях контакта может и не быть. Именно такое положение имеет место в ловушке Иоффе и др. [6, 7], а экспериментально обнаруженный факт, что плазма уходит из этой ловушки в основном поперек магнитного поля, как раз и свидетельствует об отсутствии контакта.

## 2. Качественное рассмотрение

В эксперименте Иоффе и др. [6] горячая плазма с энергией ионов  $\sim 1$  кэВ и плотностью  $\sim 10^9$  см $^{-3}$  создается путем ускорения ионов в радиальном электрическом поле порядка 1 кВ/см, которое импульсно прикладывается между камерой и холодным плазменным шнуром, расположенным вдоль оси системы. Качественно можно представить себе следующую картину заполнения ловушки горячей плазмой. После наложения высокого напряжения наружные слои холодной плазмы приходят во вращательное движение. Но такое вращение неустойчиво: наличие центробежной силы приводит к бурному «разбрызгиванию» плазмы к периферии ловушки, а так как при этом имеются большие электрические поля, то «разбрызгивание» сопровождается ростом энергии отдельных ионов. В результате ловушка более или менее равномерно заполняется плазмой с ионами высокой энергии, и весь этот процесс, как показывает эксперимент, продолжается всего 10–20 мкс.

После отключения высокого напряжения вращение плазмы прекращается, и наступает более спокойная стадия движения диамагнитной плазмы в магнитном поле, спадающем в радиальном направлении. Характерное время этого движения значительно больше, чем время  $t_s \sim 5$  мкс пролета ионов между пробками. Поэтому вдоль силовых линий успевает установиться равномерное распределение ионов и электронов.

Рассмотрим отдельную трубку с плазмой  $ABCDE$ . Так как электроны остаются холодными (с температурой  $T_e$  порядка 10 эВ), то можно положить  $T_e = 0$ , и тогда из условия равновесия электронов следует, что электрический потенциал  $\varphi$  вдоль каждой силовой трубки с плазмой является постоянным. При этом потенциал не может быть отрицательным, так как в противном случае избыточные электроны немедленно будут вытолкнуты из данной трубки на торцы, находящиеся под нулевым потенциалом.

Таким образом, отдельная силовая трубка может иметь отличный от нуля потенциал только в том случае, если у ее концов, в участках  $AB$  и  $DE$ , где плотность электронов равна нулю, будет иметься заряд положительных ионов.

Но такой заряд не может быть сколь угодно большим. Дело в том, что при увеличении заряда ионы начнут выталкиваться электрическим полем на торцы и смогут удержаться только за счет нарастания магнитного поля от величины  $H_s$  на границе трубки до  $H_m$  в пробке. Отсюда следует, что потенциал  $\varphi$  удовлетворяет следующему условию:

$$0 < \varphi < \frac{T}{e} \left( \frac{H_m}{H_s} - 1 \right), \quad (1)$$

где  $T$  — «температура» ионов, т. е. две трети их средней энергии.

Это соотношение позволяет понять, почему в рассматриваемых условиях может отсутствовать электрический контакт с торцами. Действительно, так как в стадии ускорения ионов имеют место большие колебания электрического поля, то в создаваемой таким образом плазме не могут остаться ионы, испытывающие отражение очень близко от пробок. Другими словами, граница горячей плазмы находится на некотором расстоянии от поверхности с максимальным магнитным полем, т. е.  $H_s \neq H_m$ . Поэтому  $\varphi$  может изменяться в некоторых конечных пределах (1), а это и означает отсутствие контакта с торцевыми стенками.

Вследствие этого в рассматриваемой ловушке имеет место конвективная неустойчивость: всякая трубка с более плотной плазмой будет выталкиваться на стенки в результате возникновения азимутального электрического поля, приводящего к дрейфу  $\mathbf{v}_e = cH^{-2}[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ . При соприкосновении трубки со стенкой из нее начнут выходить и поглощаться стенкой ионы, находящиеся на расстоянии порядка среднего ларморовского радиуса  $\rho$  от стенки. Вследствие потери ионов потенциал плазмы вблизи стенки упадет до нуля, а избыточные электроны по силовым линиям будут уходить на торцы. В результате, весь пристеночный слой толщины  $\rho$  будет иметь нулевой потенциал, а поэтому азимутальная компонента электрического поля, а следовательно, и нормальная компонента скорости  $\mathbf{v}_e$  во всем пристеночном слое будут равны нулю.

Отсюда следует, что отдельная плазменная трубка не может сразу погибнуть на стенке. Она затормаживается вблизи стенки\*), и как только за счет потерь на стенке ее плотность упадет до величины, меньшей плотности окружающей плазмы, выталкивается обратно внутрь ловушки. Таким образом, каждая отдельная трубка должна несколько раз соприкоснуться со стенкой и вернуться обратно в камеру, прежде чем она полностью освободится от плазмы. Все движение в целом приобретает характер, аналогичный тепловой конвекции в обычной несжимаемой жидкости: роль жидкости здесь играют силовые трубки магнитного поля, а роль температуры — давление плазмы. Поэтому можно воспользоваться полуколичественными методами рассмотрения обычной конвекции.

---

\*) Мысль о том, что расположенная вдоль силовых линий металлическая стенка сводит к нулю нормальную компоненту электрического дрейфа и вследствие этого должна тормозить плазму, была высказана Л.А. Арцимовичем.

### 3. Основные уравнения

В рассматриваемых нами условиях соударения между частицами не играют никакой роли, и поэтому точное описание движения ионов дается кинетическим уравнением без члена столкновений:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f + \frac{e}{M} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (2)$$

Для конвективного течения плазмы, частота которого значительно меньше циклотронной  $\Omega_H = eH/Mc$ , а характерная длина значительно больше среднего ларморовского радиуса  $\rho$ , последние два члена в уравнении (2) являются основными. Поэтому в нулевом приближении

$$\left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (3)$$

откуда получаем  $f = F(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$ , где  $\mathbf{v}_0 = H^{-2}c[\mathbf{E}\mathbf{H}] = -H^{-2}c[\nabla\varphi_0\mathbf{H}]$ , а функция  $F$  обладает осевой симметрией относительно направления магнитного поля.

Если учесть остальные члены, то кроме электрического дрейфа появятся дополнительные дрейфовые скорости, разные для разных частиц. Но приближенно можно считать, что все ионы движутся поперек магнитного поля с одной и той же скоростью  $\mathbf{v}_0$ , где  $\varphi_0$ , однако, уже не потенциал электрического поля, а некоторый эффективный потенциал, учитывающий все силы, действующие на ионы. Такое приближение позволяет перейти от кинетического к гидродинамическому описанию. А если положить  $\varphi_0 = \text{const}$  вдоль силовых линий, то можно произвести дальнейшее упрощение и перейти к двумерному движению отдельных силовых трубок.

Если подставить в уравнение (2)  $f = F(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$ , умножить его на  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}\mathbf{H}/H$ , проинтегрировать по скоростям и усреднить по силовым линиям, то получится уравнение для поперечного движения. Мы предположим, что пробочное отношение  $H_m/H_0$  не очень велико и силовые линии магнитного поля мало искривлены. Тогда в инерционных членах можно пренебречь кривизной линий, и для поперечного движения получается следующее уравнение:

$$Mn \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0 \right\} + \nabla p + en\nabla\varphi - \frac{ne}{c} [\mathbf{v}_0\mathbf{H}] = Mng. \quad (4)$$

Здесь

$$n = \frac{H_0}{L} \iint f d\mathbf{v} \frac{dl}{H}$$

— некоторая средняя плотность в силовой трубке,  $L$  — средняя длина силовых трубок,

$$p = \frac{H_0}{L} \int \frac{p_{\perp}}{H} dl$$

— среднее поперечное давление, вектор  $\mathbf{g}$  направлен по радиусу и равен

$$\mathbf{g} = \frac{1}{MnL} \int (p_{\perp} + p_H) \frac{H_0^2 r_0}{H^2 Rr} dl \approx \frac{1}{MnL} \int (p_{\perp} + p_H) \frac{H_0^{3/2}}{RH^{3/2}} dl,$$

$H_0$  — поле в центре ловушки,  $r = r(z)$  — расстояние от силовой линии до оси системы,  $r_0 = r(z = 0)$  — расстояние от силовой линии до оси в

центральной плоскости,  $dl$  — элемент длины силовой линии,  $R$  — ее радиус кривизны,

$$p_{\parallel} = \int Mu^2 f dv, \quad p_{\perp} = \int \frac{Mw^2}{2} f dv$$

— соответственно продольное и поперечное давления.

Среднее поле  $\mathbf{H}$ , входящее в уравнение (4), приближенно можно считать постоянным, и тогда (4) в точности совпадает с гидродинамическим уравнением двумерного движения ионов в однородном магнитном поле при наличии силы тяжести  $Mg$ . Эта сила, учитывающая кривизну силовых линий, как раз и выражает собой усредненный эффект выталкивания диамагнитной плазмы из поля. Заметим, что приведенное выше выражение для  $g$  можно получить из энергетических соображений, как это сделано в работе Розенблюта и Лонгмайра [2].

В продольном направлении ионы успевают прийти в равновесие, и поэтому их функция распределения зависит явно только от  $v^2$  и  $\mu = Mw^2/2H$ . Если плотность частиц достаточно велика, то плазма квазинейтральна, и поэтому плотность ионов в участках  $AB$  и  $DE$  (см. рис. 1), где плотность электронов равна нулю, будет очень мала. Но в эти участки попадают только те частицы, для которых  $\sin \alpha = w/v < H/H_s$ , и, следовательно, в распределении ионов по скоростям вырезан конус направлений  $\sin \alpha < H/H_s$ . Приближенно аппроксимируем распределение ионов по скоростям максвелловской функцией с вырезанным конусом и будем считать температуру  $T$  постоянной. Для такого распределения

$$n = N \sqrt{1 - \frac{H}{H_s}}, \quad p_{\parallel} + 2p_{\perp} = 3nT, \quad p_{\parallel} = nT \left(1 - \frac{H}{H_s}\right).$$

Пользуясь этими зависимостями, можно, в принципе, вычислить  $g$  и найти связь между  $n$  и  $p$  для заданного магнитного поля, и тогда задача сводится к рассмотрению только поперечного движения.

К уравнению (4) добавим еще уравнение для электрического поля

$$\Delta \varphi = -4\pi e(n - n_e) \quad (5)$$

и уравнения непрерывности для ионов и электронов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}_0 n) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \nabla n_e = 0. \quad (7)$$

Здесь мы пренебрегли утечкой на торцы, поскольку, как показывает эксперимент [7], она составляет не более 20% от полного ухода частиц из ловушки, и учли, что электроны испытывают только электрический дрейф  $\mathbf{v}_e = cH^{-2}[\mathbf{H}\nabla\varphi]$ . Уравнения (4)–(7) составляют полную систему, описывающую поведение плазмы в ловушке.

#### 4. Устойчивость

Прежде всего рассмотрим вопрос о том, начиная с какой плотности плазма становится неустойчивой. Предположим, что

$$\frac{4\pi e^2 n}{M\Omega_H^2} = \frac{4\pi n M c^2}{H^2} \ll 1.$$

Тогда в уравнении (4) можно пренебречь инерционными членами, и для  $v_0$  получаем

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\Omega_H} [\mathbf{h}g] + \frac{1}{M\Omega_H n} [\mathbf{h}\nabla p] + \frac{c[\mathbf{h}\nabla\varphi]}{H}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{h}$  — единичный вектор, направленный вдоль  $\mathbf{H}$  (т. е. оси  $z$ ).

Положим  $p = nT$  и будем считать  $T$  постоянной. Далее, при небольшой кривизне силовых линий можно положить  $g = Tr/MaR_0$ , где  $a$  — радиус камеры,  $R_0$  — некоторый средний радиус кривизны силовой линии вблизи стенки. Подставляя (8) в (6), получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \omega_0 \frac{\partial n}{\partial \vartheta} + \frac{c}{H} \mathbf{h}[\nabla\varphi, \nabla n] = 0, \quad (9)$$

где  $\omega_0 = T/(MaR_0\Omega_H)$  — угловая скорость дрейфа ионов под действием силы  $Mg$ .

Пусть в равновесном состоянии  $n = n_e = n_0$ ,  $\varphi_0 = 0$ . Предполагая, что возмущения плотности и потенциала  $n'$ ,  $n'_e$ ,  $\varphi'$  изменяются по закону  $\exp(-i\omega t + im\vartheta)$ , из уравнений (5), (7), (9) получаем одно уравнение для  $\varphi'$ :

$$\omega(\omega + m\omega_0)\Delta\varphi' + \frac{4\pi e^2 m^2 \omega_0}{M\Omega_H} \frac{1}{r} \frac{dn_0}{dr} \varphi' = 0. \quad (10)$$

В простейшем случае, когда плотность  $n_0$  распределена по параболическому закону  $n_0 = N(1 - r^2/a^2)$ , решение уравнения (10) имеет вид  $\varphi' = J_m(\alpha_{mn}r/a)$ , где  $\alpha_{mn}$  —  $n$ -й корень функции Бесселя  $J_m$ . При этом частота колебаний равна

$$\omega = -\frac{1}{2} m\omega_0 \pm m\sqrt{\frac{1}{4}\omega_0^2 - \frac{2\Omega_0^2\omega_0}{\Omega_H\alpha_{mn}^2}},$$

где  $\Omega_0^2 = 4\pi e^2 N/M$ . Отсюда видно, что неустойчивость возникает только при достаточно большой плотности, когда  $\Omega_0^2$  становится больше, чем  $(1/8)\alpha_{mn}^2\omega_0\Omega_H$ . При этом неустойчивость возникает сначала для возмущения с максимальной длиной волны, т. е. при  $m = 1$  и  $\alpha_{mn} = \alpha_{11} = 2,83$ . Приближенно условие устойчивости можно записать в виде

$$r_d^2 > aR_0, \quad (11)$$

где  $r_d^2 = T/M\Omega_0^2$  — квадрат дебаевского радиуса.

Аналогичный вид имеет условие устойчивости и для других распределений плотности  $n_0(r)$ . В частности, если  $n_0$  испытывает крутое спадание на расстоянии  $\delta$  от стенки (по предположению металлической), то условие устойчивости имеет вид  $r_d^2 > R_0\delta$ . Так как  $\delta$  не может быть меньше  $\rho$ , то плазма с плотностью, настолько большой, что для нее  $r_d^2 < R_0\rho$ , будет неустойчива при любом обращении в нуль на стенке распределения  $n_0$ . Именно такая ситуация имеет место в эксперименте [6], где  $r_d \sim \rho \sim 1$  см, а  $R_0 \sim 10^2$  см.

## 5. Турбулентная конвекция

Условие  $r_d^2 < R_0\rho$  является вместе с тем условием квазинейтральности плазмы при конвективном движении на всех масштабах вплоть до минимального  $\sim \rho$ . Ограничиваясь именно этим случаем, мы можем упростить



уравнения движения. Для этого вычтем (7) из (6) и выразим разность  $n - n_e$  через  $\varphi$  с помощью (5). Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi + \mathbf{v}_e \nabla(\Delta\varphi) - 4\pi e \operatorname{div}(n(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_e)) = 0, \quad (12)$$

где  $\mathbf{v}_e = cH^{-1}[\mathbf{h}\nabla\varphi]$ . Но для двумерного течения  $\nabla\varphi = (H/c) \operatorname{rot} \mathbf{v}_e$ , поэтому уравнение (12) можно один раз проинтегрировать и получить

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e - \frac{4\pi e c}{H^2} n[\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_e, \mathbf{H}] + \nabla f = 0, \quad (13)$$

где  $f$  — произвольная функция от  $r, \vartheta$ .

Заменим приближенно в первом слагаемом уравнения (4)  $\mathbf{v}_0$  на  $\mathbf{v}_e$ ,  $n$  — на некоторую среднюю плотность  $N$ , умножим (4) на  $4\pi c^2/H^2$  и вычтем из (13). Тогда получим приближенное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e + \nabla p^* = g^* n, \quad (14)$$

где  $\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v}_0$  — макроскопическая скорость плазмы,  $p^*$  — произвольная функция  $r$  и  $\vartheta$ ,  $g^* = 4\pi e^2 g/[M(\Omega_H^2 + \Omega_0^2)]$ ,  $\Omega_0^2 = 4\pi e^2 N/M$ . Уравнения (14), (7) при условии квазинейтральности  $n = n_e$  и с учетом

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_e = 0 \quad (15)$$

в точности совпадают с уравнениями несжимаемой неоднородной жидкости в поле силы тяжести. Поэтому можно провести очень тесную аналогию с обычной конвекцией несжимаемой жидкости.

Так как уравнение (14) не содержит вязкости, то описываемая им конвекция должна иметь турбулентный характер. Поэтому задача о времени жизни плазмы в ловушке сводится к отысканию коэффициента турбулентной диффузии. Предположим, что стенки камеры установлены точно по силовым линиям. Пусть  $x$  есть расстояние от стенки, а  $q$  — диффузионный поток плазмы на стенку. В пристеночной области поток  $q$  можно считать постоянным. Уравнения (14), (15) содержат только один размерный параметр  $g^*$ , причем он входит в виде произведения с  $n$ . Отсюда из соображений подобия следует, что турбулентное состояние плазмы должно определяться только параметром  $g^* q$ . Но из  $g^* q$  и  $x$  величина размерности коэффициента диффузии может быть составлена единственным образом, а именно, в виде

$$D = A(g^* q)^{1/3} x^{4/3} = A \left[ \frac{4\pi e^2 T q}{R_0 M (\Omega_H^2 + \Omega_0^2)} \right]^{1/3} x^{4/3}, \quad (16)$$

где  $A$  — числовой коэффициент порядка единицы. Зная  $D$ , из соотношения  $q = -D dn_0/dr = D dn_0/dx$  находим распределение  $n_0$  вблизи стенки:

$$n_0 = N - \frac{3q}{A(g^* q)^{1/3} x^{1/3}}, \quad (17)$$

где  $N = \text{const}$  — плотность внутри камеры, т. е. при  $x \rightarrow \infty$ .

Распределение (17) имеет смысл только для  $x > \rho = \sqrt{T/(M\Omega_H^2)}$ . При  $x = \rho$  необходимо поставить граничное условие. Пусть  $\xi$  есть доля плазмы, теряемой при соприкосновении трубки со стенкой, а  $n_s$  — средняя плотность (17) при  $x = \rho$ . Пульсация плотности  $n'$ , связанная с тем, что к

стенке подходят и затем уходят обратно трубки с плазмой, является величиной порядка  $n' \sim (1/2) \xi n_s$ . Поток на стенку  $q$  по порядку величины равен  $n'v'$ , где  $v' \sim D/x$  — пульсация скорости. Таким образом, приближенно можно написать следующее граничное условие:

$$q = \frac{1}{2} \xi n_s \left( \frac{D}{x} \right)_{x=\rho}.$$

Отсюда, выражая  $n_s$  с помощью (17), находим связь между  $q$  и  $N$ , а затем время жизни плазмы  $\tau_0$ :

$$\tau_0 \approx \frac{\pi a^2 N}{2\pi a q} = C a \left( \frac{\Omega_H^2 + \Omega_0^2}{\Omega_0^2} \frac{R_0 M}{\rho T} \right)^{1/2}, \quad C = \frac{1}{2} \left( \frac{2 + 3\xi}{A\xi} \right)^{3/2}. \quad (18)$$

Выражение для  $\tau_0$  содержит один неизвестный параметр  $\xi$ . Зависимость  $\tau_0$  от  $\xi$  довольно сильная, однако теоретический расчет  $\xi$  представляет собой очень сложную задачу. Дело в том, что  $\xi$  непосредственно связана с «шероховатостью» стенки, т. е. с ее отклонением от силовых линий, которое всегда имеет место в эксперименте. Вследствие шероховатости подлетающая к стенке трубка будет терять ионы не по всей длине сразу, а только в отдельных точках соприкосновения. На остальных участках потенциал трубки, а следовательно и ее скорость, некоторое время будут сохраняться. Поэтому для отыскания  $\xi$  следует решать полное кинетическое уравнение с учетом продольного движения. Ввиду сложности этой задачи, а также отсутствия достаточно полных экспериментальных данных о шероховатости стенок мы откажемся от этой задачи и будем считать  $\xi$  числовой константой порядка единицы.

При выводе выражения (18) мы полностью отвлеклись от влияния торцов. А между тем, согласно (1), они приводят к ограничению величины потенциала  $\varphi$ . Вследствие этого скорость  $v'_\lambda \sim c\varphi'_\lambda/(\lambda H)$  пульсации масштаба  $\lambda$  не может быть больше, чем  $[cT/(\lambda H)](H_m/H_s - 1)$ . Поэтому и коэффициент турбулентной диффузии  $D \sim \langle \lambda^2 v \rangle$  не может быть больше, чем

$$D_m = B \frac{cT}{H} \left( \frac{H_m}{H_s} - 1 \right), \quad (19)$$

где  $B$  — числовой множитель порядка единицы.

Оценка показывает, что (16) действительно много меньше (19), но при наличии диафрагмы это может быть и не так. Однако в том случае, когда торможение плазмы стенкой не играет никакой роли и на первый план выступает ограничение скорости за счет торцов, течение плазмы теряет диффузионный характер из-за отсутствия возврата трубок внутрь камеры. Поэтому выражение (19) не является истинным коэффициентом диффузии, хотя и может быть использовано для оценок.

## 6. Сравнение с экспериментальными данными

В табл. 1 дается сравнение рассчитанной по формуле (18) зависимости  $\tau_0$  (в миллисекундах) от  $T$  и  $H$  с экспериментально измеренной зависимостью [6] при пробочном отношении  $H_m/H_0 = 1,5$ . Расчет производился следующим образом: радиус кривизны  $R_0 \approx 3 \cdot 10^2$  см был сосчитан по

экспериментально измеренному магнитному полю в предположении максвелловского распределения ионов по скоростям с вырезанным конусом (в зависимости от угла  $\alpha$  этого конуса  $R_0$  изменяется в пределах 20%). Температура ионов полагалась равной двум третям от их средней энергии, которая оценивалась экспериментально по скорости их утечки за счет перезарядки. Плотность  $N$  согласно [6] полагалась равной  $10^9$  для поля 5 и 6 кГ и  $5 \cdot 10^8$  для поля 8 кГ. Константа  $C$  была выбрана равной 20, что соответствует примерно  $A = \xi \approx 1/2$ . Радиус камеры  $a = 22$  см,  $V$  — величина ускоряющего потенциала.

Таблица 1

	$V$ , кВ	45	30	20	10
$H$ , кГ	$T$ , кэВ	1,2	1,0	0,9	0,4
5	Эксперимент	0,15	0,2	0,4	1,0
	Теория	0,35	0,4	0,45	0,7
6	Эксперимент	0,16	0,4		
	Теория	0,45	0,5		
8	Эксперимент	0,7	1,5		
	Теория	1,0	1,1		

То обстоятельство, что вычисленное время жизни имеет порядок величины экспериментального при вполне разумном выборе констант  $A$  и  $\xi$ , свидетельствует в пользу развитых выше представлений. Однако экспериментальная зависимость  $\tau_0$  от  $H$  и  $T$  имеет гораздо более резко выраженный характер, чем теоретическая. Это связано, вероятно, либо с тем, что камера в экспериментальной установке имеет сложную форму с выступами  $Q$  (см. рис. 1), играющими роль диафрагм, либо с тем, что  $\xi$  на самом деле не является константой, а увеличивается с уменьшением  $\tau_0$ , т. е. с усилением интенсивности конвективных пульсаций.

В пользу конвективного механизма утечки плазмы из ловушки свидетельствуют также и зондовые измерения [7]. Они показывают, что токи на стеночные зонды хорошо коррелированы вдоль силовых линий, т. е. плазма действительно выходит на стенку целыми трубками. Кроме того, ток на зонды обнаруживает колебания с периодом  $\sim 5 - 10$  мкс. Учитывая, что около стенки ионы вращаются по азимуту со скоростью  $v_0 = a\omega_0 = T/(MR_0\Omega_H) \sim 10^5$  (и такой же порядок величины имеет скорость электрического дрейфа), а минимальная длина корреляции равна  $\rho \sim 1$  см, находим период колебаний  $\sim \rho/v_0 \sim 10$  мкс, что согласуется с экспериментальным.

Зависимость времени жизни от плотности  $N$  может быть определена по экспериментальной зависимости  $\tau_0$  от времени [6]. Пользуясь, например, экспериментальной кривой  $\tau = \tau(pt)$  для  $p = 2 \cdot 10^{-6}$  мм рт. ст., можно оценить время увеличения  $\tau_0$  в  $e$  раз как  $0,3 \div 0,4$  мс. Но среднее время жизни на этом интервале (с учетом перезарядки) составляет примерно 0,15 мс. Таким образом, возрастание  $\tau_0$  со временем согласуется с зависимостью  $\tau_0 \sim N^{-1/2}$ , которая следует из (18) при  $\Omega_0^2\Omega_H^2 < 1$ , что действительно имеет место, если  $N < 10^9$ .

## 7. Заключение

Итак, несмотря на многочисленные упрощения, теоретические представления удовлетворительно согласуются с экспериментальными результатами, и все вместе приводит к выводу о неустойчивости плазмы в такой ловушке и возникающей вследствие этого конвекции. Для избежания неустойчивости нужно иметь такую конфигурацию магнитного поля, чтобы оно возрастало во все стороны от некоторой области, занятой плазмой. Одна из таких конфигураций, в которой по-прежнему имеются только две пробки, представлена на рис. 2. Это поле состоит из меридионального,

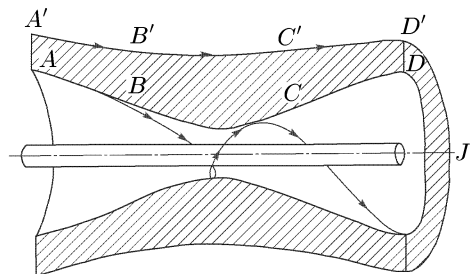


Рис. 2

силовые линии которого лежат в плоскостях  $r, z$ , и азимутального, создаваемого расположенным вдоль оси током  $I$ . Если силовая линия  $A'B'C'D'$  меридионального поля имеет отрицательную кривизну, как на рис. 2, то поле возрастает при удалении от этой линии в радиальном направлении. Точно так же поле нарастает наружу от заштрихованной области на участках  $AB$  и  $CD$ .

Если теперь подобрать ток  $I$  таким образом, чтобы, с одной стороны, азимутальное поле было мало на линии  $A'B'C'D'$ , а с другой, — превратило силовую линию  $ABCD$  в довольно крутую спираль на участке  $BC$ , то все силовые линии на границе заштрихованной тороидальной области будут иметь отрицательную кривизну, т. е. поле будет нарастать во все стороны. Правда, наличие тока  $I$  приводит к некоторому удлинению силовых линий вблизи оси ловушки, и поэтому продольное давление плазмы будет стремиться вытолкнуть к оси трубку с плазмой. Но если продольное давление меньше поперечного, то эффект от удлинения силовых линий будет мал, и такая плазма будет устойчива в заштрихованной области, так как на нее будет действовать возвращающая диамагнитная сила.

В заключение приношу глубокую благодарность М.С. Иоффе и В.Г. Тельковскому, в постоянном контакте с которыми была выполнена эта работа.

### Список литературы

1. Буджер Г.И. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. III. С. 3.
2. Rosenbluth M.N., Longmire C. // Ann. Phys. 1957. V. 1. P. 120.
3. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 16.
4. Post R.F. // Доклад P/377 на Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958.
5. Post R.F., Ellis R.E., Ford F.C., Rosenbluth M.N. // Phys. Rev. Lett. 1960. V. 4. P. 166.
6. Иоффе М.С., Соболев Р.И., Тельковский В.Г., Юшманов Е.Е. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 12.
7. Иоффе М.С., Соболев Р.И., Тельковский В.Г., Юшманов Е.Е. // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. Вып. 1. С. 40.

## ТУРБУЛЕНТНАЯ УТЕЧКА ЧАСТИЦ ИЗ РАЗРЯДА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ \*)

В работе показано, что разряд в сильном магнитном поле является неустойчивым, если проводимость плазмы меняется в пространстве. Вследствие этой неустойчивости развивается турбулентная конвекция, приводящая к охлаждению плазмы и утечке частиц на стенки. Вводя соответствующий коэффициент турбулентной диффузии, можно оценить время удержания плазмы. Оно удовлетворительно согласуется с экспериментально измеренным временем жизни частиц в стеллараторе.

### Введение

Уже первые эксперименты по омическому нагреву плазмы в стеллараторе [1] обнаружили неожиданно плохое удержание частиц магнитным полем. Оказалось, что время удержания плазмы магнитным полем при наличии продольного тока составляет всего  $\tau_0 \sim 10^2$  мкс, что значительно меньше той величины, которая следует из классической диффузии. Дальнейшие исследования [2] показали, что включение стабилизирующих обмоток практически не меняет времени жизни плазмы и, следовательно, утечка частиц не связана с гидромагнитной неустойчивостью идеальной плазмы. В работе [2] было установлено также, что время жизни плазмы очень слабо растет с магнитным полем — всего лишь  $\sim \sqrt{H}$ , в то время как из теории парных соударений следует зависимость  $\tau_0 \sim H^2$ .

Аналогичный, аномально быстрый уход плазмы из магнитного поля был обнаружен также в системе токамак [3], т. е. в тороидальном разряде с сильным продольным полем. В этой установке время жизни плазмы порядка миллисекунды.

И в той, и в другой установках уход частиц сопровождается колебаниями тока и напряжения обхода, и это естественно подсказывает, что причину утечки частиц нужно искать в колебаниях плазмы. В работе Бернштейна и других [4] было показано, что в условиях омического нагрева холодной плазмы возбуждаются ионно-звуковые колебания, которые, по мнению авторов этой статьи и Спитцера [5], могут привести к усиленной диффузии частиц.

Так как при таких колебаниях диффузия может возникнуть только за счет небольшой разницы в движении отдельных частиц, то вклад в диффузионный поток могут дать только коротковолновые колебания с длиной волны порядка ларморовского радиуса, а сама диффузия носит характер столкновений частиц с флуктуациями электрического поля. Поэтому, казалось бы, она может стать существенной только в том случае, если гидродинамически плазма абсолютно устойчива и в ней не возникают перемещения отдельных участков плазмы, которые могут привести к гораздо большим потокам частиц. А между тем, в плазме с конечной проводимо-

---

\*) ЖТФ. 1961. Т. XXXI, в. 10. С. 1209–1219.

стью при наличии продольного тока может иметь место именно гидромагнитная неустойчивость, являющаяся результатом ее неоднородности. В слабо ионизованной плазме такая неустойчивость приводит к винтовому искривлению шнура. Именно появлением такой неустойчивости можно объяснить [6] экспериментально обнаруженную Ленертом [7, 8] усиленную диффузию заряженных частиц из положительного столба тлеющего разряда в продольном магнитном поле. Как будет показано ниже, аналогичная неустойчивость имеет место и в полностью ионизованной плазме, а развивающиеся вследствие нее колебания приводят к диффузии того же порядка величины, что и обнаруженная экспериментально.

## 1. Токово-конвективная неустойчивость

Рассмотрим сначала следующую упрощенную задачу. Предположим, что вдоль однородного магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ , направленного по оси  $z$ , течет ток  $j_0$  настолько слабый, что создаваемое им магнитное поле  $H_\varphi \ll H_0$ . При этом условии можно пренебречь всеми эффектами, квадратичными по  $j_0$ . Предположим также, что давление плазмы  $p_0$  много меньше давления магнитного поля, т. е.  $\beta = \frac{8\pi p_0}{H_0^2} \ll 1$ . В этом случае можно пренебречь малыми величинами порядка  $\beta$ , в частности «классической» диффузией.

Будем считать, что все равновесные величины являются медленно меняющимися функциями  $x$ . Тогда можно воспользоваться квазиклассическим приближением и считать, что все величины, характеризующие отклонение от положения равновесия, изменяются как  $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ .

В гидродинамическом приближении линеаризованное уравнение движения можно записать в виде

$$-\omega^2 \rho_0 \boldsymbol{\xi} = \frac{i}{4\pi} [[\mathbf{k}\mathbf{H}]\mathbf{H}_0], \quad (1)$$

где  $\rho_0 = Mn_0$  — плотность плазмы;  $M$  — масса иона;  $\boldsymbol{\xi} = \frac{i}{\omega} \mathbf{v}$  — смещение плазмы из положения равновесия;  $\mathbf{H}$  — возмущение магнитного поля. В этом уравнении мы пренебрегли градиентом давления плазмы и малым членом  $\frac{1}{c} [\mathbf{j}_0 \mathbf{H}]$ . Так как в полностью ионизованной плазме проводимость  $\sigma$  является функцией только температуры электронов, то в пренебрежении давлением ионов закон Ома имеет вид

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_0] + \frac{1}{\sigma_0} \mathbf{j} - \frac{1}{\sigma_0} \frac{d \ln \sigma_0}{d \ln T_0} \frac{T}{T_0} \mathbf{j}_0.$$

Подставляя это выражение в уравнение Максвелла  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$ , получим в квазиклассическом приближении

$$\mathbf{H} = i \frac{4\pi\sigma_0\omega}{4\pi\sigma_0\omega + ik^2c^2} [k_z H_0 \boldsymbol{\xi} - \mathbf{H}_0(\mathbf{k}\boldsymbol{\xi})] - \frac{4\pi c}{4\pi\sigma_0\omega + ik^2c^2} \frac{d \ln \sigma_0}{d \ln T_0} [\mathbf{k}\mathbf{j}_0] \frac{T}{T_0}. \quad (2)$$

Электронная температура  $T$  может быть найдена из линеаризованного уравнения теплового баланса, в котором мы пренебрежем джоулевым теплом (вернее, его зависимостью от  $T$ ) и учтем теплопроводность только

вдоль магнитного поля. Линеаризованное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T_0 + \frac{2}{3}T_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \chi \operatorname{div} [\mathbf{h}_0(\mathbf{h}\nabla T_0)],$$

где  $\mathbf{h}_0 = \frac{\mathbf{H}_0}{H_0}$ ,  $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H} - \mathbf{h}_0(\mathbf{h}_0\mathbf{H})}{H_0}$  — возмущение единичного вектора вдоль магнитного поля;  $\chi$  — температуропроводность. В квазиклассическом приближении это уравнение принимает вид

$$\frac{T}{T_0} \left( 1 + i\frac{\chi k_z^2}{\omega} \right) + \xi_x \frac{d \ln T_0}{dx} + \frac{2}{3} i(\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}) + \frac{k_z \chi}{\omega} \frac{d \ln T_0}{dx} \frac{H_x}{H_0} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) удобнее записать в компонентах  $\xi_z$ ,  $(\mathbf{k}_\perp \boldsymbol{\xi}) = k_x \xi_x + k_y \xi_y$ ,  $[\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}]_z = k_x \xi_y - k_y \xi_x$ . Подставляя в (1) выражение для магнитного поля (2), получаем

$$\rho_0 \omega^2 \xi_z = 0, \quad (4)$$

$$\left( \omega^2 + i\omega \frac{c^2 k^2}{4\pi\sigma_0} - c_A^2 k^2 \right) (\mathbf{k}_\perp \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad (5)$$

$$\omega \left( \omega^2 + i\omega \frac{c^2 k^2}{4\pi\sigma_0} - c_A^2 k_z^2 \right) [\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}]_z + i \frac{k_z H_0 k_\perp^2 j_0 c}{4\pi\sigma_0 \rho_0} \frac{d \ln \sigma_0}{d \ln T_0} \frac{T}{T_0} = 0, \quad (6)$$

где  $c_A^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}$ ,  $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Как мы видим, в квазиклассическом приближении магнитозвуковые колебания с  $(\mathbf{k}_\perp \boldsymbol{\xi}) \neq 0$  отделяются. В остальных колебаниях, наоборот, можно считать  $(\mathbf{k}_\perp \boldsymbol{\xi}) = 0$ ,  $\xi_z = 0$ , т. е. они представляют собой несжимаемые смещения плазмы, перпендикулярные магнитному полю.

Подставляя в (3)  $H_x$  из (2) и  $\xi_x = -\frac{k_y}{k_\perp^2} [\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}]_z$ , получим совместно с (6)

два уравнения для  $[\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}]_z$  и  $\frac{T}{T_0}$ . Из условия разрешимости этих уравнений находим дисперсионное уравнение

$$\left( \omega^2 + \frac{ic^2 k^2}{4\pi\sigma_0} \omega - c_A^2 k_z^2 \right) (\omega + ik_z^2 \chi) + i(c_A^2 + i\omega\chi)k_z^2 \nu_0 = 0, \quad (7)$$

где  $\nu_0 = \frac{k_y j_0 c}{k_z H_0 \sigma_0} \frac{d \ln \sigma_0}{dx}$ .

При  $\nu_0 = 0$  малые колебания расщепляются на альвеновские волны и возмущение температуры, затухающее из-за продольной теплопроводности. Следовательно, в рамках такого гидродинамического подхода неустойчивость может возникнуть только за счет продольного тока и градиента электропроводности, т. е. температуры.

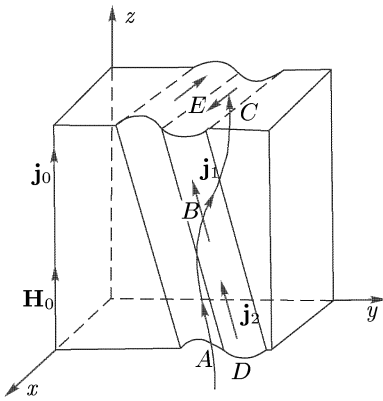
Уравнение (7) содержит четыре независимых параметра, и в общем виде его решение довольно сложно. Поэтому естественно рассмотреть сначала предельный случай очень сильного магнитного поля, когда  $c_A k_z \gg \chi k_z^2 \sim \nu_0 \sim \frac{c^2 \chi^2}{4\pi\sigma_0}$ . При этом уравнение (7) имеет следующие три корня:

$$\omega_{1,2} = \pm c_A k_z - i \frac{c^2 k^2}{8\pi\sigma_0} - i \frac{\nu_0}{2}, \quad (8)$$

$$\omega_3 = -i\chi k_z^2 + i\nu_0. \quad (9)$$

Рассмотрим сначала альвеновские колебания, частота которых дается соотношением (8). Предположим для простоты, что  $k_x = 0$ ,  $\frac{k_y}{k_z} > 0$ .

Тогда при альвеновских колебаниях плазма испытывает смещение, как представлено на рисунке. При достаточно большой проводимости силовые линии почти заморожены в плазму, и поэтому силовая линия  $ABC$  искривляется при смещении так, как показано на рисунке. В точке  $B$  смещенная силовая линия выпукла в сторону оси  $x$ ; следовательно, в направлении  $DBE$  наводится ток  $j_1$ , который в произведении с  $H_0$  дает возвращающую силу  $F$ . Из-за конечной проводимости ток  $j_1$  затухает со временем, и поэтому возвращающая сила  $F$  во второй четверти периода, когда плазма возвращается к положению равновесия, оказывается несколько меньше, чем в первой четверти периода. Можно сказать также, что силовые линии несколько отстают от плазмы, не полностью ею увлекаются. В результате за полупериод часть кинетической энергии теряется и волна затухает. Это затухание описывается вторым слагаемым в (8).



Представим теперь, что вдоль оси  $z$  течет ток  $j_0$  и пусть  $\frac{d\sigma_0}{dx} < 0$ , т. е. вырезанный нами слой имеет несколько большую проводимость, чем плазма при больших значениях  $x$ . Тогда вдоль нити  $DBE$ , обладающей большей проводимостью, чем окружающая ее плазма, будет наводиться ток  $j_2$ , текущий в ту же сторону, что и  $j_1$ . Если этот ток достаточно велик, то силовые линии не только не будут отставать, но могут даже несколько опережать плазму, т. е. может иметь место раскачка колебаний. Легко видеть, что последнее слагаемое в (8) имеет именно такой знак, какой следует из этих простых рассуждений.

Аналогичным образом интерпретируется и второй корень (9). Если начальное возмущение температуры имеет вид нити, наклонной к магнитному полю, то вследствие возмущения проводимости появляется дополнительное электрическое поле.

В силу  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$  это поле является безвихревым, и его азимутальная компонента приводит к дрейфу, переносящему плазму по  $x$ . При соответствующем знаке  $\frac{k_y}{k_z}$  такой конвективный перенос неравномерно нагретой плазмы может привести к возрастанию начального возмущения температуры.

Как видно из приведенных выше выражений, наибольшим инкрементом нарастания обладают возмущения, медленно меняющиеся вдоль магнитного поля, т. е. с  $k_z \rightarrow 0$ . Но в реальных условиях  $k_z$  не может быть сколь угодно малым. Действительно, в рассмотренной выше идеализированной задаче мы считали ток  $j_0$  очень малым и поле  $H_0$  совершенно однородным. На самом же деле текущий по плазме ток создает магнитное поле  $H_\varphi \approx \frac{2\pi r j_0}{c}$ , вследствие чего силовые линии становятся винтовыми с



шагом  $L = 2\pi r \frac{H_0}{H_\varphi} \approx \frac{cH_0}{j_0}$ . Согласно условию Крускала–Шафранова, шаг  $L$  должен быть больше  $\mathcal{L}_0$  — длины обхода тора, иначе даже идеальная плазма будет гидродинамически неустойчивой. Так как плотность тока  $j_0$  не является строго постоянной, то шаг  $L$  может изменяться в зависимости от радиуса на величину того же порядка. Поэтому две силовые линии, находившиеся на расстоянии  $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$  друг от друга, разойдутся на расстояние  $\lambda_y \sim \frac{z\lambda_x}{L}$  при движении вдоль этих линий на длину  $z$ . Но при  $\lambda_y \gtrsim \frac{2\pi}{k_y}$  магнитное поле уже нельзя считать однородным для данного возмущения и, следовательно,  $k_z$  не может быть меньше, чем  $\frac{2\pi k_y}{Lk_x}$ . В стеллараторе это условие несколько видоизменяется за счет наличия вращательного преобразования, однако по порядку величины в обеих системах можно считать  $k_z > k_0 \frac{k_y}{k_x}$ , где  $k_0 \sim \frac{2\pi j_0}{cH_0} \sim \frac{2\pi}{L_0} \sim 10^{-2}$ . Отсюда получаем

$$\nu_0 = \frac{k_y j_0 c}{k_z H_0 \sigma_0} \frac{d \ln \sigma_0}{dx} < \frac{c^2 k_x^2}{2\pi \sigma_0} \left( \frac{1}{k_x} \frac{d \ln \sigma_0}{dx} \right).$$

Для правильности квазиклассического приближения должно быть выполнено условие  $\frac{1}{k_x} \frac{d \ln \sigma_0}{dx} < 1$ . Отсюда следует, что  $\nu_0 < \frac{c^2 k^2}{4\pi \sigma_0}$ , т. е. альвеновские колебания в рассматриваемых системах являются затухающими.

Таким образом, в стабилизированном шнуре к неустойчивости приводят только температурные возмущения, а соответствующий инкремент дается формулой (9). Такую неустойчивость мы будем называть токово-конвективной.

В стеллараторе  $c_A k_z$  действительно много больше всех остальных частот, и решение дисперсионного уравнения дается формулами (8), (9). В токамаке же  $c_A k_z$  может быть порядка  $\chi k_z^2$ , и решение (8), (9) становится неточным. Для полноты рассмотрим другой предельный случай, когда  $\chi k_z^2 \gg c_A k_z$ . Будем считать  $\nu_0 \gtrsim k_z^2 \chi$ , а следовательно, для стабилизированного шнура  $\frac{c^2 k^2}{4\pi \sigma_0} > \chi k_z^2 \gg c_A k_z$ . При этом два корня дисперсионного уравнения являются затухающими, а третий

$$\omega = i \frac{4\pi \sigma_A^2}{\chi c^2 k^2} (\nu_0 - \chi k_z^2) \quad (10)$$

приводит к неустойчивости опять только при  $\nu_0 > \chi k_z^2$ .

## 2. Турбулентная конвекция

Итак, частота интересующих нас нарастающих возмущений равна  $\omega = i\nu_0 - i\chi k_z^2$ . В полностью ионизованной плазме проводимость пропорциональна  $T^{3/2}$ , поэтому  $\nu_0$  можно записать в виде

$$\nu_0 = \frac{3}{2} \frac{k_y j c}{k_z H \sigma T} \frac{dT}{dx}. \quad (11)$$

Здесь и в дальнейшем для простоты будем опускать индекс нуль у равновесных величин.

Для достаточно больших  $k_y$  инкремент  $\nu_0$  становится больше  $\chi k_z^2$ , и такие возмущения нарастают во времени. Эта неустойчивость сходна с конвекционной неустойчивостью неравномерно нагретой тяжелой жидкости, находящейся в пористой среде. Как и при обычной конвекции инкремент  $\nu_0$  пропорционален градиенту температуры, а возникающее вследствие неустойчивости движение имеет вид несжимаемого взаимозамещения теплых и холодных участков. Но в отличие от обычной конвекции здесь такое замещение имеет двумерный характер: в силу малости  $k_z$  мы имеем дело с перестановкой длинных трубок с плазмой. Другое существенное отличие заключается в том, что неустойчивость имеет место при любом знаке градиента  $\frac{dT}{dx}$ .

За счет неустойчивости в плазме возникает конвекционное движение. В конвекционный перенос тепла наибольший вклад дают, очевидно, перемещения с максимально возможным масштабом  $\lambda$  вдоль градиента температуры. Строго говоря, этот масштаб можно определить только из нелинейных уравнений, но если иметь в виду аналогию с обычной конвекцией, то приближенно можно воспользоваться результатами линейного приближения.

Как мы видели ранее,  $\lambda \sim \frac{2\pi}{k_x}$  не может быть сколь угодно большой, а именно, при заданном  $k_z$  величина  $k_x > k_0 \frac{k_y}{k_z}$ . С другой стороны, при нелинейном течении масштаб пульсаций температуры по  $y$  может переходить в масштаб по  $x$ , и поэтому  $k_x$  не может быть больше  $k_y$ , т. е.  $k_y > \frac{k_y k_0}{k_z}$ , откуда  $k_z > k_0$ . Но так как для наиболее быстро нарастающих возмущений  $k_z$  следует выбрать по возможности меньше, то  $k_z \sim k_0$ , и следовательно,  $k_x \sim k_y$ .

Таким образом, в плазме возникнет турбулентное движение, состоящее из конвективных перестановок различных масштабов  $\lambda \sim \frac{2\pi}{k_x} \sim \frac{2\pi}{k_y}$ . Температуру плазмы можно представить в виде  $T + T'$ , где  $T$  — средняя температура, а  $T'$  — ее пульсация. Для пульсации масштаба  $\lambda$  имеем  $T'_\lambda \sim -\lambda \frac{dT}{dx}$ , а скорость этой пульсации можно оценить, как  $v'_\lambda \sim \lambda \nu_\lambda$ , где  $\nu_\lambda$  — инкремент неустойчивости масштаба  $\lambda$ . Отсюда для теплового потока  $q$  получаем следующее соотношение:

$$q = \langle n v'_\lambda T'_\lambda \rangle = -n \chi_T \frac{dT}{dx},$$

где  $\chi_T = \langle \lambda^2 \nu_\lambda \rangle$  — коэффициент турбулентной теплопроводности. Отсюда следует, что наибольший вклад в  $q$  дают пульсации с максимальным масштабом  $\lambda \sim \frac{2\pi}{k_y}$ . Но как видно из (9), возмущения с малым  $k_y$  затухают. Следовательно, минимальное волновое число  $k_y$ , для которого еще имеет место конвекция, может быть найдено из условия  $\nu_0 \gtrsim \chi k_z^2$ .

Находя  $k_y$  и подставляя в выражение для  $\chi_T$ , получаем

$$\chi_T = \frac{A}{\varkappa k_0^4} \left( \frac{j c}{H \sigma T} \right)^2 \left( \frac{dT}{dx} \right)^2, \quad (12)$$

где  $A$  — числовой коэффициент порядка 10.

Рассмотрим теперь задачу о тепловом балансе. Точное ее решение представляет большие трудности, так как наряду с джоулевым выделением тепла нужно учитывать потери за счет излучения на примесях. Поэтому мы рассмотрим модельную задачу, считая, что в плазме установилось некоторое квазиравновесное состояние, в котором джоулево тепло в точности компенсируется потерями. Пусть  $nQ$  есть избыток джоулева тепла над потерями на излучение. Полагая приближенно  $n = \text{const}$ , будем иметь

$$\frac{1}{n} \operatorname{div} \mathbf{q} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \chi_T \frac{dT}{dr} \right) = Q. \quad (13)$$

Величина  $Q$ , строго говоря, сама есть функция температуры. Если, например,  $Q \sim \frac{j^2}{n\sigma}$ , то при постоянном напряжении обхода, т. е.  $\frac{j}{\sigma} = \text{const}$ ,  $Q \sim \sigma \sim T^{3/2}$ . Но решение уравнения (13) с  $Q = Q(T)$  наталкивается на значительные математические трудности, ничем не оправданные, поскольку сама задача сильно упрощена. Поэтому мы рассмотрим два предельных случая, а именно,  $Q = \text{const}$ , что соответствует равномерному распределению температуры, и  $Q = Q_0 \frac{\delta(r)}{2\pi r}$ , что аппроксимирует случай сильного изменения  $T$  по радиусу.

При  $Q = \text{const}$   $\frac{q}{n} = \frac{1}{2} Qr$ , т. е.

$$\frac{A}{T^2 \varkappa k_0^4} \left( \frac{j c}{H \sigma} \right)^2 \left( \frac{dT}{dr} \right)^3 = -\frac{Qr}{2}. \quad (14)$$

В полностью ионизованной плазме  $\chi = \varkappa T^{5/2}$ , где  $\varkappa = \text{const}$ . Величину  $\frac{j}{\sigma}$  можно считать не зависящей от температуры, и, следовательно, уравнение (14) можно записать в виде

$$-\frac{1}{T^{3/2}} \frac{dT}{dr} = r^{1/3} \left( \frac{Q}{2B} \right)^{1/3}, \quad (15)$$

где  $B = \frac{A}{\varkappa k_0^4} \left( \frac{j c}{H \sigma} \right)^2 = \text{const}$ .

Из (15) получаем

$$T = T_0 \left[ 1 + \left( \frac{r}{b} \right)^{4/3} \right]^{-2}, \quad (16)$$

где  $b = \left( \frac{8}{3} \right)^{3/4} \left[ \frac{B}{Q T_0^{3/2}} \right]^{1/4} = \text{const}$ , а  $T_0$  — температура электронов при  $r = 0$ .

Этим решением можно пользоваться, если  $b$  не мало по сравнению с радиусом плазменного шнура  $a$ . В противном случае более правильным

является приближение точечного (осевого) выделения тепла. При  $Q = \frac{Q_0 \delta(r)}{2\pi r} \frac{q}{n} = \frac{Q_0}{2\pi r}$ , откуда

$$-\frac{1}{T^{3/2}} \frac{dT}{dr} = r^{-1/3} \left( \frac{Q_0}{2\pi B} \right)^{1/3}. \quad (17)$$

Решение этого уравнения есть

$$T = T_0 \left[ 1 + \left( \frac{r}{b_1} \right)^{2/3} \right]^{-2}, \quad (18)$$

где  $b_1 = \left( \frac{4}{3} \right)^{3/2} \left[ \frac{2\pi B}{Q_0 T_0^{3/2}} \right]^{1/2}$ .

Сравнивая (16) и (18), мы видим, что при точечном выделении тепла температура медленнее спадает с радиусом. Так как при одинаковом общем тепловыделении  $Q_0 = \pi a^2 Q$ ,  $b_1 = \frac{b^2}{a}$ , то отсюда следует, что отношение  $\frac{T_0}{T_a}$  температуры в центре шнура к температуре на его границе определяется только полным тепловыделением и не зависит от его распределения по радиусу.

Рассмотрим теперь задачу о теплоотводе из шнура. В токамаке и в основных экспериментах на стеллараторе шнур был ограничен диафрагмами с радиусом отверстия  $a$ , расположенными на расстоянии  $l$  друг от друга (в стеллараторе  $l = \mathcal{L}_0 =$  полной длине обхода). Трубка с плазмой, вышедшая за край диафрагмы, упирается в нее концом и начинает терять частицы. Следует различать уход квазинейтральной плазмы и теплообмен электронов с диафрагмой. Плазма уходит вдоль силовых линий со скоростью  $v_i \sim \sqrt{T/M}$ , а процесс теплообмена электронов со стенкой является более сложным. В силу того, что скорость электронов  $v_e \sim \sqrt{T/m} \gg v_i$  электроны быстрее покидают трубку с плазмой, и она приобретает потенциал  $\varphi \sim \frac{T}{e} \ln \frac{v_e}{v_i}$ , который задерживает уход электронов. Падение этого потен-

циала происходит на длине дебаевского радиуса  $d = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 n}}$ , который составляет всего  $10^{-3}$  см для рассматриваемых нами значений  $T \sim 30$  эВ,  $n \sim 10^{13}$ . Таким образом, вблизи диафрагмы имеется поле  $E \sim 10^5$  В/см. Если диафрагма несколько разогревается бомбардирующими ее частицами, то под действием этого потенциала может возникнуть достаточно большая эмиссия электронов из металла и загореться униполярная дуга [9].

Будем характеризовать уход тепла из трубки скоростью  $v^*$ . Если дуга отсутствует, и температура понижается по мере утекки плазмы на диафрагмы, то  $v^*$  будет порядка  $v_i$ . В другом предельном случае, когда зажигается дуга и, кроме того, ток эмиссии ничем не ограничен, горячие электроны будут уходить из плазмы со своими тепловыми скоростями  $v_e \sim \sqrt{T/m}$  (или  $v_T \sim \frac{\chi}{T}$ , если  $v_T < v_e$ ). Если же ток эмиссии ограничен, то  $v^*$  примет некоторое промежуточное значение между  $v_i$  и  $v_e$ . Поэтому приближенно положим  $v^* \sim \sqrt{v_i v_e} \sim 10^7$  см/с для  $T \sim 30$  эВ.

Если приближенно считать, что поперечный перенос тепла между диафрагмами определяется тем же коэффициентом температуропроводности (12), что и внутри шнура, то для области между диафрагмами будем иметь

$$\frac{1}{n} \operatorname{div} \mathbf{q} = -\frac{d}{dx} \left[ \frac{B}{T^{3/2}} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 \right] = -\frac{v^* T}{l}. \quad (19)$$

Это уравнение решается в квадратурах

$$x = \int_T^{T_a} \frac{dT}{T^{3/2} \left[ C + \frac{8v^*}{3lB} T^{1/2} \right]^{1/4}}. \quad (20)$$

Нетрудно проверить, что константа  $C$  связана с потоком тепла на боковую стенку. Если диафрагмы достаточно широкие, то все тепло выделяется именно на них, и тогда константу  $C$  можно положить равной нулю. При этом из (20) получается граничное условие для внутренней задачи

$$\left( \frac{dT}{dr} \right)_a = - \left[ \frac{8v^* T_a^{1/2}}{3lB} \right]^{1/4} T_a^{3/2}. \quad (21)$$

Отсюда находим поток тепла из шнура на его границе:  $q_a = nUT_a$ , где величина  $U$ , имеющая размерность скорости, равна

$$U = \left( \frac{8v^*}{3l} \right)^{3/4} \left( \frac{A}{\chi k_0^4} \right)^{1/4} \left( \frac{jc}{H\sigma} \right)^{1/2}. \quad (22)$$

Так как  $\frac{j}{\sigma}$  можно считать не зависящей от  $T$ ,  $v^* \sim \sqrt{T}$ ,  $\chi \sim T^{5/2}$ , то из (22) следует, что  $U$  очень слабо зависит от температуры, всего лишь как  $T^{-1/4}$ . Поэтому приближенно можно считать  $U = \text{const}$ .

Чтобы получить окончательное решение задачи теплового баланса, нужно подобрать  $Q_0 = \pi a^2 Q$  таким, чтобы температура  $T_0$  в центре соответствовала наблюдаемой. Из (16) или (18) имеем

$$\sqrt{\frac{T_0}{T_a}} = 1 + \frac{3}{4} \sqrt{T_0} a^{2/3} \left( \frac{Q_0}{2\pi B} \right)^{1/3}. \quad (23)$$

Но в квазиравновесном состоянии  $Q_0 = \frac{1}{n} 2\pi a q_a = 2\pi a U T_a$ . Подставляя это в (23), находим уравнение для определения температуры  $T_a$  на границе шнура

$$\sqrt{\frac{T_a}{T_0}} + aS \left( \frac{T_a}{T_0} \right)^{5/6} = 1, \quad (24)$$

$$\text{где } S = S(T_0) = \frac{3}{4} \left( \frac{UT_0^{5/2}}{B} \right)^{1/3}.$$

Отсюда видно, что при заданной температуре в центре, т. е.  $S = \text{const}$ , увеличение радиуса диафрагмы приводит к уменьшению  $\frac{T_a}{T_0}$ , а следовательно, и  $\frac{b}{a}$ . Это в какой-то мере соответствует тому экспериментальному факту, что в токамаке во время второго максимума тока наблюдается

уменьшение радиуса шнура с током до 2–3 см (при  $a = 10$  см). Ввиду того, что формула (24) очень груба, ей вряд ли можно доверять количественно, тем не менее любопытно отметить, что оценки дают для стелларатора  $\frac{b}{a} \sim 1$ , а для токамака  $\frac{b}{a} \sim 0, 3$ .

### 3. Турбулентная диффузия

Рассмотренный выше турбулентный перенос тепла имеет конвекционный характер: тепло переносится хаотически движущейся плазмой. Это движение несжимаемо, поэтому в отсутствие градиента плотности оно не переносит вещества. Но если плотность не постоянна, то та же самая турбулентность приведет к диффузии с коэффициентом  $D = \chi_T$ .

Так как частицы из трубок с плазмой выходят на диафрагму со скоростью  $v_i$ , которая, по-видимому, много меньше  $v^*$  — скорости утечки тепла, то в квазиравновесном состоянии плотность  $n$  будет выравнена по  $r$  и ее утечка на границе шнура будет равна  $q_n = \frac{v_i}{v^*} \frac{1}{T_a} q_a$ . Следовательно,

$$-\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{2\pi a q_n}{\pi a^2} = \frac{n}{\tau_0}, \quad (25)$$

где

$$\tau_0 = \frac{av^*}{2v_i U} = \frac{k_0 a}{2v_i} \left(\frac{3l}{8}\right)^{3/4} \left(\frac{v^* \chi}{A}\right)^{1/4} \left(\frac{H\sigma}{jc}\right)^{1/2}. \quad (26)$$

Отсюда видно, что в квазиравновесном состоянии плотность плазмы убывает экспоненциально с характерным временем  $\tau_0$ . Как уже отмечалось ранее,  $U$ , а следовательно, и  $\tau_0$  практически не зависят от температуры. Время жизни  $\tau_0$  очень слабо зависит от магнитного поля: если считать  $k_0 = \text{const}$ , то  $\tau_0 \sim \sqrt{H}$ , что как раз соответствует экспериментально измеренной зависимости. Кроме того, время жизни (26) слабо зависит от продольного электрического поля  $E_0 = j/\sigma$ . Зависимость  $\tau_0$  от неизвестных параметров  $v^*$  и  $A$  очень слабая, но зато  $\tau_0$  довольно сильно зависит от  $k_0$  — плохо определенного параметра. Время  $\tau_0$  сравнительно быстро убывает с уменьшением  $l$ , и, по-видимому, именно этим можно объяснить тот факт, что время жизни в стеллараторе без диафрагмы оказывается меньше, чем с диафрагмой: в отсутствие диафрагмы шнур может касаться стенки в нескольких точках, и это в какой-то степени эквивалентно уменьшению  $l$ .

Оценим порядок величины  $\tau_0$ . Для стелларатора с диафрагмой радиуса  $a = 1,4$  см при поле  $H = 3 \cdot 10^4$  Э можно приближенно положить  $k_0 \approx 10^{-2}$ ,  $l = 6 \cdot 10^2$ ,  $T \approx 30$  эВ,  $\sigma \approx 10^{15}$ ,  $\chi \approx 10^{10}$ ,  $v_i \approx 10^6$ ,  $v^* \approx 10^7$ ,  $j \approx 40$  А/см<sup>2</sup>,  $A = 10$ .

Для таких параметров  $U \approx 2 \cdot 10^4$  см/с,  $\tau_0 \approx 3 \cdot 10^{-4}$  с. Таким образом, время жизни (26) всего лишь вдвое отличается от экспериментально измеренного значения  $\tau_0 = 1,7 \cdot 10^{-4}$  с.

Для токамака при  $H = 6 \cdot 10^3$  Э ( $a = 10$  см)  $k_0 \approx 10^{-2}$ ,  $l = 2 \cdot 10^2$ ,  $T \approx 30$  эВ,  $\sigma \approx 10^{13}$ ,  $\chi \approx 10^{10}$ ,  $v_i \approx 10^6$ ,  $v^* \approx 10^7$ ,  $j = 50$  А/см<sup>2</sup>,  $A = 10$ . Отсюда имеем  $U \approx 10^5$  см/с,  $\tau_0 \approx 5 \cdot 10^{-4}$  с; экспериментальная оценка  $\tau_0$  дает величину порядка миллисекунды.

## Заключение

Итак, рассмотренный здесь механизм токово-конвективной турбулентности приводит к утечке частиц, имеющей тот же порядок величины, что и обнаруженная экспериментально. Может быть, этого еще и недостаточно для утверждения, что данный механизм является основным, но во всяком случае он существует и играет существенную роль в процессах переноса тепла и плазмы в разряде, стабилизированном продольным магнитным полем.

Согласно формуле (26) время жизни  $\tau_0$  очень слабо зависит от температуры электронов. Однако этот вывод справедлив только до тех пор, пока  $s_A > \chi k_0$ . Если температура электронов достигает такой величины, что это условие нарушается, то пользоваться формулой (9) для инкремента, а следовательно, и формулой (12) для коэффициента турбулентной диффузии уже нельзя. Из (10) следует, что в этом случае можно ожидать ослабления интенсивности конвективного переноса тепла, но чтобы убедиться в этом, необходимо провести более детальное исследование.

В заключение отметим, что рассмотренная здесь конвекция и усиленная диффузия частиц из положительного столба в продольном магнитном поле [7, 8] являются двумя предельными случаями одного и того же явления — токово-конвективной неустойчивости. Чтобы убедиться в этом, допустим, что положительный столб помещен в магнитное поле настолько сильное, что циклотронные частоты электронов и ионов становятся много больше частоты их столкновений с молекулами нейтрального газа. В этом случае в поперечном движении заряженных частиц можно пренебречь соударениями, и их скорость поперек магнитного поля будет равна скорости электрического дрейфа  $\frac{c}{H_0} [\mathbf{h}_0 \nabla \varphi]$ . Если воспользоваться квазиклассическим приближением, то из линеаризованного уравнения амбиполярной диффузии получим

$$-i\omega n - i \frac{ck_y}{H_0} \frac{dn_0}{dx} \varphi = -D_a k_x^2 n, \quad (27)$$

где  $D_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии.

Далее, так как поперечные скорости электронов и ионов равны, то в силу квазинейтральности возмущение продольного тока должно быть равно нулю, т. е.

$$-ik_z \varphi n_0 + n E_0 = 0. \quad (28)$$

Из (27) и (28) находим частоту  $\omega$

$$\omega = -i D_a k_z^2 + i \frac{k_y E_0 c}{k_z H_0} \frac{d \ln n_0}{dx}. \quad (29)$$

Сравнивая (9) и (29), мы приходим к заключению, что разница между слабо ионизованной и полностью ионизованной плазмой состоит лишь в том, что в полностью ионизованной плазме  $\sigma$  зависит только от температуры, а в слабо ионизованной плазме проводимость пропорциональна плотности и слабо зависит от  $T$ , и поэтому ее неустойчивость связана только с градиентом  $n_0$ .

Таким образом, оба эти явления имеют общую природу, и если винтовое искривление положительного столба [6] аналогично возникновению

ячеек Бенара, то рассмотренный в настоящей работе механизм переноса является аналогом сильно развитой турбулентной конвекции в обычной жидкости.

*Список литературы*

1. *Coor T., Ellis R.A., Heald M.A., Kranz A.Z.* // Report P/362 on the Second Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958.
2. *Ellis R.A., Goldberg L.P., Gorman J.G.* // Phys. Fluids. 1960. V. 3. P. 468.
3. *Горбунов Е.П., Долгов-Савельев Г.Г., Мухоматов В.С., Стрелков В.С., Явлинский Н.А.* // ЖТФ. 1960. Т. XXX. С. 1152.
4. *Bernstein J.B., Frieman E.A., Kulsrud R.M., Rosenbluth M.N.* // Phys. Fluids. 1960. V. 3. P. 136.
5. *Spitzer L.* // Phys. Fluids. 1960. V. 3. P. 659.
6. *Kadomtsev B.B., Nedopasov A.V.* // J. Nucl. Energy. 1960. V. 1. Part C. P. 230.
7. *Lehnert B.* // Report P/146 on the Second Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958.
8. *Hoh F.C., Lehnert B.* // Phys. Fluids. 1960. V. 3. P. 600.



## СЛАБО ТУРБУЛЕНТНАЯ ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ \*)

Получены уравнения, описывающие поведение слабо турбулентной плазмы в магнитном поле с учетом взаимодействия между волнами. В такой плазме взаимодействие между различными колебаниями достаточно мало и может быть учтено в виде разложения по степеням квадрата амплитуды колебаний. Обсуждается вопрос об «аномальной» диффузии плазмы в магнитном поле при наличии колебаний.

### 1. Введение

По сравнению с обычной жидкостью плазма обладает гораздо более богатым запасом различных форм турбулентного движения. В частности, наряду с сильной турбулентностью магнитогидродинамического характера [1, 2] в плазме могут развиваться различного рода слабо турбулентные состояния (этот термин был предложен А.А. Веденовым), для которых характерно наличие многих слабо взаимодействующих между собой колебаний.

В отношении статистического описания состояния такого типа во многом сходны с системой слабо взаимодействующих частиц (т. е. с той же плазмой в термодинамическом аспекте), и для них естественно использовать разложение по малому отношению энергии взаимодействия колебаний к их полной энергии. Как было показано в работах Веденова и др. [3] и Друммонда и Пайнса [4], уже на основе так называемого квазилинейного приближения, в котором не учитывается взаимодействие между колебаниями, удается рассмотреть ряд вопросов возбуждения и обратного влияния колебаний на усредненную функцию распределения частиц в однородной слабо турбулентной плазме.

К сожалению, квазилинейное приближение не применимо к рассмотрению ряда задач по «аномальной» диффузии плазмы поперек магнитного поля, в частности связанной с дрейфовой неустойчивостью плазмы [5, 6]. Для решения такого рода задач необходимо учесть взаимодействие между колебаниями.

В отличие от динамического рассмотрения в работах Друммонда и Пайнса [4] и Старрока [7], в которых вопрос о взаимодействии волн дискутировался в применении к одномерным ленгмюровским колебаниям, в настоящей работе с самого начала используется статистический подход, а именно, составляются цепочки уравнений для корреляционных функций, полученных путем усреднения по некоторому статистическому ансамблю.

\*) *Кадомецв Б.Б., Петвиашвили В.И.* // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. Вып. 6(12). С. 2234–2244.

При этом разложению по малой энергии взаимодействия волн соответствует учет все большего и большего числа корреляций между колебаниями, т. е. числа волн, участвующих в отдельном элементарном акте взаимодействия.

Для простоты мы ограничились здесь учетом лишь первой не исчезающей корреляции, а именно, третьей. Отбрасывание высших корреляций оправдано, по-видимому, в области прозрачности, где затухание или нарастание волн достаточно мало. Точнее говоря, амплитуда каждой отдельной волны должна мало изменяться за характерное время существенного изменения сдвига фаз между различными колебаниями.

В работе показано, что аналогичные цепочки уравнений можно построить также по методу Винера [8] разложения произвольного случайного процесса по степеням броуновского движения. Результаты таких двух разложений оказываются несколько различными, что можно отнести за счет большого числа допущений, принимаемых при обрыве цепочек по схеме Винера.

## 2. Продольные колебания

Для простоты начнем с рассмотрения продольных колебаний, в которых электрическое поле можно считать безвихревым:  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . В сильном магнитном поле к таким колебаниям относятся ионнозвуковые, которые в неоднородной плазме могут переходить в дрейфовые [6] и плазменные (ленгмюровские). Функцию распределения  $f_j$  частиц сорта  $j$  разобьем на два слагаемых  $f_j = f_0^j + F^j$ , где  $f_0^j = \langle f_j \rangle$  — среднее значение от функции распределения по некоторому статистическому ансамблю.

Будем считать, что средние функции  $f_0^j$  являются медленно меняющимися функциями пространства и времени. Предполагая, что длина волны возбуждающихся в плазме высокочастотных колебаний значительно меньше размеров неоднородности, мы разложим  $F^j$  в интеграл Фурье:

$$F^j = \int F_{\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\omega d\mathbf{k},$$

подставим это выражение в кинетическое уравнение с самосогласованным полем и при помощи усреднения разобьем его на два:

$$\frac{\partial f_0^j}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f_0^j + \frac{e_j}{m_j} \left\{ \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_0] \right\} \frac{\partial f_0^j}{\partial \mathbf{v}} = S_j \equiv \frac{e_j}{m_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int i\mathbf{k} \langle \Phi_{-\mathbf{k}, -\omega} F_{\mathbf{k}\omega}^j \rangle d\mathbf{k} d\omega, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} L_j F_{\mathbf{k}\omega}^j &\equiv (-i\omega + i\mathbf{k}\mathbf{v}) F_{\mathbf{k}\omega}^j + \frac{e_j}{m_j} \{ \mathbf{E}_0 + c^{-1} [\mathbf{v}\mathbf{H}_0] \} \frac{\partial F_{\mathbf{k}\omega}^j}{\partial \mathbf{v}} = \\ &= \frac{e_j}{m_j} i\mathbf{k}\Phi_{\mathbf{k}\omega} \frac{\partial f_0^j}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_j}{m_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int i\mathbf{k}' (\Phi_{\mathbf{k}'\omega'} F_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} - \langle \Phi_{\mathbf{k}'\omega'} F_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} \rangle) d\mathbf{k}' d\omega', \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Phi_{\mathbf{k}\omega}$  представляет собой фурье-компоненту потенциала электрического поля, равную

$$\Phi_{\mathbf{k}\omega} = \sum_j \frac{4\pi e_j}{k^2} \int F_{\mathbf{k}\omega}^j d\mathbf{v}, \quad (3)$$

а остальные обозначения общеприняты.

Перепишем уравнение (2) в виде

$$F_{\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v}) = \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^j \left\{ \mathbf{k} \Phi_{\mathbf{k}\omega} f_0^j + \int \mathbf{k}' (\Phi_{\mathbf{k}'\omega'} F_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega'} - \langle \Phi_{\mathbf{k}'\omega'} F_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega'} \rangle) d\mathbf{k}', d\omega' \right\}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^j = iL_j^{-1}(e_j/m_j) \partial/\partial\mathbf{v}$  — оператор, действующий на переменную  $\mathbf{v}$ .

Если пренебречь в (4) квадратичными членами, то получим

$$F_{\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v}) = k\mu_{\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v})\Phi_{\mathbf{k}\omega},$$

где

$$\mu_{\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v}) = \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^j \frac{\mathbf{k}}{k} f_0^j = iL_j^{-1} \frac{e_j}{m_j} \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\partial f_0^j}{\partial \mathbf{v}}. \quad (5)$$

Подставляя это выражение в (3), получим дисперсионное уравнение  $\varepsilon = 0$ , где

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \sum_j \frac{4\pi e_j}{k} \int \mu_{\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (6)$$

представляет собой диэлектрическую проницаемость плазмы.

В общем случае  $\varepsilon$  является комплексной, что соответствует наличию затухания или нарастания волн. В случае неустойчивости ( $\text{Im } \omega > 0$ ) колебания будут, очевидно, нарастать до тех пор, пока не начнет сказываться их влияние на усредненную функцию распределения и их взаимодействие между собой, обусловленное нелинейными эффектами. В условиях, когда инкремент мал, т. е.  $\text{Im } \omega \ll \text{Re } \omega$ , можно ожидать, что нарастание колебаний остановится на довольно низком уровне, при котором нелинейное взаимодействие еще мало. Пользуясь этим обстоятельством, можно провести разложение по малому отношению энергии взаимодействия волн к их полной энергии и ограничиться лишь первыми членами разложения.

Рассмотрим сначала однородное установившееся состояние. При этом все двойные корреляции будут содержать  $\delta$ -функции, а именно:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\mathbf{k}'\omega'} \Phi_{\mathbf{k}\omega}^* \rangle &= I_{\mathbf{k}\omega} k^{-2} \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \langle F_{\mathbf{k}'\omega'}^j \Phi_{\mathbf{k}\omega}^* \rangle &= P_{\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v}) \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned}$$

Умножая уравнение (4) на  $\Phi_{\mathbf{k}\omega}^*$  и производя усреднение, получим

$$P_{\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v}) = \mu_{\mathbf{k}\omega}^j k^{-1} I_{\mathbf{k}\omega} + \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^j \int (\mathbf{k} - \mathbf{k}') Q_{\mathbf{k}'\omega',\mathbf{k}\omega}^j d\mathbf{k}' d\omega', \quad (7)$$

где  $Q_{\mathbf{k}'\omega',\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v})$  представляет собой тройную корреляционную функцию:

$$Q_{\mathbf{k}'\omega',\mathbf{k}\omega}^j \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') \delta(\omega - \omega'') = \langle F_{\mathbf{k}'\omega'} \Phi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega'} \Phi_{\mathbf{k}''\omega''}^* \rangle.$$

Умножая уравнение (4) на  $\Phi_{\mathbf{k}''-\mathbf{k},\omega-\omega''} \Phi_{\mathbf{k}\omega}^*$  и усредняя его затем по статистическому ансамблю, получим уравнение для тройной функции. При этом в правой части появится четверной член, для которого мы должны были бы в свою очередь написать уравнение, и т. д. Воспользовавшись предположением о малости взаимодействия, мы оборвем цепочку, пренебрегая четверной корреляцией волн с четырьмя различными  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$ , т. е. приравняем четверную корреляционную функцию произведению парных.

В этом приближении получаем

$$Q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega}^j = k\mu_{\mathbf{k}'\omega'}^j q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega} + \mathbf{g}_{\mathbf{k}'\omega'}^j \left\{ \frac{\mathbf{k}}{k^2} I_{\mathbf{k}\omega} P_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega}^j + \frac{\mathbf{k}'-\mathbf{k}}{(\mathbf{k}'-\mathbf{k})^2} I_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega} P_{\mathbf{k}\omega}^j \right\}, \quad (8)$$

$$q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \delta(\omega' - \omega'') = \langle \Phi_{\mathbf{k}'\omega'} \Phi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} \Phi_{\mathbf{k}''\omega''}^* \rangle.$$

Пользуясь уравнением (3), исключаем из (8)  $q$  и получаем

$$Q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega}^j = \sum_s \mathbf{G}_{\mathbf{k}'\omega'}^{js} \left\{ \frac{\mathbf{k}}{k^2} I_{\mathbf{k}\omega} P_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega}^s + \frac{\mathbf{k}'-\mathbf{k}}{(\mathbf{k}'-\mathbf{k})^2} I_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega} P_{\mathbf{k}\omega}^s \right\} + q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega}^0. \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{G}_{\mathbf{k}\omega}^{js}$  — оператор, действующий на произвольную функцию от скорости  $\mathbf{y}(\mathbf{v})$  по правилу

$$\mathbf{G}_{\mathbf{k}\omega}^{js} \mathbf{y}(\mathbf{v}) = \delta_{js} \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^s \mathbf{y}(\mathbf{v}) + \frac{4\pi e_s}{k\varepsilon_1(\mathbf{k}, \omega)} \mu_{\mathbf{k}\omega}^j \int \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^s \mathbf{y}(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

где под  $\varepsilon_1(\mathbf{k}, \omega)$  следовало бы понимать  $\text{Re} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ , так как мнимой частью  $\varepsilon$ , по предположению малой, в принятом нами здесь приближении можно пренебречь. Но, учитывая возможность обращения  $\text{Re} \varepsilon$  в нуль, необходимо установить, кроме того, правило обхода полюсов. Это правило устанавливается на основе естественного допущения, что при учете высших корреляций свободные колебания  $Q \sim \delta(\varepsilon)$  должны быть затухающими. Таким образом, полюсы в  $Q$  следует обходить, как обычно, в верхней полуплоскости комплексного  $\omega$ . Другими словами, под  $\varepsilon_1$  следует понимать  $\text{Re} \varepsilon$ , к которой добавлена мнимая константа, учитывающая затухание  $Q$ .

Величина  $q^0$  в (9) возникла при исключении  $q$ ; она является пока произвольным решением уравнения  $\varepsilon_1(\mathbf{k}', \omega') q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega}^0 = 0$ . Величина  $q^0$  включает в себя затухающую начальную корреляцию, которой можно пренебречь, и некоторую стационарную часть, которая может быть найдена из следующих соображений. В формуле (8) мы учли малый квадратичный член в выражении для  $F_{\mathbf{k}'\omega'}^j$ , и при этом величины  $\Phi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}$  и  $\Phi_{\mathbf{k}''\omega''}^*$  можно было взять в нулевом приближении, т. е. считать никак не коррелированными. В выражении для  $q$  с равным основанием можно в  $\Phi_{\mathbf{k}'\omega'}$  оставить лишь нулевой член, представляющий собой потенциал свободных колебаний, так что  $\varepsilon_1(\mathbf{k}', \omega') \Phi_{\mathbf{k}'\omega'} = 0$ , но при этом в  $\Phi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}$  и  $\Phi_{\mathbf{k}''\omega''}^*$  следует учесть квадратичные члены при помощи (3), (4). Заменяя опять четверную корреляционную функцию на произведение парных, приводим эту дополнительную корреляцию к виду

$$q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega}^0 = \sum_s \frac{4\pi e_s}{|\mathbf{k}'-\mathbf{k}|^2 \varepsilon_1(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega')} \int \mathbf{g}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^s \left\{ \frac{\mathbf{k}}{k^2} I_{\mathbf{k}\omega} P_{-\mathbf{k}, -\omega'}^s - \frac{\mathbf{k}'}{k'^2} I_{\mathbf{k}'\omega'} P_{\mathbf{k}\omega}^s \right\} d\mathbf{v} + \sum_s \frac{4\pi e_s}{k^2 \varepsilon_1(\mathbf{k}, \omega)} \int \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^{s*} \left\{ \frac{\mathbf{k}'}{k'^2} I_{\mathbf{k}'\omega'} P_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^{s*} + \frac{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|^2} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} P_{\mathbf{k}'\omega'}^{s*} \right\} d\mathbf{v}. \quad (10)$$

Если выражение (9) для  $Q$  с учетом (10) подставить в (7), то нетрудно заметить, что  $P_{\mathbf{k}\omega}^j$  можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$P_{\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v}) = k^{-1} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j I_{\mathbf{k}\omega} + p_{\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v}),$$

где первое слагаемое пропорционально  $I_{\mathbf{k}\omega}$ , а второе — является малой величиной.

Пренебрегая величиной  $p_{\mathbf{k}\omega}$  в выражении для  $Q$ , разбиваем каждое из уравнений (7) на два:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j &= \mu_{\mathbf{k}\omega}^j + \sum_s \int \left( \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^j \right) \mathbf{G}_{\mathbf{k}'\omega'}^s \left\{ \frac{\mathbf{k}}{k} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega}^s + \right. \\ &+ \left. \frac{\mathbf{k}' - \mathbf{k}}{|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^s \right\} I_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega} d\mathbf{k}' d\omega' + \sum_s \int \frac{4\pi e_s}{k'^2 \varepsilon_1(\mathbf{k}', \omega')} (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^j \mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^j) \times \\ &\times \int \mathbf{g}_{\mathbf{k}'\omega'}^s(\mathbf{v}') \left\{ \frac{\mathbf{k}}{k} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega}^s(\mathbf{v}') + \frac{\mathbf{k}' - \mathbf{k}}{|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^s(\mathbf{v}') \right\} d\mathbf{v}' I_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega} d\mathbf{k}' d\omega', \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v}) &= \sum_s \frac{4\pi e_s}{k^2 \varepsilon_1^*(\mathbf{k}, \omega)} \int \left( \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^j \mu_{\mathbf{k}'\omega'}^j \right) \int \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^{s*}(\mathbf{v}') \left\{ \frac{\mathbf{k}'}{k'} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^{s*}(\mathbf{v}') + \right. \\ &+ \left. \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}'\omega'}^{s*}(\mathbf{v}') \right\} d\mathbf{v}' I_{\mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} d\mathbf{k}' d\omega'. \end{aligned} \quad (11b)$$

Если ввести в рассмотрение эффективную диэлектрическую проницаемость слабо турбулентной плазмы

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \sum_j \frac{4\pi e_j}{k} \int \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (12)$$

то, используя приведенное выше представление для  $P_{\mathbf{k}\omega}$  в виде двух слагаемых, умножением (3) на  $\Phi_{\mathbf{k}\omega}^*$  с последующим усреднением получим

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega) I_{\mathbf{k}\omega} = \sum_j 4\pi e_j \int p_{\mathbf{k}\omega}^j d\mathbf{v}.$$

Подставляя сюда вместо  $p_{\mathbf{k}\omega}^j$  выражение (11b) и заменяя приближенно  $\varepsilon_1^*$  на  $\tilde{\varepsilon}^*$  и  $\mu_{\mathbf{k}\omega}^s$  на  $\tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^s$ , что вполне допустимо в рамках принятого нами приближения, приводим это соотношение к виду

$$\begin{aligned} |\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega)|^2 I_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{1}{2} \int \left| \sum_j \frac{4\pi e_j}{k} \int \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^j \left\{ \frac{\mathbf{k}/2 - \mathbf{k}'}{|\mathbf{k}/2 - \mathbf{k}'|} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}/2+\mathbf{k}', \omega/2+\omega'}^j + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\mathbf{k}/2 + \mathbf{k}'}{|\mathbf{k}/2 + \mathbf{k}'|} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}/2-\mathbf{k}', \omega/2-\omega'}^j \right\} d\mathbf{v} \right|^2 I_{\mathbf{k}/2+\mathbf{k}', \omega/2+\omega'} I_{\mathbf{k}/2-\mathbf{k}', \omega/2-\omega'} d\mathbf{k}' d\omega'. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда видно, что флуктуации электрического поля в слабо турбулентной плазме могут быть представлены как колебания в среде с диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\varepsilon}$  под действием источника шумов, интенсивность которого дается правой частью (13). Если пренебречь последней, то турбулентное движение будет представлять собою набор колебаний с собственными частотами  $\omega_{\mathbf{k}}$ , которые определяются уравнением  $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = 0$ .

## 2. Произвольные колебания

Как известно, для плазмы в магнитном поле выделение продольных колебаний является лишь приближенным, и при более точном рассмотрении необходимо учитывать возмущение магнитного поля. Переходя опять к фурье-представлению, получим в общем случае вместо (2)

$$L_j F_{\mathbf{k}\omega}^j = -\frac{e_j}{m_j} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}] \right\} \frac{\partial f_0^j}{\partial \mathbf{v}} - \\ - \frac{e_j}{m_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \left\{ \left( \mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_{\mathbf{k}'\omega'}] \right) F_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} - \right. \\ \left. - \left\langle \left( \mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_{\mathbf{k}'\omega'}] \right) F_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} \right\rangle \right\} d\mathbf{k}' d\omega'. \quad (14)$$

Вместо уравнения (3) приходится использовать систему уравнений Максвелла:

$$i[\mathbf{k}\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}] + i\frac{\omega}{c} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi}{c} \sum_j e_j \int \mathbf{v} F_{\mathbf{k}\omega}^j d\mathbf{v}, \quad (15)$$

$$i[\mathbf{k}\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}] - i\frac{\omega}{c} \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = 0. \quad (16)$$

Рассмотрим сначала однородную стационарную в среднем плазму. Будем считать, что плазма является слабо неравновесной, так что волны возбуждаются лишь в области прозрачности, где инкремент нарастания колебаний в линейном приближении значительно меньше частоты. Чтобы не повторять приведенные в предыдущем пункте выкладки, а также продемонстрировать другой возможный путь составления цепочек связанных уравнений, мы воспользуемся здесь методом Винера разложения стационарного случайного процесса по степеням броуновского движения.

Согласно Винеру [8], любая стационарная случайная функция (в нашем случае это, скажем, электрическое поле  $\mathbf{E}$ ) может быть разложена в ряд по ортогональным функционалам от броуновского движения:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots; \quad \mathbf{E}_0 = \langle \mathbf{E} \rangle, \\ \mathbf{E}_1 = \int \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \rho(\mathbf{k}, \omega, \alpha) d\mathbf{k} d\omega, \quad (17)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{2} \int \mathbf{E}_2(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega') e^{-i(\omega+\omega')t + i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}} \rho(\mathbf{k}, \omega, \alpha) \times \\ \times \rho(\mathbf{k}', \omega', \alpha) d\mathbf{k} d\omega d\mathbf{k}' d\omega' - \frac{1}{2} \int \mathbf{E}_2(\mathbf{k}, \omega; -\mathbf{k}, -\omega) d\mathbf{k} d\omega, \quad (18)$$

и т. д. Здесь  $\alpha$  — переменная, нумерующая броуновские траектории,  $\rho$  — смещение броуновской частицы, моделирующей наш случайный процесс. Единственное свойство этого броуновского движения, используемое в приведенном выше разложении, состоит в корреляционном соотношении:

$$\langle \rho(\mathbf{k}, \omega, \alpha) \rho(\mathbf{k}', \omega', \alpha) \rangle \equiv \int \rho(\mathbf{k}, \omega, \alpha) \rho(\mathbf{k}', \omega', \alpha) d\alpha = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega'). \quad (19)$$

Из соотношений (17)–(19) видно, что, оставляя только  $\mathbf{E}_1$ , мы считаем колебания не зависящими друг от друга, учет членов второго порядка соответствует учету первой и исчезающей корреляции между различными колебаниями, т. е. тройной, и т. д. Таким образом, в том приближении, которое было принято в предыдущем пункте, естественно пренебречь всеми высшими членами, начиная с  $\mathbf{E}_3$ .

Подставляя разложения для  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $F$  в кинетическое уравнение, умножая его затем на  $\rho(\mathbf{k}, \omega, \alpha)$ ,  $\rho(\mathbf{k}, \omega, \alpha)\rho(\mathbf{k}', \omega', \alpha)$ , и т. д. и интегрируя по  $\alpha$ , получим цепочку уравнений для  $\mathbf{E}_i$ ,  $\mathbf{H}_i$ ,  $F_i$ :

$$\begin{aligned} F_1^j(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{v}) = & ig_{\mathbf{k}\omega}^j f_0^j \left\{ \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_1(\mathbf{k}, \omega)] \right\} + \\ & + ig_{\mathbf{k}\omega}^j \int \left\{ \mathbf{E}_1(-\mathbf{k}', -\omega') + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_1(-\mathbf{k}', -\omega')] \right\} F_2^j(\mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}, \omega; \mathbf{v}) d\mathbf{k}' d\omega' + \\ & + ig_{\mathbf{k}\omega}^j \int \left\{ \mathbf{E}_2(\mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}, \omega) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_2(\mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}, \omega)] \right\} F_1^j(-\mathbf{k}', -\omega'; \mathbf{v}) d\mathbf{k}' d\omega' + \\ & + \dots, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2^j(\mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}, \omega; \mathbf{v}) = & ig_{\mathbf{k}+\mathbf{k}', \omega+\omega'}^j f_0^j \left\{ \mathbf{E}_2(\mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}, \omega) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_2(\mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}, \omega)] \right\} + ig_{\mathbf{k}+\mathbf{k}', \omega+\omega'} \left\{ \left( \mathbf{E}_1(\mathbf{k}', \omega') + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_1(\mathbf{k}', \omega')] \right) \times \right. \\ & \left. \times F_1(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{v}) + \left( \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_1(\mathbf{k}, \omega)] \right) F_1(\mathbf{k}', \omega'; \mathbf{v}) \right\} + \dots, \quad (21) \end{aligned}$$

где точки означают отброшенные нами члены более высокого порядка. Заметим еще, что с точностью до членов более высокого порядка малости в последнем слагаемом в правой части уравнения (20) вместо  $F_1^j$  можно подставить  $ig_{\mathbf{k}\omega}^j f_0^j \{ \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) + c^{-1} [\mathbf{v}\mathbf{H}_1(\mathbf{k}, \omega)] \}$ .

Если в выражении для  $\langle |\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}^2| \rangle$  пренебречь высшими членами и считать  $\langle |\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}^2| \rangle = |\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega)|^2$ , то, сопоставляя (20), (21) с (7), (8), нетрудно убедиться, что соответствующие разложения не вполне идентичны, хотя и весьма сходны между собой. Так как метод корреляционных функций опирается на меньшее число допущений, то ему, по-видимому, следует отдать предпочтение. Впрочем, для выяснения структуры более высоких членов разложения большим преимуществом может обладать метод Винера в силу более простой схемы построения цепочек.

Определяя из уравнения (21) с учетом уравнений Максвелла  $F_2$ ,  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_2$  и подставляя найденные выражения в (20), получим уравнение, являющееся обобщением (11) на случай произвольных колебаний:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j = & \mu_{\mathbf{k}\omega}^j - \sum_s \int (\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^j \mathbf{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}) \{ (\mathbf{G}_{\mathbf{k}'\omega'}^{js} \mathbf{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega}) \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^s + \\ & + \mathbf{G}_{\mathbf{k}'\omega'}^{js} (\mathbf{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega}^s) \} I_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega} d\mathbf{k}' d\omega' + \\ & + i \sum_s \int (\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^j A(\mathbf{k}'\omega') \mathbf{v}) \frac{4\pi e_s}{\omega'} (\mu_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega}^j \mathbf{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega}) \{ (\mathbf{g}_{\mathbf{k}'\omega'}^s \mathbf{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega}) \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^s + \\ & + \mathbf{g}_{\mathbf{k}'\omega'}^s (\mathbf{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega}^s) \} I_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}, \omega'-\omega} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (22) \end{aligned}$$

где соответствующие величины определяются соотношениями

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j = \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^j f_0^j, \quad (23)$$

$$F_1^j(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) = i\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{k}\omega}^j \{ \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) + c^{-1}[\mathbf{v}\mathbf{H}_1(\mathbf{k}, \omega)] \} = i\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{k}\omega}^j \mathbf{b}_{\mathbf{k}\omega} E(\mathbf{k}, \omega), \quad (24)$$

где  $\mathbf{b}_{\mathbf{k}\omega} = \mathbf{a}_{\mathbf{k}\omega} + \mathbf{k}(\mathbf{v}\mathbf{a}_{\mathbf{k}\omega})/\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{a}_{\mathbf{k}\omega}/\omega$ ,  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}\omega}$  — единичный вектор поляризации,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = \mathbf{a}_{\mathbf{k}\omega} E(\mathbf{k}, \omega), \quad I_{\mathbf{k}\omega} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') (\mathbf{a}_{\mathbf{k}\omega})_\alpha (\mathbf{a}_{\mathbf{k}\omega}^*)_\beta = \langle E_\alpha(\mathbf{k}, \omega) E_\beta^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle.$$

Действие оператора  $\mathbf{G}_{\mathbf{k}\omega}^{js}$  на произвольную векторную функцию от скорости  $\mathbf{y}(\mathbf{v})$  определяется соотношением

$$\mathbf{G}_{\mathbf{k}\omega}^{js} \mathbf{y}(\mathbf{v}) = \delta_{js} \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^j \mathbf{y}(\mathbf{v}) + \frac{4\pi e_s}{\omega} \left\{ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\omega} (\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j \mathbf{v}) \right\} A(\mathbf{k}, \omega) \int \mathbf{v} (\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}^s \mathbf{y}(\mathbf{v})) d\mathbf{v}, \quad (25)$$

где матрица  $A$  имеет вид  $A = \left\| \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{c^2}{\omega^2} k_\alpha k_\beta - \frac{e^2 k^2}{\omega^2} \delta_{\alpha\beta} \right\|^{-1}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  — тензор диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi}{\omega} \sum_j \int e_j v_\alpha \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j \left\{ \mathbf{e}_\beta \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\omega} v_\beta \right\} d\mathbf{v}, \quad (26)$$

$\mathbf{e}_\beta$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $\beta$  ( $\beta = x, y, z$ ).

При вычислении матрицы  $A$  к  $\varepsilon$  опять следует добавлять мнимую добавку, учитывающую затухание тройной корреляционной функции.

Из наличия связи (24) между  $F_1$  и  $\mathbf{E}_1$  с учетом уравнений Максвелла (15), (16) следует, что движение слабо турбулентной плазмы можно представить в виде набора волн, электрическое поле которых удовлетворяет уравнению

$$\sum_\beta \left( k^2 \delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta \right) E_\beta(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (27)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы с учетом колебаний:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi}{\omega} \sum_j \int e_j v_\alpha \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{k}\omega}^j \left\{ \mathbf{e}_\beta \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\omega} v_\beta \right\} d\mathbf{v}. \quad (28)$$

Из (27) следует, что для каждого значения  $\mathbf{k}$  колебания могут происходить лишь с одной из собственных частот  $\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^i$ , удовлетворяющих дисперсионному уравнению

$$\det \| k^2 \delta_{\alpha\beta} - \omega^2 c^{-2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta \| = 0, \quad (29)$$

причем каждой собственной частоте соответствует свой вполне определенный вектор поляризации  $\mathbf{a}^i(\mathbf{k})$ , который в рассматриваемой нами области прозрачности можно считать действительным.

Таким образом, корреляционная функция  $\langle E_\alpha(\mathbf{k}, \omega) E_\beta^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle$  в стационарной однородной плазме может быть представлена в виде

$$\langle E_\alpha(\mathbf{k}, \omega) E_\beta^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \sum_i a_\alpha^i a_\beta^i I_i(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') \delta(\omega - \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^i), \quad (30)$$



где суммирование проводится по всем собственным частотам, принадлежащим данному волновому вектору  $\mathbf{k}$ .

Так как в области прозрачности на амплитуду шумов может сильно влиять поглощение волн стенками, то представляется желательным учесть малую неоднородность  $I(\mathbf{k})$  в пространстве, а заодно и слабую зависимость  $I(\mathbf{k})$  от времени. Для слабо нестационарного неоднородного движения плазмы выражение для парной корреляционной функции будет отличаться от (30) небольшим «уширением»  $\delta$ -функций и, главное, добавлением малых мнимых добавок, пропорциональных производным от  $I(\mathbf{k})$  по координатам и времени. Этими поправками, казалось бы, естественно пренебречь в выражении для  $\tilde{\varepsilon}$ .

Умножим уравнение (15) на  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'}^*$ , уравнение (16) — на  $\mathbf{H}_{\mathbf{k}'\omega'}^*$ , вычтем затем одно из другого и из полученного соотношения вычтем аналогичное комплексно-сопряженное соотношение с переставленными  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  и  $\omega$ ,  $\omega'$ . Окончательное выражение усредним по статистическому ансамблю. С учетом (24), (28) и того, что производные от корреляционной функции  $\langle E_\alpha(\mathbf{k}, \omega) E_\beta^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle$  равны  $\partial/\partial t = -i(\omega - \omega')$ ,  $\nabla = i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , получаем уравнение баланса энергии:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{\omega}{4\pi} \operatorname{Im}(\mathbf{a}\tilde{\varepsilon}\mathbf{a})I(\mathbf{k}), \quad (31)$$

где энергия волны  $W$  равна

$$W = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \langle \omega \mathbf{E}^* \varepsilon \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{H}^* \mathbf{H} \rangle \right\} = \frac{I(\mathbf{k})}{8\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \mathbf{a}\tilde{\varepsilon}\mathbf{a}) + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \frac{c^2}{\omega^2} (\mathbf{k}\mathbf{a})^2 \right\}, \quad (32)$$

а вектор потока энергии  $\mathbf{S}$  дается соотношением

$$\mathbf{S} = \left\{ \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} - \frac{c^2}{\omega} \mathbf{a}(\mathbf{k}\mathbf{a}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} (\omega \mathbf{a}\tilde{\varepsilon}\mathbf{a}) \right\} \frac{I(\mathbf{k})}{8\pi}. \quad (33)$$

В выражениях для  $W$  и  $\mathbf{S}$  под  $\tilde{\varepsilon}$  следует подразумевать эрмитовскую часть тензора диэлектрической проницаемости, в соответствии с чем скалярную величину  $(\mathbf{a}\tilde{\varepsilon}\mathbf{a})$  можно считать действительной, а дифференцирование по  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  следует производить при постоянном  $\mathbf{a}$ .

Подставляя далее в векторное уравнение (27)  $\mathbf{E} = \mathbf{a}E$  и умножая его затем на  $\mathbf{a}$ , получаем

$$\tilde{D} \equiv \omega^2 c^{-2} (\mathbf{a}\tilde{\varepsilon}\mathbf{a}) + (\mathbf{k}\mathbf{a})^2 - k^2 = 0, \quad (34)$$

откуда в предположении малости антиэрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости находим величину инкремента:

$$\tilde{\gamma} = -\operatorname{Im}(\mathbf{a}\tilde{\varepsilon}\mathbf{a}) \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \mathbf{a}\tilde{\varepsilon}\mathbf{a}) + \frac{c^2}{\omega^2} k^2 - \frac{c^2}{\omega^2} (\mathbf{k}\mathbf{a})^2 \right\}^{-1}. \quad (35)$$

Учитывая, что вектор потока энергии можно представить в виде  $\mathbf{S} = \mathbf{U}I(\mathbf{k})$ , где  $\mathbf{U} = -(\partial\tilde{D}/\partial\mathbf{k})(\partial\tilde{D}/\partial\omega)^{-1}$  — групповая скорость волны, переписываем уравнение (31) в более простом виде

$$\frac{\partial I(\mathbf{k})}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{k})\nabla I(\mathbf{k}) = 2\tilde{\gamma}I(\mathbf{k}). \quad (36)$$

Фактически уравнение такого типа, играющее роль уравнения переноса волновой энергии, должно быть написано для каждой из собственных частот, принадлежащих данному волновому вектору. Аналогичным образом

из (15), (16) можно было бы получить уравнение баланса импульса. Но поскольку собственный импульс электромагнитного поля  $[\mathbf{E}\mathbf{H}]/(4\pi c)$  в не слишком разреженной плазме пренебрежимо мал по сравнению с импульсом частиц, а импульс частиц гораздо проще выражается через усредненную функцию распределения, то необходимость в таком уравнении отпадает.

Уравнения (22), (36) совместно с уравнением для усредненной функции распределения представляют собой замкнутую систему уравнений, описывающих турбулентную плазму. Из уравнения (36) следует, что в неограниченной однородной плазме стационарное в среднем состояние достигается при  $\tilde{\gamma} = 0$ . При этом должно осуществляться своеобразное динамическое равновесие:  $\gamma$ , подсчитанное в линейном приближении по заданным функциям  $f_0^j$ , может быть отличным от нуля для тех или иных значений  $\mathbf{k}$ , что соответствует усилению (или затуханию) волн, за счет получения (или, соответственно, отдачи) энергии от основного масштаба турбулентности. Но при этом каждая волна обменивается энергией с другими волнами таким образом, что в среднем ее энергия не изменяется.

Мы учли лишь первое не исчезающее взаимодействие между волнами. Соответствующие процессы представляют собой распад волны  $\mathbf{k}$  на две  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , а также обратное слияние волн  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  в волну  $\mathbf{k}$ . При малом уровне шумов, когда можно пренебречь различием между  $\tilde{\epsilon}$  и  $\epsilon$ , эти уравнения сами собой переходят в уравнения квазилинейного приближения [3, 4].

В заключение этого пункта отметим еще, что введенный выше тензор  $\tilde{\epsilon}$  представляет собой реальный тензор диэлектрической проницаемости слабо турбулентной плазмы для произвольных малых колебаний. Действительно, любую дополнительную, введенную в плазму извне, волну можно рассматривать как некоторую добавку к  $I(\mathbf{k})$ . Электрическое поле такой распространяющейся в плазме волны также должно удовлетворять уравнению (27), и если ее интенсивность настолько мала, что ее вкладом в (22) можно пренебречь, то соответствующее дисперсионное уравнение будет определяться прежним тензором  $\tilde{\epsilon}$ .

#### 4. Влияние колебаний на усредненную функцию распределения

Рассмотрим теперь член взаимодействия с волнами  $S_j$  в уравнении (1) для средней функции распределения. Учитывая (24) и то обстоятельство, что в слабо неравновесной плазме вектор  $\mathbf{b}$  можно считать действительным, получаем

$$\begin{aligned} S_j &= -\frac{e_j}{m_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\langle F^j \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) \right\rangle = \\ &= -\frac{i}{2} \frac{e_j}{m_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \left\{ \mathbf{b}(\mathbf{k}', \omega') (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{k}\omega}^j \mathbf{b}(\mathbf{k}, \omega)) - \mathbf{b}(\mathbf{k}, \omega) (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{k}'\omega'}^j \mathbf{b}(\mathbf{k}', \omega'))^* \right\} \times \\ &\quad \times E(\mathbf{k}, \omega) E^*(\mathbf{k}', \omega') d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\omega d\omega' = \\ &= -\frac{e_j}{m_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \left\{ -\text{Im} \mathbf{b}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{k}\omega}^j \mathbf{b}) I(\mathbf{k}) - \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{\partial I(\mathbf{k})}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} - \left( \nabla I(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) \right] \mathbf{b}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{k}\omega}^j \mathbf{b}) + \right. \\ &\quad \left. + \text{Re} (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{k}\omega}^j \mathbf{b}) \left[ \frac{\partial I(\mathbf{k})}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \omega} - \left( \nabla I(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) \mathbf{b} \right] \right\} d\mathbf{k}, \quad (37) \end{aligned}$$

где  $\omega = \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}$ .

Для продольных колебаний  $\mathbf{b} = \mathbf{k}/k$ , и это соотношение приобретает более простой вид<sup>\*</sup>):

$$S_j = \frac{e_j}{m_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \left\{ \frac{\mathbf{k}}{k} \operatorname{Im} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j I(\mathbf{k}) + \frac{1}{2k} \nabla I(\mathbf{k}) \operatorname{Re} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{k}}{k} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial I(\mathbf{k})}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j}{\partial \omega} - \nabla I(\mathbf{k}) \frac{\partial \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\mathbf{k}}{k} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j \nabla I(\mathbf{k}) \right] \right\} d\mathbf{k}, \quad (38)$$

где  $\tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j = (\mathbf{k} \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j)/k$ .

Уравнение (1) формально имеет вид уравнения Больцмана с интегралом столкновений  $S_j$ , но по существу оно значительно сложнее.

Проведенное выше рассмотрение не содержит принципиальных трудностей для обобщения на случай неоднородной плазмы. При малой неоднородности, когда характерные размеры, на которых существенно изменяются температура и плотность плазмы, значительно превосходят длину волны колебаний, можно снова использовать разложение полей в интеграл Фурье в смысле квазиклассического приближения. Если учесть неоднородность в линейном приближении, то в выражении для  $\epsilon$  и в дисперсионном уравнении для частоты колебаний появятся добавки, пропорциональные градиентам от усредненных функций распределения. Эти добавки весьма существенны для волн конвективного или дрейфового типа, характерных именно для неоднородной плазмы, но для обычных волн, имеющих в однородной плазме, ими можно, по-видимому, пренебречь. Кроме того, при учете неоднородности плазмы в выражении для  $S_j$  появятся дополнительные слагаемые, пропорциональные градиентам  $f_0^j$ , что в какой-то степени отражает факт «нелокальности» взаимодействия частиц с волнами. Таким образом, в общем случае  $S_j$  является оператором, действующим как на  $\mathbf{v}$ , так и на  $\mathbf{r}$ . Поэтому решение кинетического уравнения представляет значительные трудности, и конкретные приближенные методы его решения должны выбираться, по-видимому, в зависимости от рассматриваемых конкретных задач.

Тем не менее, некоторые выводы качественного характера можно сделать, исходя только из вида кинетического уравнения. В сильном магнитном поле, когда характерное время  $\tau$ , в течение которого взаимодействие с волнами заметно изменяет усредненную функцию распределения частиц, значительно превышает циклотронную частоту  $\Omega_j = e_j H / (m_j c)$ , уравнение (1) можно решать разложением по обратным степеням  $\Omega_j$ . Это значит, что для описания усредненного движения частиц поперек магнитного поля применимы уравнения гидродинамического типа, которые можно получить из (1) умножением на  $\mathbf{v}$  и последующим интегрированием по скорости. При этом в правой части уравнения движения для частиц сорта  $j$  появится сила  $\mathbf{R}_j = \int m_j \mathbf{v} S_j d\mathbf{v}$  взаимодействия с колебаниями. Для двухкомпонентной плазмы, состоящей из электронов и ионов только одно-

<sup>\*</sup>) В однородной плазме в квазилинейном приближении это выражение отличается от соответствующих соотношений из [3, 4] наличием члена с  $\partial I / \partial t$ , что связано с несколько различным определением функций  $f_0^j$ . В нашем случае  $f_0^j$  есть просто среднее значение от  $f_j$ , так что импульс волн, например, учитывается в  $f_0^j$ .

го сорта,  $\mathbf{R}_j$  можно представить в виде  $\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_0/2 \pm \mathbf{R}_{ie}$ , где  $\mathbf{R}_0$  — суммарная сила, действующая на плазму, а  $\mathbf{R}_{ie}$  — сила «трения», действующая на ионы со стороны электронов через колебания. Сила  $\mathbf{R}_0$ , очевидно, равна  $\mathbf{R}_0 = \langle \rho \mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{jH}] \rangle$ , где  $\rho$  — плотность заряда,  $\mathbf{j}$  — плотность тока в колебаниях. С помощью уравнения Максвелла в пренебрежении собственным импульсом поля она приводит к дивергенции тензора максвелловых натяжений.

Что касается силы «трения»  $\mathbf{R}_{ie}$ , то ее компонента вдоль градиента плотности легко может компенсироваться электрическим полем за счет небольшого сдвига электронов относительно ионов и не является существенной, а компонента поперек градиента плотности приводит к диффузии плазмы. Таким образом, «аномальная» диффузия слабо турбулентной плазмы, как и обычной плазмы со столкновениями, вызывается взаимным «трением» электронов и ионов. Это обстоятельство является весьма существенным, и его всегда необходимо иметь в виду при исследовании возможности влияния на диффузию плазмы тех или иных колебаний.

Рассмотрим для примера частный случай, когда в выражении для  $S_j$  (а следовательно, и в (36)) можно пренебречь градиентом  $I$ . При этом, разумеется,  $\mathbf{R}_0 = 0$ , так что в уравнениях движения от колебаний остается только эффект диффузии. Чтобы не усложнять выкладок, ограничимся случаем продольных колебаний.

Учитывая, что согласно уравнению непрерывности

$$\int (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) F^j(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = i \int (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j \mathbf{b}_{\mathbf{k}\omega} E(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{v} = 0, \quad (39)$$

получаем с помощью (38)

$$\mathbf{R}_j = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{k} \left\{ 2 \operatorname{Im} \tilde{\varepsilon}_j I(\mathbf{k}) + \frac{\partial I(\mathbf{k})}{\partial t} \operatorname{Re} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_j}{\partial \omega} \right\} d\mathbf{k}, \quad (40)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_j = \frac{4\pi}{k} \int e_j \tilde{\mu}_{\mathbf{k}\omega}^j d\mathbf{v},$$

так что  $\tilde{\varepsilon} = 1 + \sum_j \tilde{\varepsilon}_j$ . Подставляя сюда, согласно (36),

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 2\tilde{\gamma} I = -2 \operatorname{Im} \tilde{\varepsilon} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \omega} \right)^{-1} I,$$

получим для двухкомпонентной плазмы

$$\mathbf{R}_{ie} = -\mathbf{R}_{ei} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{k} \left\{ \operatorname{Im} \tilde{\varepsilon}_e \operatorname{Re} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_i}{\partial \omega} - \operatorname{Im} \tilde{\varepsilon}_i \operatorname{Re} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_e}{\partial \omega} \right\} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \omega} \right)^{-1} I(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (41)$$

Как мы видим, чтобы такие колебания приводили к диффузии плазмы, совершенно необходимо участие в них как электронов, так и ионов. Например, при наличии одних лишь высокочастотных колебаний, в которых ионы можно считать неподвижными ( $\tilde{\varepsilon}_i = 0$ ), сила трения  $\mathbf{R}_{ie}$ , а вместе с ней и диффузионный поток обращаются в нуль. Другими словами можно сказать, что такие колебания соответствуют как бы лишь электрон-электронным соударениям и поэтому они не приводят к диффузии плазмы, хотя отдельные электроны, как нетрудно показать [9, 10],

могут диффундировать на таких колебаниях. Приведенный пример показывает, как рискованно распространять на всю плазму те выводы, которые относятся лишь к отдельно взятой частице без учета корреляции ее движения с движениями остальных.

## 5. Заключение

Итак, в настоящей работе выведены уравнения, описывающие поведение слабо турбулентной плазмы в магнитном поле с учетом нелинейных процессов распада волн на две и слияния двух волн в одну, т. е. наиболее сильного взаимодействия между волнами малой амплитуды. Показано, что турбулентное движение такой плазмы может быть описано как совокупность колебаний, дисперсионное уравнение для которых в свою очередь зависит от спектра колебаний.

Поведение усредненной функции распределения описывается своеобразным интегралом столкновений. Этот интеграл столкновений с учетом конечной длины, на которой происходит взаимодействие частиц с волнами (эта длина порядка среднего ларморовского радиуса частиц), является оператором, действующим как на скоростные, так и на координатные переменные.

Для простоты мы пренебрегли здесь кулоновскими тепловыми шумами и столкновениями между частицами. В принципе, учитывая флуктуацию функций распределения за счет дискретности вещества, нетрудно включить в рассматриваемую схему тепловые шумы, а также учесть и столкновения.

За весьма полезное обсуждение работы приносим благодарность В.Д. Шафранову.

### Список литературы

1. Кадомцев Б.Б. // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 328.
2. Кадомцев Б.Б. // ЖТФ. 1961. Т. 31. С. 1273.
3. Ведынов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. // Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 82.
4. Drummond W.E., Pines D. // Report N134 on the Conference on Plasma Physics. Salzburg, 1961.
5. Церковников Ю.А. // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 67.
6. Рудаков Л.И., Сагдеев Р.З. // ДАН СССР. 1961. Т. 138. С. 581.
7. Sturrock P.A. // Proc. Roy. Soc. 1957. V. A242. P. 277.
8. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. — М.: ИЛ, 1961.
9. Spitzer L. // Phys. Fluids. 1960. V. 3. 659.
10. Rostoker N. // Nucl. Fus. 1961. V. 1. P. 101.

# ДРЕЙФОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ \*)

1. Как известно, в неоднородной плазме, находящейся в магнитном поле, всегда имеются дрейфовые потоки электронов и ионов. По аналогии с обычной пучковой неустойчивостью можно думать, что такие потоки должны приводить к раскачке волн, фазовая скорость которых поперек магнитного поля порядка дрейфовой. Такие волны, которые могут быть названы дрейфовыми, действительно существуют в неоднородной плазме. Их исследование было начато работой Ю.А. Церковникова [1], где на примере плазмы, находящейся в поле прямого тока, было показано, что при наличии градиента температуры может иметь место раскачка дрейфовых волн, распространяющихся поперек магнитного поля. Гидродинамическое рассмотрение приводит примерно к такому же условию устойчивости [2]. В работе Л.И. Рудакова и Р.З. Сагдеева [3] была рассмотрена косая дрейфовая волна, переходящая в ионно-звуковую при уменьшении угла между волновым вектором и вектором магнитного поля. При почти поперечном распространении такая волна обладает очень малым затуханием, а при наличии градиента температуры [3] или продольного тока она может стать нарастающей во времени.

В настоящей работе, в отличие от перечисленных выше, учитывается эффект конечного ларморовского радиуса ионов (см. [4]).

2. Рассмотрим неоднородную плазму, находящуюся в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ , направленном вдоль оси  $z$ . Ограничиваясь одномерным случаем, будем считать, что равновесные функции электронов  $f_e$  и ионов  $f_i$  зависят только от одной пространственной координаты  $x$ . Если функции  $f_j$  мало изменяются на длине среднего ларморовского радиуса, то в системе координат, где среднее электрическое поле отсутствует, имеем

$$f_j = f_{0j}(v_{\perp}^2, v_z, x) + \frac{v_y}{\Omega_j} \frac{\partial f_{0j}}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2$ ,  $\Omega_j = e_j H / (m_j c)$ ,  $e_j$  — заряд,  $m_j$  — масса частицы сорта  $j$ .

Мы рассмотрим здесь волны продольного типа, распространяющиеся поперек градиента плотности. Для таких волн потенциал электрического поля можно выбрать в виде  $\varphi' = \varphi \exp(-i\omega t + ik_z z + ik_y y)$ , и тогда решение кинетического уравнения для возмущения функции распределения  $f'_j$  сорта  $j$  запишется в виде интеграла по траекториям (см., например, [4]):

$$f'_j = i\varphi \frac{e_j}{m_j} \int_{-\infty}^0 \mathbf{k} \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}(t)} \exp(-i\omega t + ik_z v_z t + ik_y y_j(t)) dt, \quad (2)$$

где  $y_j(t) = \int_0^t v_{yj}(t) dt = \frac{v_{\perp}}{\Omega_j} \cos(\Omega_j t - \psi) - \frac{v_{\perp}}{\Omega_j} \cos \psi$ ,  $\psi$  — азимутальный

\*) Кадомцев Б.Б., Тимофеев А.В. // Доклады АН СССР. 1962. Т. 146, № 3. С. 581-584.

угол в пространстве скоростей. Для возмущений с длиной волны, много большей дебаевского радиуса, дисперсионное уравнение можно получить просто из условий квазинейтральности  $\sum_j \int e_j f'_j d\mathbf{v} = 0$ . Мы предположим, что распределение электронов и ионов по поперечным скоростям является максвелловским с температурами  $T_{\perp e}$  и  $T_{\perp i}$  соответственно. Так как функция (1) не зависит от времени, то после дифференцирования по  $\mathbf{v}$  ее можно вынести из-под интеграла по времени, и тогда дисперсионное уравнение преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 & \sum_j \int \left\{ \frac{k_z}{m_j} \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_z} + \frac{k_y}{m_j \Omega_j} \frac{\partial f_{0j}}{\partial x} - \frac{k_y v_{yj}(t)}{T_{\perp j}} f_{0j} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{k_y v_{yj}(t) v_y}{m_j \Omega_j} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_{0j}}{T_{\perp j}} \right) \right\} e^{-i\omega t + ik_z v_z t + ik_y y(t)} d\mathbf{v} dt = \\
 & = i \sum_j \int \left\{ \frac{F_j}{T_{\perp j}} + \sum_n (\omega - k_z v_z - n\Omega_j + i\nu)^{-1} \left[ \frac{k_z}{m_j} \beta_{nj} \frac{\partial F_j}{\partial v_z} + \frac{k_y}{m_j \Omega_j} \frac{\partial}{\partial x} (\beta_{nj} E_j) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\omega - k_z v_z}{T_{\perp j}} \beta_{nj} F_j - \frac{n^2 k_y}{m_j \Omega_j} \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta_{nj} \frac{F_j}{b_j} \right) \right] \right\} dv_z = 0, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где через  $F_j$  обозначена функция распределения от продольной скорости,  $\beta_{nj} = e^{-b_j} I_n(b_j)$ ;  $I_n$  — функция Бесселя от мнимого аргумента;  $b_j = k_y^2 T_{\perp j} / (m_j \Omega_j^2)$ ;  $\nu$  — малая положительная величина, введенная для правильного обхода полюсов.

**3.** Рассмотрим колебания изотропной ( $T_{\perp} = T_{\parallel}$ ), изотермической ( $T_e = T_i$ ) плазмы с максвелловским распределением электронов и ионов по продольной скорости  $v_z$  и постоянной температурой ( $dT/dx = 0$ ). Предполагая, что частота колебаний много меньше циклотронной частоты ионов  $\Omega_i$ , мы можем пренебречь в сумме по  $n$  в (3) всеми членами, кроме нулевого. Ограничиваясь, кроме того, колебаниями с поперечной длиной волны, много большей среднего ларморовского радиуса электронов, положим  $b_e = 0$ . При этих предположениях уравнение (3) приводится к виду

$$(z + \alpha)\beta Y(z) - p(z - \alpha)Y(pz) = 2, \quad (4)$$

где  $z = \frac{\omega}{k_z} \sqrt{\frac{m_i}{2T}}$ ;  $b = k_y^2 \rho_i^2 = \frac{k_y^2 T}{m_i \Omega_i^2}$ ,  $p = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ll 1$ ,  $\alpha = -\sqrt{\frac{b}{2}} \frac{1}{k_z \alpha}$ ,  $\beta = e^{-b} I_0(b)$ ;

$I_0$  — функция Бесселя от мнимого аргумента;  $Y(z) = 2e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt - i\sqrt{\pi} e^{-z^2}$ ;  $a$  — характерная длина, на которой заметно изменяется средняя плотность плазмы  $n_0$ :  $a^{-1} = d \ln n_0 / dx$ .

Исследование уравнения (4) показывает, что при  $\alpha < 0$ , когда фазовая скорость волны направлена в сторону дрейфа ионов, волна является чисто затухающей, причем ее затухание экспоненциально мало при  $\alpha p \gg 1$ . Такие волны могут возбуждаться продольными пучками электронов или ионов. Что касается волн, распространяющихся в сторону дрейфа электронов ( $\alpha > 0$ ), то для их нарастания во времени оказывается достаточным лишь наличие градиента плотности.

Рассмотрим сначала область  $b \gtrsim 1$ . При достаточно большом  $\alpha$ , т. е. малом  $k_z$ ,  $z$  будет достаточно велико, и тогда приближенно  $Y(z) \approx 1/z$ . Если, с другой стороны,  $p\alpha \ll 1$ , то  $pz$  также будет значительно меньше единицы. При этом  $Y(pz) \approx -i\sqrt{\pi}$ , и из (4) получаем

$$\frac{\text{Im} \omega}{k_y v_0} \approx \frac{\beta \sqrt{2\pi b} p}{k_z a} \frac{1 - \beta}{(2 - \beta)^2} \ll \frac{\text{Re} \omega}{k_y v_0} \approx \frac{\beta}{2 - \beta}, \quad (5)$$

где  $v_0 = T/(am_i \Omega_i)$  — дрейфовая скорость.

Как мы видим, инкремент нарастания малых возмущений  $\text{Im} \omega$  растет при уменьшении  $k_z a$ . Это возрастание продолжается до тех пор, пока величина  $p\alpha$  станет порядка единицы и уже нельзя пользоваться разложением для  $Y(pz)$ . Результаты численного расчета инкремента вблизи максимума для трех значений  $b$  ( $b = 0,02$ ,  $b = 1$ ,  $b = 10$ ) приведены на рис. 1. По оси абсцисс отложена безразмерная величина  $k_z a / (p\sqrt{b})$ , по оси ординат — безразмерный инкремент  $\gamma = \text{Im} \omega \sqrt{b} / (k_y v_0)$ .

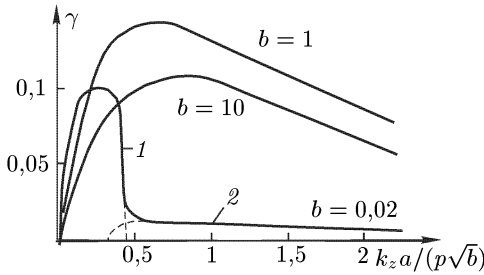


Рис. 1

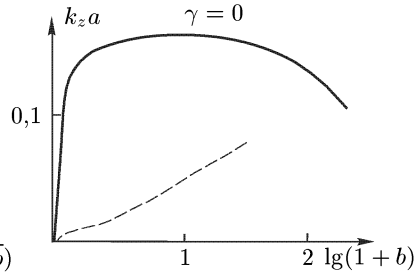


Рис. 2

Инкремент  $\gamma$ , обусловленный раскачкой резонансными электронами, т. е. возникающий за счет вычета, уменьшается пропорционально  $b^2$  при малых  $b$ , что видно, например, из (5). Однако при очень малых  $b$  ( $b \ll 0,1$ ) возникает неустойчивость гидродинамического характера на возмущениях с очень большой длиной волны вдоль  $z$  ( $\alpha p \gg 1$ ). Для таких возмущений можно воспользоваться асимптотическим разложением  $Y(pz) \approx \frac{1}{pz} + \frac{1}{2p^3 z^3}$ , и тогда из (4) получим

$$\frac{z - \alpha}{z + \alpha} = 2p^2 b z^2. \quad (6)$$

Нетрудно получить условие появления комплексных корней у этого уравнения третьей степени. Условие имеет вид  $\alpha^2 p^2 b > 4(1 + \sqrt{5})^{-1} \times (3 + \sqrt{5})^{-2} \approx 0,09$ . На кривой  $b = 0,02$  (рис. 1) этой неустойчивости соответствует участок 1.

На рис. 2 представлена граница неустойчивости  $k_z a = f(b)$  для  $p = 1/43$ . При малых  $b$  она определяется условием  $\text{Re} z < \alpha$  и приближенно  $k_z a = b$ , а при  $b \gtrsim 1$  граничное значение  $k_z a$  определяется ионным затуханием и оказывается почти не зависящим от  $b$ . Штриховая кривая на рис. 2 показывает, где инкремент  $\gamma$  при фиксированных значениях  $b$  достигает максимума по  $k_z a$ .



С помощью дисперсионного уравнения (3) можно произвести исследование устойчивости и в более общем случае неизотермической (неизотропной) плазмы, но эта задача выходит за рамки настоящей статьи. Отметим лишь, что поскольку исследованная здесь раскачка волн обязана электронам, инкремент  $\text{Im } \omega$  определяется в основном электронной температурой. В частности, неустойчивость имеет место и в предельном случае холодных ионов  $T_i \ll T_e$ . Отсюда следует, в частности, что наряду с эффектом конечности ларморовского радиуса к сдвигу фазы волны, способствующему неустойчивости, приводит также инерция ионов.

4. Итак, мы показали, что неоднородная изотермическая плазма в сильном магнитном поле является неустойчивой по отношению к раскачке волн дрейфового типа с поперечной длиной волны порядка среднего ларморовского радиуса ионов  $\rho_i$ . Соответствующие возмущения сильно вытянуты вдоль силовых линий магнитного поля, и поэтому реально исследованная здесь неустойчивость может проявляться только в таких конфигурациях, продольная длина которых  $L$  на порядок превышает поперечную  $a$ .

Так как поперечная длина волны нарастающих возмущений при не слишком малых значениях  $a/L$  имеет порядок величины  $\rho_i$ , а время развития колебаний определяется величиной  $a/(\rho_i v_i)$ , где  $v_i = \sqrt{T/m_i}$ , то можно думать, что развивающиеся вследствие неустойчивости пульсации приведут к диффузии плазмы поперек магнитного поля с коэффициентом диффузии порядка  $\rho_i^2 v_i/a$ . Этот коэффициент спадает как  $H^{-2}$  с ростом магнитного поля, но по абсолютной величине он может значительно превосходить коэффициент диффузии за счет столкновений.

Авторы выражают благодарность Е.П. Велихову за обсуждение работы.

#### Список литературы

1. Церковников Ю.А. // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 67.
2. Кадомцев Б.Б. // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 1096.
3. Рудаков Л.И., Сагдеев Р.З. // ДАН СССР. 1961. Т. 138. С. 581.
4. Rosenbluth M.N., Krall N.A., Rostoker N. // Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, report № 170. Salzburg, 1961.

# «АНОМАЛЬНАЯ» ДИФФУЗИЯ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ\*)

Показано, что разреженная плазма в сильном магнитном поле при наличии продольного тока неустойчива по отношению к волнам дрейфового типа. Эта неустойчивость аналогична токово-конвективной неустойчивости плазмы с конечной проводимостью, с той лишь разницей, что роль столкновений берет на себя затухание Ландау. Турбулентная конвекция, возникающая вследствие такой неустойчивости, приводит к «аномальной» диффузии плазмы с коэффициентом диффузии порядка бомовского.

## 1. Введение

Как известно, в разрядах с сильным продольным магнитным полем в широком интервале изменения параметров разряда, начиная с тлеющего разряда [1] и кончая сильноточными разрядами в теллараторе [2–4] и токамаке [5], наблюдается аномально большая утечка заряженных частиц. Что касается тлеющего разряда, то соответствующие экспериментальные данные по «аномальной» диффузии [1] можно объяснить на основе токово-конвективной неустойчивости плазмы с проводимостью, зависящей от плотности [6, 7]. В ранее выполненной работе [8] было показано, что механизм токово-конвективной неустойчивости оказывается существенным и в сильноточных разрядах, если имеет место заметное охлаждение электронов на стенках разрядной камеры. При очень высокой температуре электронов такая неустойчивость должна подавляться за счет очень большой теплопроводности вдоль магнитного поля. Однако этот вывод справедлив лишь в рамках гидродинамического рассмотрения, которое само является оправданным только в том случае, если длина пробега частиц достаточно мала. При очень высокой температуре электронов и достаточно низкой плотности длина пробега заряженных частиц может оказаться больше длины волны рассматриваемых возмущений вдоль магнитного поля и тогда неустойчивость плазмы необходимо исследовать при помощи кинетического уравнения. Именно этой цели и посвящена настоящая работа.

Ниже будет показано, что наличие продольного тока в разреженной плазме приводит к неустойчивости на волнах дрейфового типа, рассмотренных Рудаковым и Сагдеевым [9]. Эта неустойчивость сходна с токово-конвективной неустойчивостью, отличаясь от нее лишь тем, что вместо конечной проводимости приходится учитывать затухание Ландау. С другой стороны, поскольку рассматриваемые здесь дрейфовые волны непрерывно переходят в ионно-звуковые при уменьшении угла между волновым вектором и вектором магнитного поля, можно сказать, что в данном рассмотрении объединяются механизмы токово-конвективной неустойчивости и неустойчивости плазмы с током относительно раскачки ионного звука [10, 11].

---

\*) ЖЭТФ. 1962. Т. 43. Вып. 5(11). С. 1688–1696.

Как будет показано ниже, рассматриваемая здесь неустойчивость может привести к турбулентной диффузии с коэффициентом диффузии порядка бомовского [12].

## 2. Неустойчивость неоднородной плазмы с током

Рассмотрим следующую идеализированную задачу. Пусть по плазме, находящейся в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ , направленном по оси  $z$ , течет продольный ток настолько слабый, что создаваемое им магнитное поле пренебрежимо мало по сравнению с  $\mathbf{H}$ . Допустим, что плотность  $n$  и температура плазмы  $T$  медленно меняются вдоль оси  $x$ . Если ларморовские радиусы электронов и ионов малы по сравнению с характерной длиной  $a$ , на которой существенно изменяются  $n$  и  $T$ , то равновесные функции распределения электронов  $f_e$  и ионов  $f_i$  можно представить в виде

$$f_j = f_{0j}(v_{\perp}^2, v_z, x) + \frac{v_y}{\Omega_j} \frac{\partial f_{0j}}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2$ ,  $\Omega_j = e_j H / (m_j c)$ ,  $e_j$  — заряд,  $m_j$  — масса частицы сорта  $j$ . (Для удобства мы выбрали такую систему координат, где электрическое поле отсутствует.)

Мы исследуем здесь устойчивость плазмы по отношению к колебаниям продольного типа, в которых электрическое поле является безвихревым:  $\mathbf{E}' = -\nabla\varphi$ . В квазиклассическом приближении зависимость потенциала  $\varphi$  от времени и координат можно выбрать в виде  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Для колебаний с поперечной длиной волны, много большей ларморовского радиуса частиц, можно пренебречь гирацией, и тогда решение кинетического уравнения для возмущения функции распределения  $f'_j$  частиц сорта  $j$  запишется в виде интеграла по прямолинейным траекториям:

$$f'_j = \frac{e_j}{m_j} i\mathbf{k}\varphi \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} \int_{-\infty}^0 \exp(-i\omega t + ik_z v_z t + \nu_j t), \quad (2)$$

где  $\nu_j$  — частота соударений частиц сорта  $j$  — учитывает затухание колебаний за счет столкновений.

Для колебаний с длинами волн, значительно превышающими дебаевский радиус, дисперсионное уравнение для определения  $\omega$  может быть получено из условия квазинейтральности

$$\sum_j e_j \int f'_j d\mathbf{v} = 0.$$

Учитывая (1), (2), приводим это уравнение к виду (ср. [9])

$$\sum_j \int \left\{ \frac{k_z}{m_j} \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_z} + \frac{k_y}{m_j \Omega_j} \frac{\partial f_{0j}}{\partial x} \right\} \frac{d\mathbf{v}}{\omega - k_z v_z + i\nu_j} = 0. \quad (3)$$

В этом уравнении можно произвести интегрирование по  $v_{\perp}$ , и тогда под  $f_{0j}$  следует подразумевать функции только от  $v_z$ . Мы будем считать, что  $f_{0j}$  мало отличаются от максвелловских функций с температурой  $T_j$ .

Рассмотрим здесь волны, фазовая скорость которых  $v_p = \omega/k_z$  много больше тепловой скорости ионов  $v_i = \sqrt{2T_i/m_i}$ , но много меньше тепловой скорости электронов  $v_e = \sqrt{2T_e/m_e}$ , т. е.  $k_z v_i \ll \omega \ll k_z v_e$ . Кроме того, предположим, что  $v_e \lesssim k_z v_e$ , и, следовательно, при  $T_i \sim T_e$  столкновениями ионов можно пренебречь ( $v_i \sim \sqrt{m_e/m_i} v_e < k_z v_i \ll \omega$ ). При этих условиях в дисперсионном уравнении (3) можно произвести асимптотическое разложение интегралов по скорости, и оно принимает вид

$$\frac{n}{T_e} + \frac{k_y c}{eH\omega} \frac{dn}{dx} - \frac{\omega^2 m_e n}{k_z^2 T_e^2} - \frac{k_z^2 n}{\omega^2 m_i} - i \frac{v_e c k_y m_e}{2eHk_z^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{n}{T_e} \right) - i\pi \left\{ \frac{1}{m_e} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_z} + \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_{0i}}{\partial v_z} + \frac{k_y c}{neHk_z} \frac{dn}{dx} (f_{0i} - f_{0e}) + \frac{1}{2} \frac{k_y c}{eHk_z} \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} f_{0e} \right\}_{v_z = \omega/k_z} = 0, \quad (4)$$

где значения функций от скорости в фигурных скобках берутся в резонансной точке  $v_z = \omega/k_z$ .

Частота колебаний  $\text{Re}(\omega)$  определяется действительной частью соотношения (4). Как мы видим, при малой неоднородности и не слишком малом отношении  $k_z/k_y$  рассматриваемые колебания представляют собой ионный звук. При уменьшении  $k_z/k_y$  ионно-звуковые колебания непрерывно переходят в дрейфовые с частотой

$$\omega = k_y v_0 = -k_y \frac{cT_e}{eHn} \frac{dn}{dx}, \quad (5)$$

где  $v_0 \sim v_i \rho_i/a$  — дрейфовая скорость,  $\rho_i$  — средний ларморовский радиус ионов,  $1/a = n^{-1} dn/dx$ .

Фазовая скорость этих волн вдоль магнитного поля при  $k_z/k_y < \rho_i/a$  может значительно превышать тепловую скорость ионов и, следовательно, они являются слабо затухающими даже в том случае, когда температура ионов больше электронной, т. е. когда обычный ионный звук не существует. Заметим, что частота дрейфовых колебаний определяется формулой (5) в системе координат, где электрическое поле отсутствует. В системе координат, где ионы покоятся, к выражению (5) добавится слагаемое  $-k_y [c/(eHn)] d(nT_i)/dx$ , так что частота колебаний будет равна

$$\text{Re}(\omega) = -\frac{k_y c}{eHn} \left[ T_e \frac{dn}{Dx} + \frac{d}{dx} (nT_i) \right].$$

Это значит, что при  $T_e = \text{const}$ ,  $T_i = \text{const}$  частота колебаний равна нулю в системе координат, движущейся с невозмущенной дрейфовой скоростью электронов  $v_{0e} = -[c/(eHn)] dp/dx$ , где  $p = n(T_e + T_i)$  — давление плазмы. Другими словами, волна покоится в системе координат, связанной с электронами.

Предполагая, что инкремент нарастания дрейфовых волн  $\nu = \text{Im}(\omega)$  мал по сравнению с  $\text{Re}(\omega)$ , получим из (4)

$$\frac{\nu}{k_y v_0} = \pi \left\{ \frac{T_e}{m_e} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_z} + \frac{T_e}{m_i} \frac{\partial f_{0i}}{\partial v_z} - v_z f_{0i} + v_z f_{0e} \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha \right) \right\}_{v_z = v_p} - \frac{k_y v_0 v_e (1 - \alpha)}{k_z^2 v_e^2}, \quad (6)$$

где  $v_p = \omega/k_z = k_y v_0/k_z$  — фазовая скорость волны,  $\alpha = d \ln T/d(\ln n)$ .

Допустим, что распределение электронов по скорости  $v_z$  является максвелловским, сдвинутым относительно ионов на величину  $u_0 \ll v_e$ . Тогда из (6) получим

$$\frac{\nu}{k_y v_0} = \frac{\sqrt{\pi}}{v_i} \left\{ \frac{v_i}{v_e} \left( u_0 - \frac{1}{2} \alpha v_p \right) - \frac{T_e + T_i}{T_i} v_p \exp \left( -\frac{v_p^2}{v_i^2} \right) \right\} - \frac{k_y v_0 \nu_e (1 - \alpha)}{k_z^2 v_e^2}. \quad (7)$$

Рассмотрим несколько подробнее это выражение. Первое слагаемое в фигурных скобках учитывает затухание Ландау на электронах. Как мы видим, при  $u_0 = 0$  и постоянной температуре ( $\alpha = 0$ ) оно обращается в нуль. Это связано именно с тем, что такая волна покоится в системе координат, связанной с электронами.

При  $\alpha > 0$ , что обычно имеет место, первое слагаемое может приводить к раскачке ( $\nu > 0$ ) только при наличии направленной скорости электронов  $u_0$ . Так как это слагаемое содержит малый множитель  $v_i/v_e \sim 10^{-2}$ , то неустойчивость имеет место лишь при условии, что фазовая скорость волны вдоль магнитного поля значительно превышает тепловую скорость ионов, когда затухание волны на ионах экспоненциально мало. При  $\alpha \sim 1$  и  $T_i \sim T_e$  минимум выражения в фигурных скобках по  $v_p$  достигается при  $v_p \approx 3v_i$ , так что раскачка колебаний возможна лишь при  $u_0 > \alpha v_p/2 \approx 1,5v_i\alpha$ .

При  $\alpha < 1$  столкновения электронов с ионами, учитываемые в (6) последним слагаемым, приводят к дополнительному затуханию, которое становится существенным по сравнению с первым членом лишь при  $\lambda_e k_z < 1$ , где  $\lambda_e = v_e/\nu_e$  — средняя длина свободного пробега электронов. При  $\lambda_e k_z > 1$  столкновения несут существенны, и раскачка волн определяется бесстолкновительным механизмом взаимодействия их с частицами.

### 3. Турбулентная диффузия

Постараемся теперь выяснить характер того нелинейного движения плазмы, которое возникает вследствие неустойчивости. Рассмотрим сначала случай, когда соударения электронов, с одной стороны, настолько редки, что их можно не учитывать в выражении для инкремента, а с другой стороны, они настолько часты, что успевают поддерживать исходную функцию распределения электронов по продольной скорости.

Начнем с малых возмущений. Как указывалось выше, нарастающими являются лишь такие возмущения, фазовые скорости которых вдоль  $z$  превышают  $3v_i$ . Чтобы найти верхний предел фазовых скоростей нарастающих волн, учтем в (4) третье слагаемое. Тогда получим

$$\omega \approx k_y v_0 \left( 1 - \frac{2k_y^2 v_0^2}{k_z^2 v_e^2} \right), \quad (8)$$

$$\nu = \pi k_y v_0 \left\{ \frac{T_e}{m_e} \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_z} + f_{0e} v_z \left( 1 - \frac{2v_z^2}{v_e^2} \right) \right\}_{v_z=v_p}, \quad (9)$$

где в выражении для  $\nu$  мы положили  $\alpha = 0$  и пренебрегли столкновениями и затуханием волн на ионах.

Если аппроксимировать функцию распределения электронов максвелловской, максимум которой сдвинут относительно максимума функции

распределения ионов на  $u_0$ , то выражение (9) примет вид

$$\nu = \sqrt{\pi} k_y \frac{v_0}{v_e} \left( u_0 - \frac{2v_p^3}{v_e^2} \right), \quad (10)$$

где  $v_p = k_y v_0 / k_z$ . Отсюда видно, что нарастающими являются лишь волны с  $v_p < v_m = (u_0 v_e^2 / 2)^{1/3}$ . При условии  $u_0 / v_e \ll 1$  частота таких колебаний (8) все еще очень мало отличается от  $k_y v_0$ .

Поскольку фазовые скорости нарастающих колебаний много меньше  $v_e$ , то в первом приближении электроны можно считать распределенными по Больцману, т. е. возмущение потенциала  $\varphi \approx T_e n' / en$ , где  $n'$  — возмущенные плотности. Это возмущение, как уже отмечалось выше и как это можно показать чисто гидродинамически, перемещается в  $y$ -направлении со скоростью дрейфа электронов  $v_0$ . Если не учитывать затухание Ландау, то возмущения такого типа не могут привести к диффузии: электроны не дрейфуют по  $x$ , так как компонента электрического поля вдоль  $y$  в точности компенсируется возмущением градиента давления, т. е.  $k_y T_e n' - en k_y \varphi = 0$ , а поскольку возмущение  $E'_y$  сдвинуто по фазе на  $\pi/2$  от возмущения плотности, то среднее смещение ионов по  $x$   $\langle n' c E'_y / H \rangle$  также равно нулю.

При учете затухания Ландау у электрического поля  $E'_z$  появляется дополнительная компонента, которая находится в фазе с возмущением плотности  $n'$ . Можно сказать, что при наличии направленного тока электронов число электронов, догоняющих волну, и, следовательно, отдающих волне энергию, больше числа электронов, отстающих от волны. Другими словами, в области, где возмущение плотности  $n' > 0$ , появляется тормозящее поле  $E'_z$ , а в области с  $n' < 0$  — ускоряющее, так что в среднем электроны тормозятся волной. Но в косой волне вместе с полем  $E'_z$  появляется и поле  $E'_y = E'_z k_y / k_z$ , которое приводит к дрейфу заряженных частиц поперек магнитного поля. При соответствующем знаке  $k_y / k_z$  этот дрейф приводит к усилению начального возмущения, как и при токово-конвективной неустойчивости плазмы положительного столба [6, 7].

Аналогию с тлеющим разрядом можно продолжить и на нелинейное движение плазмы. Как уже было указано выше, все рассматриваемые нами возмущения почти покоятся в системе координат, движущейся со скоростью дрейфа электронов  $v_0$ , т. е. в этой системе координат колебания являются чисто аperiodическими ( $\text{Re}(\omega) = 0$ ). Отсюда следует, что возмущения с разными длинами волн длительные промежутки времени будут сохранять фазовые сдвиги и поэтому они будут сильно взаимодействовать между собой: градиенты плотности крупномасштабных пульсаций будут служить причиной развития более мелкомасштабных пульсаций с другим наклоном по отношению к магнитному полю за счет той же самой неустойчивости. Поэтому можно ожидать, что в плазме с продольным током разовьется широкий спектр пульсаций, т. е. будет иметь место турбулентная конвекция.

Постараемся качественно установить спектр развившихся пульсаций. Поскольку инкремент пропорционален волновому числу  $k_y$ , то в первую очередь будут развиваться коротковолновые возмущения, и всю коротковолновую часть спектра можно считать установившейся. Так как продольным движением ионов можно пренебречь, а движение поперек магнитного

поля со скоростью  $\mathbf{v}' = cH^{-2}[\mathbf{H}, \nabla\varphi + T_i\nabla(\ln n)]$  является несжимаемым, то квадрат плотности удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial n^2}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}'n^2) = 0. \quad (11)$$

Это значит, что при дроблении мелкомасштабных локальных пульсаций плотности величина  $n^2$  сохраняется, и в установившихся условиях должен существовать постоянный поток пульсаций плотности по спектру. Этот поток  $\varepsilon$  можно представить в виде  $\varepsilon = n_\lambda'^2/\tau_\lambda$ , где  $\tau_\lambda$  — время жизни пульсации с поперечным масштабом  $\lambda$  по отношению к дроблению на более мелкие пульсации. Величина  $1/\tau_\lambda$  определяется, очевидно, инкрементом нарастания  $\nu_\lambda$  пульсаций более мелкого масштаба  $\lambda'$  на пульсациях градиента плотности  $n'_\lambda/\lambda$  масштаба  $\lambda$ . Так как основной вклад в затухание пульсации  $n'_\lambda$  дают возмущения с  $\lambda' \sim \lambda$ , а инкремент  $\nu_\lambda$  пропорционален  $\lambda^{-1}$ , то условие постоянства потока пульсаций  $\varepsilon$  по спектру можно представить в виде  $\varepsilon \sim n_\lambda'^3/\lambda^2 = \text{const}$ , откуда получаем  $n'_\lambda \sim \lambda^{2/3}$ .

Как мы видим, амплитуда пульсаций  $n'_\lambda$  растет с  $\lambda$ , т. е. наибольшей величиной обладает пульсация максимального масштаба  $l$ . А так как из-за нелинейного взаимодействия крупномасштабные пульсации быстро трансформируются в мелкомасштабные, то можно ожидать, что даже пульсация максимального масштаба  $n'_l$  будет все еще мала по сравнению со средней плотностью  $n$ , а сам масштаб  $l$  будет мал по сравнению с характерной длиной  $a$ , на которой существенно изменяется средняя плотность. Таким образом, приближенно можно положить

$$\frac{n'_\lambda}{n} = A_1 \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{2/3}, \quad (12)$$

где  $A_1$  — числовой множитель порядка единицы. Отсюда находим пульсацию потенциала

$$\varphi'_\lambda = A_1 \frac{T_e}{e} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{2/3}. \quad (13)$$

Пульсации максимального масштаба  $l$  развиваются за счет градиента средней плотности. Именно они и дают наибольший вклад в турбулентный поток плазмы поперек магнитного поля  $q = \langle n'_l v'_l \rangle$ , где  $v'_l$  — пульсация скорости максимального масштаба  $l$ , играющего роль длины перемешивания. Так как пульсации максимального масштаба развиваются на градиенте средней плотности в результате перестановок трубок с плазмой на длине  $\sim l$ , то пульсацию скорости  $v'_l$  можно оценить как  $v'_l \approx l\nu_l$ , где  $\nu_l$  — инкремент нарастания возмущения масштаба  $l$ . Отсюда, полагая  $k_y = 2\pi/l$ , получаем  $q = -D_T dn/dx$ , где коэффициент турбулентной диффузии дается выражением

$$D_T = A \frac{u_0 c T_e}{v_e e H}. \quad (14)$$

Здесь  $A = 2\pi^{3/2} A_1 (l/a)^{2/3}$  — числовой множитель порядка единицы (при естественном допущении, что  $l \sim 10^{-1}a$ ). При  $u_0/v_e \sim 10^{-1}$ , что обычно имеет место, коэффициент диффузии (14) становится порядка бомовского  $D_B = (1/16) cT_e/(eH)$  (см. [12]).

#### 4. Учет столкновений

Формула (14) для коэффициента турбулентной диффузии справедлива лишь в том случае, если столкновения успевают восстанавливать функцию распределения электронов, но еще не влияют на затухание колебаний. Рассмотрим, как модифицируется коэффициент диффузии в обоих предельных случаях.

При достаточно частых столкновениях в выражении для инкремента (7) следует учитывать последнее слагаемое. Так как оно быстро возрастает при уменьшении  $k_z$ , то в первую очередь будут развиваться волны с максимально возможными  $k_z$ , т. е. фазовыми скоростями  $v_p$ . Но фазовая скорость нарастающих возмущений, как указывалось выше, должна быть больше  $\varkappa v_i$ , где  $\varkappa$  — числовой множитель порядка 3, так как в противном случае очень велико затухание на ионах. С учетом этого обстоятельства выражение (7) при  $\alpha = 0$  и в пренебрежении затуханием на ионах можно приближенно представить в виде

$$\nu \approx \frac{\sqrt{\pi} u_0}{v_e} k_y v_0 - \varkappa^2 \frac{v_i^2}{v_e^2} \nu_e. \quad (15)$$

Отсюда видно, что увеличение  $\nu_e$  приводит к уменьшению максимального масштаба  $l \sim 2\pi/k_x \sim 2\pi/k_y$ , для которого еще имеет место нарастание малых возмущений ( $\nu > 0$ ), а следовательно, и к уменьшению коэффициента диффузии, который приближенно можно представить как  $D_T = l^2 \nu_l$ . Определяя  $l$  из условия  $\nu \sim 0$ , получим

$$D_T = B \frac{u_0^2 v_0^2}{v_i^2 \nu_e} = B \frac{u_0^2}{v_i^2} \frac{c^2 T_e^2}{e^2 H^2 \nu_e} \frac{1}{n^2} \left( \frac{dn}{dx} \right)^2, \quad (16)$$

где  $B$  — числовой множитель порядка 10. Выражение (16) в  $B \lambda_e^2 / a^2$  больше классического коэффициента диффузии  $D_C = T_e \nu_e / (m_e \Omega_e^2)$ , обусловленного парными соударениями, и становится порядка (14) при

$$\frac{\lambda_e \rho_i}{a^2} > \frac{A v_i T_i}{B u_0 T_e} \sim 10^{-2}.$$

Другими словами, весь рассматриваемый здесь эффект «аномальной» диффузии играет роль лишь в разреженной плазме, когда  $\lambda_e \gtrsim a$ .

Рассмотрим второй предельный случай, когда столкновения настолько редки, что приходится учитывать обратное влияние флуктуаций электрического поля на функцию распределения электронов. Кинетическое уравнение для усредненной функции распределения электронов  $f_e$  имеет вид

$$\mathbf{v} \nabla f_e - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e}{m_e} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = \sum_i S_{ej} + S_E, \quad (17)$$

где  $\mathbf{E}$  — среднее поле,  $S_{ej}$  — член столкновений электронов с частицами сорта  $j$ , взятый в форме Ландау:

$$S_{ej} = -\frac{2\pi L e^4}{m_e} \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial}{\partial v_\beta} \int \left\{ \frac{f_e(\mathbf{v})}{m_j} \frac{\partial f_j(\mathbf{v}')}{\partial v_\gamma} - \frac{f_j(\mathbf{v}')}{m_e} \frac{\partial f_e(\mathbf{v})}{\partial v_\gamma} \right\} U_{\beta\gamma} d\mathbf{v}', \quad (18)$$

$L$  — кулоновский логарифм,  $U_{\beta\gamma} = (u^2 \delta_{\beta\gamma} - u_\beta u_\gamma) / u^3$ ,  $u_\beta = v_\beta - v'_\beta$ .



Слагаемое  $S_E$  в правой части (17), описывающее взаимодействие частиц с волнами, равно

$$S_E = -\frac{e}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \nabla \varphi f'_e \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по времени. Чтобы найти  $S_E$ , следует установить связь между флуктуацией функции распределения  $f'_e$  и  $\varphi$ . Строго говоря, поскольку мы рассматриваем случай сильно развитых колебаний, связь между  $f'_e$  и  $\varphi$  должна быть нелинейной. Но качественно эффект можно выяснить и в квазилинейном приближении (см. [13]), т. е. с учетом лишь квадратичных членов, что соответствует пренебрежению в (2) отклонением траекторий частиц от прямолинейных за счет дрейфа в флуктуирующем поле. Разлагая  $\varphi$  в интеграл Фурье и учитывая (2), получим для установившегося спектра дрейфовых волн

$$S_E = \sum_{\beta} \frac{\pi e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_{\beta}} \int \left\{ k_z \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_z} + \frac{k_y}{\Omega_e} \frac{\partial f_{0e}}{\partial x} \right\} k_{\beta} \Phi_0(\mathbf{k}) \delta(\omega - k_y v_0) \delta(\omega - k_z v_z) d\omega d\mathbf{k}, \quad (19)$$

где  $\Phi_0(\mathbf{k})\delta(\omega - k_y v_0)$  представляет собой спектральную функцию флуктуаций потенциала  $\varphi$ , так что

$$\langle \varphi(\mathbf{r}, t) \varphi(0, 0) \rangle = \int e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \Phi_0(\mathbf{k}) \delta(\omega - k_y v_0) d\omega d\mathbf{k}. \quad (20)$$

Проинтегрируем (17) по поперечной скорости  $v_{\perp}$ , полагая, что по  $v_{\perp}$  сохраняется максвелловское распределение. Тогда для электрон-ионного члена соударений в области  $v_i \ll v_z \ll v_e$  получим

$$S_{ei} \approx \frac{2\pi L e^4 n \sqrt{\pi}}{m_e^2 v_e} \frac{\partial}{\partial v_z} \left\{ \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_z} + \frac{m_e v_z}{T_e} f_{0e} \right\}, \quad (21)$$

где мы пренебрегли слагаемым  $\sim m_e/m_i$ , учитывающим теплообмен между электронами и ионами.

Электрон-электронный член соударений упрощаем, аппроксимируя  $f_{0e}(\mathbf{v}')$  максвелловской функцией, сдвинутой на  $u_s$  относительно ионов (такое упрощение оправдано тем, что резонансных электронов мало). После интегрирования по  $\mathbf{v}'$  и  $v_{\perp}$  получаем

$$S_{ee} \approx \frac{2\pi(\pi - 2)L e^4 n}{m_e^2 v_e} \frac{\partial}{\partial v_z} \left\{ \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_z} + \frac{m_e(v_z - v_s)}{T_e} f_{0e} \right\}. \quad (22)$$

Так как с волнами взаимодействуют лишь те электроны, продольные скорости которых лежат в сравнительно узком интервале  $3v_i < v_z < v_m = (u_0 v_e^2/2)^{1/3}$ , то член  $S_E$  мало влияет на продольную проводимость, и поэтому электрическое поле  $E_z$  в (17) можно выразить через токовую скорость электронов  $u_s$  при помощи обычной формулы (см. [14])

$$E_z = -\frac{8}{3} \frac{m_e}{e} \frac{\sqrt{\pi} L e^4 n}{T_e m_e v_e} u_s.$$

Производя эту замену и учитывая (19), (21), (22), при помощи однократного интегрирования по  $v_z$  приводим уравнение (17) (при  $\alpha = 0$ ) к виду

$$\frac{\partial f_{0e}}{\partial v_z} + v_z \frac{m_e}{T_e} f_{0e} - \frac{m_e u_0}{T_e} f_{0e} + F(v_z) \left\{ \frac{\partial f_{0e}}{\partial v_z} + \frac{m_e v_z}{T_e} f_{0e} \right\} = 0. \quad (23)$$

Здесь  $u_0 = 0,65u_s$  — скорость, при которой функция  $f_{0e}$  в отсутствие колебаний достигает максимума (более точный расчет [15] дает соотношение  $u_0 = 0,5u_s$ ), а функция  $F(v_z)$  равна

$$F(v_z) = \frac{v_e}{2(\pi - 2 + \sqrt{\pi})e^2 Ln} \int k_z^2 \Phi_0(\mathbf{k}) \delta(k_y v_0 - k_z v_z) d\mathbf{k}. \quad (24)$$

Из (9) и (23) находим инкремент нарастания малых возмущений с учетом обратного влияния колебаний на функцию распределения электронов по продольной скорости:

$$\frac{\nu}{k_y v_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi} v_e} \frac{u_0 - 2v_p^2/v_e^2}{1 + F(v_p)}. \quad (25)$$

Как и следовало ожидать, искажение функции распределения электронов приводит к уменьшению инкремента нарастания малых возмущений, а следовательно, и к замедлению всего процесса возбуждения и взаимодействия пульсаций. Качественно влияние этого эффекта на поперечную диффузию можно учесть добавлением в выражение (14) множителя  $(1 + F_0)^{-1}$ , где  $F_0$  — некоторое среднее значение функции  $F(v_p)$ .

Для развитых пульсаций величину  $F_0$  можно оценить следующим образом. Прежде всего, производим в (24) интегрирование по  $k_x$ . Далее, поскольку нарастающими являются лишь такие волны, фазовые скорости которых лежат в интервале  $3v_i < v_p < v_m = (u_0 v_e^2/2)^{1/3}$ , причем инкремент  $\nu$  не очень сильно изменяется с  $v_p$ , то приближенно  $\Phi_0(k_y, k_z)$ , как функцию от  $k_z$ , можно считать постоянной и равной  $\Phi_0(k_y)/\Delta k_z$  внутри интервала  $\Delta k_z \sim k_y v_0/v_m$  и обращаемой в нуль вне этого интервала. При этом предположении, как видно из выражения (24),  $F(v_p)$  является убывающей функцией от  $v_p$ , т. е., согласно (25), при  $F(v_p) > 1$  наибольшим инкрементом будут обладать волны с наибольшими фазовыми скоростями  $v_p \sim v_m$ . Другими словами, в качестве среднего значения от функции  $F(v_p)$  можно принять  $F(v_m)$ . Полагая в (24)  $v_z \sim v_m$  и производя интегрирование по  $k_z$ , получим

$$F_0 \approx \frac{v_0 v_e}{6e^2 L n v_m^2} \int k_y \Phi_0(k_y) dk_y. \quad (26)$$

Здесь функция  $\Phi_0(k_y)$ , представляющая собой спектральную функцию поперечных пульсаций, согласно оценке (13), может быть представлена в виде

$$\Phi_0(k_y) = \frac{C_1}{k_y} \left( \frac{T_e}{e} \right)^2 \left( \frac{2\pi}{k_y a} \right)^{4/3}, \quad (27)$$

где  $C_1$  — числовой множитель порядка единицы. Подставляя это выражение в (26) и производя интегрирование по  $k_y$  в пределах от  $\frac{2\pi}{l} \sim \frac{10 \cdot 2\pi}{a}$  до бесконечности, получим

$$F_0 = C \frac{\lambda_e}{a} \frac{v_0}{(u_0^2 v_e)^{1/3}}, \quad (28)$$

где  $C$  — числовой коэффициент порядка единицы.

При  $T_i \sim T_e$  и  $u_0 \sim v_e/10$  величина  $F_0 \sim 10^{-1} \cdot \lambda_e \rho_i / a^2$ , т. е. при  $\lambda_e \rho_i / a^2 > 10$  коэффициент диффузии должен быть в  $F_0$  раз меньше бомовского. Таким образом, согласно рассматриваемому здесь механизму, коэффициент турбулентной диффузии по порядку величины должен быть равен бомовскому, если параметр  $S = \lambda_e \rho_i / a^2$  лежит в интервале  $10^{-2} < S < 10$ . При значениях параметра  $S$ , лежащих вне этого интервала, коэффициент диффузии может быть значительно меньше: при малых  $\lambda_e$  он убывает как  $\lambda_e^2$ , а при больших  $\lambda_e$  — как  $\lambda_e^{-1}$ .

## 6. Заключение

В основу рассмотренного здесь механизма «аномальной» диффузии положен только один вид неустойчивости и поэтому, строго говоря, сравнение полученных результатов с экспериментальными данными является еще преждевременным, поскольку не проанализированы другие возможности объяснения усиленной диффузии. Однако нельзя не отметить качественное согласие между рядом особенностей рассмотренной здесь «аномальной» диффузии и экспериментальными данными по утечке плазмы из стелларатора [2–4]. Так, например, тот факт, что рассмотренная нами неустойчивость обязана продольному току и отсутствует, если направленная скорость электронов  $u_s \approx 2u_0 < 3v_i d \ln T / d \ln n$ , качественно согласуется с экспериментальными данными Мотли [3], который показал, что усиленная диффузия имеет место только при наличии продольного тока, когда направленная скорость электронов становится порядка  $v_i$ . В пользу рассмотренного механизма свидетельствуют и результаты [4], где было показано, что утечка плазмы удовлетворительно описывается бомовским коэффициентом диффузии (параметр  $S = \lambda_e \rho_i / a^2$  в этих экспериментах изменялся приблизительно в пределах  $10^{-2} < S < 10$ , что как раз соответствует  $D_T \approx D_B$ , согласно приведенной выше оценке). Но чтобы полностью проверить данный механизм турбулентной конвекции, следует провести специально поставленные для этой цели эксперименты, в частности, по исследованию корреляционных функций пульсации плотности и электрического поля.

### Список литературы

1. Hoh F.C., Lehnert B. // Phys. Fluids. 1960. V. 3. P. 600.
2. Ellis R.A., Goldberg L.P., Gorman J.G. // Phys. Fluids. 1960. V. 3. P. 468.
3. Mothley R.W. // Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Salzburg, 1961. Report № 167.
4. Stodiek W., Ellis R.R., Gorman J.G. // Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Salzburg, 1961. Report № 131.
5. Горбунов Е.П., Долгов-Савельев Г.Г., Мухоматов В.С., Стрелков В.С., Явлинский Н.А. // ЖЭТФ. 1960. Т. 30. С. 1152.
6. Kadomtsev B.B., Nedospasov A.V. // J. Nucl. Energy. 1960. V. 1. Part C. P. 230.
7. Кадомцев Б.Б. // ЖТФ. 1961. Т. 31. С. 1273.

8. *Кадомицев Б.Б.* // ЖТФ. 1961. Т. 31. С. 1209.
9. *Рудаков Л.И., Сагдеев Р.З.* // ДАН СССР. 1961. Т. 138. С. 581.
10. *Гордеев Г.В.* // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. С. 19.
11. *Bernstein I.B., Frieman E.R., Kulsrud R.M., Rosenbluth M.N.* // Phys. Fluids. 1960. V. 3. P. 136.
12. *Guthrie A., Walkerling R.K.* The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields. — New-York, 1959.
13. *Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З.* // Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 82.
14. *Брагинский С.И.* // ЖЭТФ. 1957 Т. 33. С. 459.
15. *Bernstein I.B., Kulsrud R.M.* // Phys. Fluids. 1961. V. 4. P. 1037.

# ТУРБУЛЕНТНЫЙ РАЗРЯД В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ\*)

Настоящий доклад посвящен рассмотрению турбулентной конвекции плазмы в газовом разряде с умеренным продольным полем.

Показано, что при нарушении условия устойчивости Сайдема в плазме возникает конвекционное движение, состоящее в выталкивании трубок с более горячей плазмой на стенку. Конвекционный перенос тепла поперек магнитного поля приводит к снижению давления плазмы до нескольких процентов от давления магнитного поля, так что конфигурация магнитного поля становится практически бессиловой. Распределение продольного и азимутального магнитных полей в такой конфигурации может быть приближенно получено из условия обращения в нуль поперечной проводимости. Это распределение определяется единственным параметром  $y = 4\pi\sigma Ea/H_0$ , где  $a$  — радиус кожуха,  $\sigma$  — продольная проводимость,  $E$  — продольное электрическое поле,  $H_0$  — продольное магнитное поле на оси разряда. Если параметр  $y$  превышает некоторое критическое значение, то разряд теряет цилиндрическую симметрию и становится винтовым. С учетом нелинейности и конечной проводимости найдены шаг и амплитуда винтового искривления разряда при небольшом превышении  $y$  над критическим значением.

Далее в работе сравнительно подробно рассматривается механизм турбулентного переноса энергии и перемешивания полей, и в частности, обсуждается вопрос о возникновении обратного продольного поля на периферии разряда.

В заключение кратко рассмотрен вопрос о том, как возникает и видоизменяется турбулентная конвекция плазмы по мере увеличения продольного тока в интервале экспериментальных условий от положительного столба тлеющего разряда до сильно-точного разряда с умеренным продольным полем.

## 1. Введение

Разряд с умеренным продольным полем, рассмотрению которого посвящен настоящий доклад, был использован для исследования высокотемпературной плазмы сначала в установке «Зета» [1, 2], а затем в целом ряде аналогичных установок [3–5]. Такой разряд обнаруживает целый ряд особенностей, которые нельзя объяснить в рамках ламинарной теории, исходящей из предположения об аксиальной симметрии движения плазмы. К таким особенностям относятся, прежде всего, наличие сильного «парамагнетизма»: при достаточно сильном продольном токе все продольное магнитное поле оказывается сосредоточенным внутри шнура с током, а при дальнейшем увеличении тока магнитный поток внутри шнура дополнительно возрастает одновременно с возникновением снаружи от шнура магнитного поля в обратном направлении.

При этом разряд оказывается практически квазистационарным: вторая четверть периода в точности воспроизводит первую в обратном порядке [2, 5]. Следовательно, сжатие продольного поля к оси нельзя объяснить эффектом скин-слоя захвата поля. Так как давление плазмы в таком разряде значительно меньше давления магнитного поля, то можно предположить [6], что вся энергия уносится излучением, и вследствие гажения стенок создается непрерывный поток плазмы к оси разряда. Однако такое

---

\*) Ядерный синтез. Дополнение. 1962. Ч. 3. С. 969–977.

объяснение находится в прямом противоречии с экспериментально наблюдаемым переносом энергии на стенки самой плазмой и связанными с этим переносом довольно сильными колебаниями магнитного поля с частотой  $\sim 10^4$ – $10^5$   $H_z$ . Поэтому такой разряд фактически является турбулентным с развитыми пульсациями различных масштабов.

Поскольку плазма в магнитном поле часто бывает неустойчива по отношению к самым различным типам возмущений, то при изучении тех последствий, к которым эти неустойчивости приводят, разумно пользоваться упрощенными моделями, в которых предполагается наличие только одного из видов колебаний. В настоящей работе рассматривается одна из таких моделей, в которой учитывается только локальная конвективная неустойчивость, исследованная в линейном приближении Сайдемом [7]. Можно думать, что этот механизм будет преобладающим в достаточно плотной и хорошо проводящей плазме.

В разд. 2 показано, что возникающая вследствие этой неустойчивости конвекция естественно приводит к бессиловой конфигурации магнитного поля, хорошо согласующейся с наблюдаемой на опыте. В разд. 3 исследуется извивание токового шнура, которое возникает при увеличении продольного тока. В разд. 4 качественно обсуждается механизм турбулентного переноса энергии.

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением только квазистационарного разряда, в котором внешнее электрическое поле считается постоянным.

## 2. Приближение продольной проводимости

Как показал Сайдем [7], для устойчивости шнура с распределенным током необходимо, чтобы было выполнено условие

$$-8\pi p' < \frac{H_z^2 r}{4} \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2, \quad (1)$$

где  $\mu = H_\theta / r H_z$  — величина, характеризующая шаг силовых линий,  $H_z$  — продольное,  $H_\theta$  — азимутальное магнитные поля, а штрих обозначает производную по радиусу  $r$ . Если это условие не выполнено, то в плазме начнет развиваться конвекционное движение, состоящее в выталкивании к периферии разряда магнитных трубок с более горячей плазмой. Время развития такого движения довольно мало: оно порядка времени пролета ионов с тепловой скоростью  $v_i$  поперек шнура, т. е. порядка  $t_i = a/v_i$ , где  $a$  — радиус камеры. При достаточно высокой проводимости  $\sigma$  это время может оказаться значительно меньше скин-слоя  $t_s = \pi\sigma a^2/c^2$ , которое характеризует скорость нагрева плазмы за счет джоулева тепла. В этом случае возникающий за счет неустойчивости конвекционный перенос тепла на стенки может значительно превосходить энерговыделение за счет джоулевых потерь. Поэтому любой избыток давления над устойчивым будет немедленно «сброшен» на стенки, и давление плазмы будет целиком определяться условием устойчивости (1), в котором знак «меньше» следует заменить на знак равенства.

С другой стороны, давление плазмы связано с распределением магнитного поля по радиусу условием равновесия:

$$\nabla p = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{H}}{c}. \quad (2)$$

Так как условие (1) содержит в правой части малый множитель, то мы можем воспользоваться разложением по малому параметру, полагая в первом приближении  $p = 0$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{H} = 0$ . Это означает, что приближенно магнитное поле считается бессильным.

Чтобы найти распределение магнитного поля по радиусу, следует воспользоваться законом Ома, который мы запишем в виде

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c} + \mathbf{E}, \quad (3)$$

пренебрегая градиентом давления и анизотропией проводимости. Ради простоты будем, кроме того, считать проводимость  $\sigma$  постоянной по сечению разряда.

Строго говоря, при наличии хаотического турбулентного движения все величины в (2), (3), как то: магнитное и электрическое поля, скорость плазмы и ее давление, следует считать случайными величинами, и для определения усредненных величин нужно построить цепочку усредненных уравнений. Однако в рассматриваемом здесь случае хорошо проводящей плазмы можно произвести некоторые упрощения. Поскольку локальная конвективная неустойчивость связана с такой перестановкой соседних силовых трубок, при которой искажение магнитного поля минимально, то в приближении  $p \sim 0$  следует пренебречь и флуктуациями магнитного поля, так что в уравнениях (2), (3) под  $\mathbf{H}$  можно подразумевать среднее поле.

В этом приближении уравнение (3) является линейным относительно флуктуирующих величин, поэтому при усреднении оно не изменяет своего вида, и под входящими в (3) величинами можно понимать их средние значения (следует однако иметь в виду, что входящая в уравнение (3) средняя скорость  $\mathbf{v}$  не совпадает с гидродинамической скоростью плазмы, определяющей перенос вещества).

Умножая (3) на  $\mathbf{H}$  и учитывая, что в бессильном поле ток направлен по силовым линиям, получим

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} = \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}}{H^2}. \quad (4)$$

Формально это уравнение совпадает с уравнением равновесия анизотропно проводящей плазмы [8], у которой проводимость  $\sigma_{\perp}$  поперек магнитного поля равна нулю. Поэтому такой приближенный метод рассмотрения равновесия шнура с током мы будем называть приближением продольной проводимости. Следует однако подчеркнуть, что условие  $\sigma_{\perp} = 0$  ни в коей мере не относится к «истинной» проводимости плазмы, связанной с «микроскопическим» взаимодействием электронов и ионов: в рамках используемого здесь гидродинамического подхода мы считаем эту проводимость заданной и никак не связанной с интенсивностью турбулентных пульсаций. Приближение  $\sigma_{\perp} = 0$  означает лишь, что в плазме возникает такое движение, что первый член в правой части уравнения (3) в точности компенсирует поперечную компоненту электрического поля и приводит к исчезновению градиента давления.

Для прямого шнура с цилиндрической симметрией удобно ввести безразмерные величины:  $H_z = H_0 v(x)$ ,  $H_{\theta} = H_0 u(x)$ ,  $x = 4\pi\sigma E_0 r / H_0$ , где  $E_0 = \text{const}$  — продольное электрическое поле,  $H_0$  — магнитное поле на оси шнура. Для такого шнура векторное уравнение (4) можно записать в виде

двух скалярных, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx}(xu) = \frac{v^2}{v^2 + u^2}, \quad (5)$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{uv}{v^2 + u^2}. \quad (6)$$

Результат численного интегрирования этих уравнений при начальных условиях  $u(0) = 0$ ,  $v(0) = 1$  представлен на рис. 1. На этом же рисунке приведено распределение давления плазмы, вычисленное из условия устойчивости (1). Как мы видим, при данном распределении магнитного поля давление устойчиво удерживаемой плазмы не превосходит 4% от давления магнитного поля, что свидетельствует о хорошей точности приближения продольной проводимости.

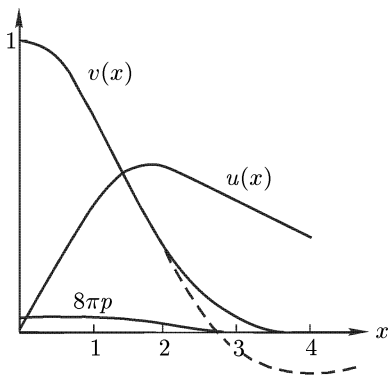


Рис. 1. Распределение магнитного поля и давления плазмы по радиусу в разряде с умеренным продольным полем

Приведенное на рис. 1 распределение магнитного поля очень хорошо согласуется с экспериментально измеренным. Оно характеризуется единственным параметром  $y = 4\pi\sigma E_0 a / H_0$ , представляющим собой безразмерный радиус кожуха. Увеличение  $y$  соответствует перемещению положения кожуха на рис. 1 в сторону больших  $x$ , т. е. концентрации тока к оси разряда. Согласно рис. 1 плотность тока убывает с удалением от оси разряда, так что основная часть тока (~85%) протекает в области  $x < 2$ . Это означает, что при  $y > 2$  токовый шнур практически отрывается от стенок, и его радиус перестает зависеть от радиуса камеры  $a$ .

Вместо параметра  $y$  удобно ввести другой параметр  $\eta = 4\pi I a / (\varphi c)$ , который выражается непосредственно через измеряемые на опыте величины — полный ток  $I$  и продольный магнитный поток  $\varphi$ , заключенный внутри токового шнура. Ток  $I$  определяется соотношением  $I = caH_0 u(y)/2$ , а магнитный поток равен

$$\varphi = \frac{H_0 a^2}{y^2} \int_0^y 2\pi x v dx.$$

Численный расчет показывает, что величина  $y/\eta$  является медленно меняющейся функцией  $y$ :  $y/\eta = 1$  при  $y < 2$ ,  $y/\eta = 1,2$  при  $y > 4$ , а в интервале  $2 < y < 4$   $y/\eta$  изменяется приблизительно линейно. Таким образом, с точностью до 20% можно положить

$$y \equiv \frac{4\pi\sigma E_0 a}{H_0} \approx \eta \equiv \frac{4\pi I a}{\varphi c}. \quad (7)$$

Таким образом, зная только полный ток  $I$  и продольный поток  $\varphi$ , по формуле (7) можно определить безразмерный радиус кожуха  $y$ , поле на оси разряда

$$H_0 = \frac{2I}{cau(y)}, \quad (8)$$

а следовательно, и полное распределение полей.



Если положить  $\varphi = \varphi_0 = \pi a^2 H_{z0}$ , где  $H_{z0}$  — продольное магнитное поле перед началом разряда, то такой расчет приводит к хорошему согласию с данными экспериментальных измерений, но только для значений параметра  $\eta < 3$ . При дальнейшем же увеличении тока и параметра  $\eta_0 = \frac{4\pi I a}{\varphi_0 c}$  величина  $\eta = \frac{4\pi I a}{\varphi c}$  остается практически постоянной, так что магнитный поток внутри шнура  $\varphi$  линейно возрастает с током. При этом снаружи от шнура появляется продольное магнитное поле в обратном направлении. Это обстоятельство было отмечено в работе Лиза и Разбриджа [9], в которой было произведено сопоставление экспериментальных данных относительно распределения магнитного поля по радиусу с бессиловой моделью. Качественное обсуждение того, почему параметр  $\eta$  замораживается на значении  $\eta \approx 3$ , будет дано в разд. 4.

### 3. Винтовой разряд

Как известно [10, 11], токовый шнур, достаточно тонкий по сравнению с диаметром проводящего кожуха, неустойчив по отношению к извиванию. Поэтому естественно возникает мысль, что рассмотренный в разд. 2 бессиловой цилиндрически симметричный разряд существует только при достаточно большом продольном поле. Если же  $\eta_0 = \frac{4\pi I a}{\varphi_0 c}$  превысит некоторое критическое значение, то шнур с током теряет устойчивость и превратится в винтовой. Чтобы убедиться в этом, необходимо, во-первых, определить условие устойчивости шнура по отношению к извиванию, а во-вторых, показать, что винтовой разряд может существовать стационарно.

Как известно [12], векторное уравнение равновесия (2) при винтовой симметрии приводится к одному единственному уравнению

$$\Delta^* \psi + 4\pi \frac{dp}{d\psi} + \frac{I}{k^2 r^2 + m^2} \frac{dI}{d\psi} + \frac{2kmI}{(k^2 r^2 + m^2)^2} = 0, \quad (9)$$

где

$$\Delta^* = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{k^2 r^2 + m^2} \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

$\zeta = kz - m\vartheta$ ,  $\vartheta$  — азимутальный угол,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — период изменения  $p$  и  $\mathbf{H}$  вдоль оси  $z$ . Функция  $\psi$ , являющаяся вместе с  $p$  и  $I$  постоянной на магнитных поверхностях, представляет собой комбинацию  $\psi = m\psi_\vartheta - k\psi_z$  из продольного

$$\psi_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\psi)} H_z r dr d\vartheta$$

и азимутального

$$\psi_\vartheta = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_0^{r(\psi)} H_\vartheta dr dz$$

магнитных потоков,  $I$  — аналогичная комбинация из азимутального и продольного токов внутри заданной магнитной поверхности.

Компоненты магнитного поля при винтовой симметрии полностью определяются через  $\psi$  и  $I(\psi)$ :

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \\ H_\vartheta &= \frac{1}{k^2 r^2 + m^2} \left( m \frac{\partial \psi}{\partial r} + krI \right), \\ H_z &= \frac{1}{k^2 r^2 + m^2} \left( -kr \frac{\partial \psi}{\partial r} + mI \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Если амплитуда винтового искривления мала, то уравнение (9) можно попытаться решать методом разложения по малому параметру, причем естественно ограничиться случаем  $m = 1$ .

В нулевом приближении имеем:  $\psi = \psi_0(x)$ ,  $I = I_0(x)$ , причем  $d\psi_0/dx = H_0(u - kxv)$ ,  $I = H_0(v + kxu)$ . Полагая в уравнении (9)  $\psi = \psi_0(x) + \psi_1(x) \cos \zeta$ ,  $I = I_0(\psi) = I_0(x) + \psi_1 \cos \zeta dI_0/d\psi_0$ , и ограничиваясь только членами первого порядка малости, получим в пренебрежении давлением плазмы следующее уравнение для  $\psi_1$ :

$$\frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + p \frac{d\psi_1}{dx} + Q\psi_1 = 0, \quad (11)$$

где

$$p = \frac{1 - k^2 x^2}{1 + k^2 x^2},$$

$$Q = -k^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{v^2 - u^2}{(v^2 + u^2)^2} - \frac{2kv}{(u^2 + v^2)(1 + k^2 x^2)} - \frac{2uv^2}{x(u^2 + v^2)^2} + \frac{u(1 - 2kv)}{(u - kxv)(u^2 + v^2)}.$$

Заметим, что если ввести смещение  $\xi$  магнитной поверхности в радиальном направлении, то возмущения  $\psi_1$ ,  $I_1$  можно выразить через  $\xi$ :  $\psi_1 = -\xi d\psi_0/dx$ ,  $I_1 = -\xi dI_0/dx$ , и после такой замены уравнение (11) в точности совпадает с уравнением, определяющим границу устойчивости шнура с распределенным током (см. например, [7]).

Решая уравнение (11) для различных значений  $k$  при начальном условии  $\psi_1(0) = 0$ ,  $\psi_1'(0) = 1$ , можно определить то значение  $x = y_c$ , где  $\psi_1$  второй раз обращается в нуль. Эта точка определяет положение проводящего кожуха, при котором шнур нейтрально устойчив по отношению к извиванию.

При решении уравнения (11) следует учесть, что оно имеет особенность в точке  $x = x_s$ , где  $u - kxv = 0$ , т. е. шаг возмущения совпадает с шагом невозмущенных силовых линий. В этой точке  $d\psi_0/dx = H_0(u - kxv)$  также обращается в нуль. Поэтому при бесконечной проводимости, когда смещение магнитной поверхности  $\xi$  совпадает с реальным смещением вещества и поэтому не может иметь особенностей,  $\psi_1 = -\xi d\psi_0/dx$  в этой точке должно обращаться в нуль.

Это значит, что по отношению к колебаниям, происходящим с инерционными временами, цилиндр  $x = x_s$  при хорошей проводимости сам играет роль кожуха, разбивающего шнур на две не связанные между собой области  $x < x_s$  и  $x > x_s$ , причем в самой точке  $x_s$   $\psi_1 = 0$  (см. например, [13]).

При конечной проводимости магнитные поверхности могут перемещаться относительно вещества, и поэтому на ее смещение  $\xi$  никаких ограничений не накладываается, в соответствии с чем  $\psi_1 = -\xi d\psi_0/dx$  в точке

$x = x_s$  может быть произвольной, и единственным граничным условием является  $\psi_1(0) = 0$ .

При таком граничном условии уравнение (11) было решено численно для нескольких значений  $k$ . Найденные отсюда значения  $y_c$ , соответствующие положению проводящего кожуха, приведены в табл. 1. Интерполированием находим, что минимальное значение  $y_c \approx 2,8$  достигается примерно при  $k = 0,7$ , и что для возмущения с  $k = 0,5$ , шаг которого равен максимальному шагу силовых линий,  $y_c \approx 3,4$ .

Таблица 1

$k$	0,3	0,4	0,45	0,62	0,85
$y_c(k)$	5,11	4,13	3,72	2,86	3,27

Таким образом, если параметры разряда таковы, что безразмерный радиус кожуха  $y$  становится больше 2,8, то шнур оказывается неустойчивым по отношению к извиванию. Если  $2,8 < y < 3,4$ , то к неустойчивости приводят лишь такие возмущения, у которых шаг оказывается меньше шага невозмущенных силовых линий около оси разряда, т. е. шаг возмущения совпадает с шагом силовых линий в некоторой точке  $x = x_s$ . В этом случае возмущение имеет особенность в точке  $x_s$ .

Задача о скорости нарастания таких возмущений представляет значительные трудности, а сам интервал значений  $\Delta y$ , в котором эта задача представляет интерес, является сравнительно малым ( $\Delta y/y \approx 0,2$ ), поэтому мы откажемся от ее строгого решения. Так как возмущениям с  $\psi_1(x_s) = 0$  соответствуют гораздо большие значения  $y_c$ , то можно думать, что время нарастания возмущений с особенностью должно быть порядка скин-слоя.

Такие возмущения имеют локальный характер: амплитуда возмущения поля имеет в точке  $x_s$  резкий максимум (в линейном приближении она даже обращается в бесконечность) и быстро спадает в обе стороны от этой точки. Именно такого типа возмущения были обнаружены на установке Скептр [14] в режиме, соответствующем примерно  $y \approx \eta_0 = 4$ .

При  $y > 3,4$  извивание шнура может происходить со скоростью порядка альвеновской, причем шаг такого инерционного извивания больше максимального шага силовых линий (т. е. волновое число  $k < 0,5$ ).

Если продольное электрическое поле  $E_0$  не намного превосходит критическое значение  $E_c = H_0 y_c / (4\pi\sigma a)$ , то нарастание амплитуды винтового извивания довольно быстро прекратится за счет нелинейных эффектов, и установившуюся амплитуду можно найти по теории возмущений, учитывая только квадратичные члены (квазилинейное приближение). Такой расчет, детали которого изложены в Приложении, был проведен для  $k = 0,4$  и  $k = 0,45$ . Как показывает расчет, при увеличении продольного электрического поля выше критического значения  $E_c$  амплитуда извивания  $A$  растет пропорционально  $[(E_0/E_c) - 1]^{1/2}$ : для  $k = 0,4$   $A = 0,18 [(E_0/E_c) - 1]^{1/2}$ , для  $k = 0,45$   $A = 0,09 [(E_0/E_c) - 1]^{1/2}$ .

Отсюда видно, что даже при довольно большом превышении  $E_0$  над критическим значением  $E_c$  амплитуда извивания оказывается все еще малой. Тем не менее, такое извивание оказывает сильное влияние на распределение средних полей. При малой амплитуде винтового искривления

среднее поле опять оказывается бессильным и близко соответствует профилю рис. 1. для цилиндрически симметричного шнура. Это распределение снова можно характеризовать единственным параметром  $\eta = 4\pi a I / (\varphi c)$ . Оказывается, что при  $E_0 > E_c$  параметр  $\eta$  не только перестает возрастать с  $E_0$ , но и начинает даже несколько уменьшаться: для  $k = 0,4$   $\eta/\eta_c \approx 1,3 - 0,3 E_0/E_c$ , для  $k = 0,45$   $\eta/\eta_c = 1,1 - 0,1 E_0/E_c$ .

Таким образом, согласно этим расчетам при увеличении  $E_0$  выше критического значения ток в шнуре должен практически замораживаться на уровне критического  $I_c = c\varphi\eta_c/(4\pi a)$ , что можно интерпретировать как результат уменьшения эффективной проводимости шнура за счет его извивания (напомним, что проводимость поперек магнитного поля в бессильной модели равна нулю). Следовательно, в приближении продольной проводимости увеличение  $E_0 > E_c$  должно просто увеличивать амплитуду винтового искривления при постоянном полном токе  $I$ .

Как показывает анализ, проведенный в работе [9], на эксперименте действительно наблюдается «замораживание» параметра  $\eta$  на значении  $\eta \approx 3$ , так что при дальнейшем увеличении  $E_0$  радиус токового шнура остается практически постоянным. Однако при этом ток  $I$  продолжает возрастать за счет увеличения магнитного потока  $\varphi$  внутри шнура и появления снаружи от шнура обратного потока.

Винтовой разряд с большой амплитудой извивания наблюдался Сойером и др. [15] на установке Колумбус, разрядная камера которой представляла собой прямую металлическую трубу радиуса  $a = 8$  см. При начальном магнитном поле  $H_{z0} = 100$  Гс и токе  $I = 10$  кА, что соответствует значению параметра  $\eta_0 = 5$ , наблюдалось извивание токового шнура с шагом  $\lambda \approx 2a$ , т. е.  $ky = 3$ .

Обнаруженное этими авторами сравнительно медленное вращение токового шнура побудило их сделать предположение, что извивание разряда представляет собой бегущую альвеновскую волну. Однако эта гипотеза оказалась ошибочной, что видно из приведенных в этой же работе оценок, показывающих, что вращение шнура является практически безынерционным.

Кроме того, как это было отмечено в заметке [16], альвеновская волна при той низкой проводимости, какую имела плазма в установке Колумбус, затухла бы за один период колебаний. Следовательно, винтовой разряд в Колумбусе является квазистационарным, а его вращение связано с медленными диффузионными процессами. Как мы видим, довольно большое числовое значение параметра  $\eta_0$  как раз соответствует наличию заметного извивания шнура, а длина волны оказывается того же порядка, что и полученная из рассмотрения неустойчивости.

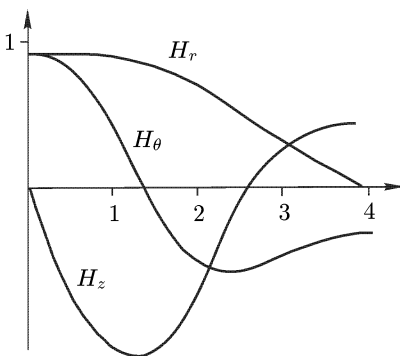


Рис. 2. Магнитное поле в винтовом разряде

На рис. 2 приведено распределение магнитного поля, возникающего вследствие извивания шнура, для значения  $k = 0,4$ . Чтобы получить полное распределение поля в пространстве, представленные на этом рисунке  $H_z$  и  $H_\theta$  следует умножить на  $A \cos(\vartheta - kz)$ ,  $H_r$  — на  $A \sin(\vartheta - kz)$ ,

где  $A$  — амплитуда извивания, и сложить со средним полем рис. 1. К сожалению, в работе [15] приведены лишь данные о распределении тока и поэтому прямое сравнение распределения рис. 2 с экспериментальным провести нельзя.

#### 4. Турбулентная конвекция плазмы

Рассмотрим теперь более подробно сам механизм конвекционного переноса энергии на стенку. Мы ограничимся здесь лишь случаем достаточно хорошей проводимости, когда скин-слоевое время значительно больше инерционного. При этом давление плазмы относительно быстро выравнивается вдоль силовых линий, и поэтому перенос плазмы на стенку должен быть связан с искривлением силовых линий. Его можно представить себе в виде «выпячивания» отдельных силовых трубок (рис. 3). Так как при любом искривлении силовых трубок энергия магнитного поля несколько увеличивается, то к неустойчивости в первую очередь будут приводить такие возмущения, которые минимально искажают силовые линии. Искривление поля минимально, когда смещенная трубка  $ADB$  имеет форму одного витка такой винтовой линии, чтобы ее наиболее выдвинувшийся участок  $CDE$  совпал по направлению с невозмущенным магнитным полем в той точке, куда он сместился.

При достаточно большом искривлении трубка соприкоснется со стенкой в точке  $D$ . Поскольку тепловая скорость электронов много больше ионной, то трубка с плазмой сразу же приобретает потенциал относительно стенки порядка нескольких электронных температур, так чтобы скорость утечки на стенку ионов и электронов была одинаковой. При достаточно большой температуре электронов эта разность потенциалов может привести к зажиганию униполярной дуги [17] и быстрому охлаждению электронов.

Наряду с этим из плазмы начнут уходить быстрые ионы, т. е. вся плазма как по каналу начнет вытекать на стенку вдоль искривленных силовых линий, и давление плазмы в этой трубке начнет быстро уменьшаться. Вследствие этого все остальные участки плазмы будут немного сжиматься к оси (см. рис. 3). Как только давление в трубке  $ADB$  станет меньше давления окружающей ее плазмы, то она будет вытеснена внутрь разряда другими более горячими трубками, стремящимися выйти к стенке. При этом трубка  $ADB$  захватит с собой часть газа со стенки, который затем нагреется, и весь процесс повторится снова.

Таким образом, движение плазмы можно разложить на две составляющие: более или менее равномерное сжатие к оси со скоростью  $\mathbf{v}$  и пульсационный выброс плазмы на стенку по «каналам», образованным искривленными силовыми линиями. Именно скорость  $\mathbf{v}$  и приводит к компенсации поперечной составляющей электрического поля в законе Ома (3).

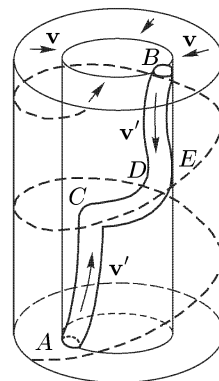


Рис. 3. Искривление силовой трубки с плазмой вследствие конвективной неустойчивости

При наличии пульсационного движения скорость  $\mathbf{v}$  не совпадает с гидродинамической скоростью движения плазмы  $\mathbf{v}_0$ , которая определяет поток вещества  $\mathbf{j}_n = n\mathbf{v}_0$ . А именно,  $\mathbf{j}_n = n\mathbf{v} + \langle n'\mathbf{v}' \rangle$ , где второе слагаемое учитывает перенос вещества за счет пульсаций. Таким образом, поток вещества  $\mathbf{j}_n$  не связан непосредственно с  $v$  и может иметь любой знак в зависимости от того, какие процессы происходят на стенках (т. е. в зависимости от интенсивности гажения стенок).

Итак, картина движения плазмы в разряде с умеренным продольным полем может быть представлена как наложение движения отдельных трубок. При этом для переноса плазмы из центральной области не требуется, чтобы центральные трубки испытывали сильное искривление и непосредственно соприкасались со стенкой. Процесс конвекции может иметь и эстафетный характер: на поверхности искривленной силовой трубки с давлением, превышающим давление окружающей плазмы, в свою очередь могут возникнуть небольшие пульсации и т. д. вплоть до пульсаций настолько малого масштаба, что силовые линии уже не будут заморожены в вещество. В результате соседние трубки получают возможность эффективного обмена плазмой.

При таком движении с пульсациями самых различных масштабов силовые линии в разряде будут иметь очень сложный вид. Пульсации магнитного поля приведут к разрушению магнитных поверхностей, и любая силовая линия рано или поздно выйдет на стенку. В результате электроны получают возможность выходить на стенку вдоль силовых линий, вследствие чего вся плазма должна зарядиться относительно стенки до потенциала в несколько электронных температур. А поскольку давление плазмы спадает к стенкам, то и внутри шнура появится радиальное электрическое поле, направленное наружу. О наличии такого поля можно судить по экспериментально наблюдаемому вращению плазмы.

Произведем теперь некоторые оценки. Пусть  $l$  — есть эффективный масштаб конвективных пульсаций. Поскольку обычно разряд бывает окружен лайнером, расположенным на некотором расстоянии от проводящего кожуха, то кожух не оказывает стабилизирующего действия на мелкомасштабные пульсации. Вследствие этого масштаб  $l$  не изменяется существенно при приближении к стенке, и приближенно можно положить  $l/a = \text{const}$  (по аналогии с турбулентностью затопленных струй можно ожидать  $l/a \approx 10^{-1}$ ).

Пульсацию давления  $p'$  можно представить как  $p' = l dp/dr \approx lp/a$ , а поток энергии на стенки  $q = \langle p'v' \rangle \approx \nu p l^2/a^2$ , где  $v' \approx lv$  — пульсация скорости,  $\nu$  — эффективная частота пульсаций. Частота пульсаций  $\nu$  может быть найдена из условия баланса энергии  $2\pi qa = Q_s$ , где  $Q_s$  — разность между джоулевым теплом и излучением на примесях. Если энергия, уносимая плазмой на стенки, сравнима с энергией излучения на примесях, то приближенно  $Q_s \approx \pi a^2 j^2/\sigma \approx c^2 H_\theta^2/(4\pi\sigma)$ , откуда получаем

$$\nu \approx \frac{c^2}{\pi\sigma l^2} \frac{H_\theta^2}{8\pi p}. \quad (12)$$

Пульсация скорости  $v'$  определяется работой, которая совершается пульсацией градиента избыточного давления  $p'_1/a \approx l/(a^2 p_1)$ , на длине  $l$ :  $\mu n(v')^2 \approx l^2 p_1/a^2$ . Отсюда следует:  $p_1 \approx \mu n(\nu a)^2$ . Подставляя сюда

вместо  $\nu$  выражение (12), получим

$$\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/2} \approx \frac{H_\theta^2}{8\pi p} \frac{ac^2}{v_i \pi \sigma l^2} \approx \frac{H_\theta^2 a^2}{8\pi p l^2} \frac{c^2}{\pi \sigma v_i a}. \quad (13)$$

где  $v_i = (T/\mu)^{1/2}$  — тепловая скорость ионов,  $\mu$  — их масса.

Отсюда видно, что при очень хорошей проводимости, когда инерционное время  $t_i = a/v_i$  значительно меньше скин-слоевого  $t_s = \pi \sigma a^2/c^2$ , избыточное давление  $p_1$  действительно мало. При уменьшении проводимости условие  $p_1/p < 1$  будет нарушено, и тогда можно считать  $p_1 \approx p > p_0$ . В этом случае  $\nu = v_i/a$ , и из соотношения (13) получим

$$\frac{8\pi p}{H_\theta^2} \approx \left(\frac{a}{l}\right)^2 \frac{c^2}{\pi \sigma v_i a}. \quad (14)$$

Таким образом, если бы в шнуре не было других механизмов раскачки колебаний, то при заданном токе и продольном магнитном поле можно было бы ожидать следующий характер изменения параметров разряда при увеличении плотности частиц  $n$ . При малой плотности  $p_1 \ll p \approx p_0$ , и уменьшение плотности должно было бы приводить к возрастанию температуры и проводимости, а следовательно, к уменьшению частоты пульсаций. При этом распределение полей должно быть бессильным. Затем должен быть некоторый интервал плотностей, в котором конфигурация полей является еще бессильной ( $p_0 < p < H^2/8\pi$ ), а частота пульсаций  $\nu \approx v_i/a = \text{const}$ . При дальнейшем увеличении  $n$  температура плазмы должна быстро падать, а ее давление приближаться к давлению магнитного поля.

Хотя в настоящее время и есть намеки на изменение характера разряда при увеличении плотности, (см. [9]), однако для полного выяснения этого вопроса необходимы дополнительные исследования.

В заключение этого параграфа мы обсудим еще вопрос об обратном поле. Как мы уже упоминали выше, при увеличении тока разряда продольное поле снаружи от токового шнура меняет знак. Особенно сильно этот эффект был выражен на Зете [2], где величина обратного поля составляла примерно  $1/4$  от поля на оси разряда.

Это явление нельзя объяснить ни скиновым захватом поля, ни анизотропией проводимости. Более того, как было показано экспериментально [9], его нельзя объяснить и винтовым искривлением всего шнура как целого. К этому же выводу приводит и теоретическое рассмотрение извивания шнура в квазилинейном приближении: как было отмечено в разд. 2, среднее поле при малом извивании по-прежнему сохраняет вид рис. 1 и не обнаруживает тенденции к изменению знака на периферии разряда.

Качественно эффект генерации обратного поля можно понять на основе механизма турбулентной конвекции. Заметим прежде всего, что в тороидальной камере токовый шнур всегда немного сдвинут в направлении к наружной стенке. Поэтому внутри лайнера, между его внутренней стенкой и токовым шнуром, образуется серповидная область, силовые линии в которой проходят через лайнер. Как правило, именно в этой области и наблюдается появление обратного поля. Так как все процессы переноса вдоль магнитного поля происходят значительно эффективнее, чем поперек, то можно думать, что плазма в этой области является холодной и плохо проводящей. Поэтому, казалось бы, ток в этой области должен отсутствовать, и продольное поле должно быть постоянным.

Но на самом деле это было бы так, если бы длина перемешивания  $l$  была ничтожно мала. В турбулентном разряде в область между шнуром и лайнером все время выбрасываются трубки с хорошо проводящей плазмой из внутренних частей разряда. При этом отдельная трубка  $ADE$  (см. рис. 3) искривляется таким образом, что только ее небольшая часть  $CD$  оказывается на периферии, а концы остаются внутри разряда. Поэтому даже в том случае, когда периферийная силовая линия  $CD$  оказывается наклоненной в обратную сторону, по отношению к  $E_0$ , ток по этому участку будет по-прежнему идти в ту же сторону от  $C$  к  $D$ , так как полная ЭДС, приложенная между  $A$  и  $B$ , сохраняет свой знак при таком искривлении. Таким образом, за счет этого эффекта ток в области обратного поля должен течь против внешней ЭДС, что и наблюдается в действительности.

Можно сказать, что с учетом конечности  $l$  ток в некоторой точке пространства будет определяться не только проводимостью в данной точке, но и проводимостью и направлением магнитного поля в соседних точках, что приближенно можно учесть заменой величины  $\sigma E_0 H_z$  в уравнении (6) на  $(1/2)[(\sigma E_0 H_z)_{z+e} + (\sigma E_0 H_z)_{z-e}]$ . Отсюда видно, что при конечном  $l$  производная  $dH_z/dz$  может быть отличной от нуля при  $H_z = 0$ , так что распределение продольного поля должно принять вид, качественно представленный на рис. 1 штриховой кривой.

В предыдущем параграфе мы установили, что при увеличении  $E_0$  выше критического значения  $E_c$  шнур в приближении продольной проводимости теряет осевую симметрию, а параметр  $y$  замораживается. Но в приближении продольной проводимости мы искусственно разбиваем движение шнура на пульсационное, с масштабом  $l \ll a$ , и макроскопическое, описываемое посредством средних величин. В действительности такое разбиение носит чисто условный характер, и можно думать, что при приближении к критическому радиусу масштаб и амплитуда пульсационных движений также возрастают, что облегчает генерацию обратного поля. Как мы уже отмечали, на эксперименте генерация поля имеет место как раз при замороженном значении  $y$ .

## 5. Заключение

Итак, рассмотренная здесь модель турбулентного разряда позволяет дать качественное объяснение многим особенностям разряда в продольном магнитном поле. В частности, она устраняет кажущееся противоречие между парамагнетизмом шнура, который может поддерживаться только за счет движения плазмы к оси разряда, и экспериментально наблюдаемым выбросом горячей плазмы на стенки. (Впрочем, это противоречие может быть устранено и при учете других механизмов конвекции. Для бессилового модели достаточно лишь, чтобы большая утечка энергии из шнура не была связана с сильными колебаниями магнитного поля.)

В реальном разряде наряду с рассмотренным здесь механизмом конвекции могут присутствовать другие, в частности, обусловленные неустойчивостью плазмы с конечной проводимостью. Поэтому для полного выяснения динамики плазмы в турбулентном разряде требуются еще дополнительные исследования, прежде всего экспериментальные.



В заключение приношу глубокую благодарность акад. М.А. Леонтовичу, В.Д. Шафранову и А.И. Карчевскому за обсуждение затронутых здесь вопросов. Численные расчеты были выполнены А.Е. Бажановой, которой автор выражает свою искреннюю признательность.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Винтовой шнур в квазилинейном приближении

Пользуясь уравнением (9) и выражениями (10), нетрудно проверить, что в бессловом поле при винтовой симметрии

$$\text{rot } \mathbf{H} = -\frac{dI}{d\psi} \mathbf{H}. \quad (15)$$

Сравнивая это выражение с (4), находим

$$\frac{dI}{d\psi} = -\frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\mathbf{E}\mathbf{H}}{H^2}. \quad (16)$$

Электрическое поле в винтовом шнуре складывается из продольного  $\mathbf{E}_0$  и безвихревого поля, возникающего за счет неоднородности магнитного поля, так что  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \nabla\varphi$ . Поставляя это выражение в (16) и учитывая винтовую симметрию, получим

$$\frac{dI}{d\psi} = -\frac{4\pi\sigma}{cH^2} \left\{ E_0 H_z + \frac{1}{r} \frac{D(\psi, \varphi)}{D(r, \zeta)} \right\}. \quad (17)$$

Это соотношение можно рассматривать как уравнение для  $\varphi$ . Оно должно удовлетворять условиям разрешимости, которое можно получить, умножая обе части уравнения (17) на  $rH^2$  и усредняя его затем по поверхности  $\psi = \text{const}$ . Из полученного таким образом условия разрешимости находим

$$\frac{dI}{d\psi} = -\frac{4\pi\sigma E_0}{c} \frac{\langle rH_z \rangle_{\psi=\text{const}}}{\langle rH^2 \rangle_{\psi=\text{const}}}.$$

Подставляя это выражение в (15) и усредняя его затем по  $\zeta$ , мы получим два уравнения для средних полей  $\bar{H}_z$  и  $\bar{H}_\theta$ :

$$\frac{d\bar{H}_z}{dr} = -\frac{4\pi\sigma E_0}{c} \left\langle \frac{H_\theta \langle H_z r \rangle_{\psi=\text{const}}}{\langle H^2 r \rangle_{\psi=\text{const}}} \right\rangle_{r=\text{const}}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\bar{H}_\theta) = \frac{4\pi\sigma E_0}{c} \left\langle \frac{H_z \langle H_z r \rangle_{\psi=\text{const}}}{\langle H^2 r \rangle_{\psi=\text{const}}} \right\rangle_{r=\text{const}}. \quad (19)$$

Допустим, что продольное электрическое поле  $E_0$  немного превышает критическое значение  $E_c$  для винтового возмущения с определенным шагом. Введем безразмерный радиус  $x = 4\pi\sigma E_c / \dot{H}_0$  и величину  $\varepsilon = E_0 / E_c - 1$ . При  $\varepsilon \ll 1$  среднее поле можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\bar{H}_\theta}{H_0} &= u(x) + \delta(x), \\ \frac{\bar{H}_z}{H_0} &= v(x) + \gamma(x), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\delta$ ,  $\gamma$  — малые величины порядка  $\varepsilon$ ,  $H_0$  — среднее магнитное поле при  $x = 0$ .

Если  $k < 0,5$ , то шаг силовых линий всюду меньше шага возмущения, и  $\psi_1$  нигде не имеет особенностей. В этом случае  $\psi_1$  равномерно непрерывно зависит от  $\varepsilon$ , и при малых значениях  $\varepsilon$  можно считать, что от  $\varepsilon$  зависит только амплитуда  $A$  винтового возмущения, а зависимость  $\psi_1$  от радиуса остается неизменной.

Чтобы найти  $A$ , следует прежде всего определить  $\delta$  и  $\gamma$ . Для этого в уравнениях (18), (19) подставим выражения для средних полей (20) и произведем разложение правых частей (18), (19) по  $A$  до второго порядка включительно. При разложении по  $A$  следует учесть, что

$$\langle f(r, \zeta) \rangle_{\psi=\text{const}} = \frac{\int (f(r, \zeta) \delta(\psi - \text{const}) dr d\zeta}{\int \delta(\psi - \text{const}) dr d\zeta} = \frac{\int \frac{f(r(\psi)\zeta)}{|\partial\psi/\partial r|} d\zeta}{\int \frac{d\zeta}{|\partial\psi/\partial r|}}. \quad (21)$$

Так как это разложение не представляет принципиальных трудностей, но очень громоздко, то мы приведем здесь лишь окончательный результат. Если  $\delta$ ,  $\gamma$  разложить на две части  $\delta = A^2\delta_1 + \delta_2$ ,  $\gamma = A^2\gamma_1 + \gamma_2$ , где  $\delta_2 = \varepsilon x du/dx$ ,  $\gamma_2 = \varepsilon x dv/dx$ , то вытекающие из (18), (19) уравнения для  $\delta_1$ ,  $\gamma_1$  примут вид

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x\delta_1) + \frac{2uv^2}{(u^2 + v^2)^2} \delta_1 + \frac{2u^2v}{(u^2 + v^2)^2} \gamma_1 = fv - g \left( \frac{v}{u^2 + v^2} \psi_1^2 + kx\psi_1 \frac{d\psi_1}{dx} \right), \quad (22)$$

$$\frac{d\gamma_1}{dx} + \frac{v(v^2 - u^2)}{(u^2 + v^2)^2} \delta_1 - \frac{u(v^2 - u^2)}{(u^2 + v^2)^2} \gamma_1 = -fu + g \left( \frac{kxv}{u^2 + v^2} \psi_1^2 - \psi_1 \frac{d\psi_1}{dx} \right), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} f = & \frac{1}{2x^2(u^2 + v^2)^2} \left\{ \frac{kx^2}{1 + k^2x^2} \frac{d\psi_1}{dx} + \frac{2x(u - kxv)}{1 + k^2x^2} \frac{v}{u^2 + v^2} \frac{d\psi_1}{dx} + \right. \\ & \left. + \psi_1 \left[ \frac{xv}{(1 + k^2x^2)(u^2 + v^2)} - \frac{uv(2u - x)}{(u^2 + v^2)(u - kxv)} - \frac{2xv^2(v + kxu)}{(u^2 + v^2)^2(1 + k^2x^2)} \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{2x(u - kxv)}{1 + k^2x^2} \frac{d\psi_1}{dx} + \psi_1 \left[ \frac{v^2 - u^2}{u - kxv} - \frac{2xv(v + kxu)}{(u^2 + v^2)(1 + k^2x^2)} \right] \right\} - \\ & - \frac{v}{2(u^2 + v^2)^2} \left\{ \frac{1}{1 + k^2x^2} \left( \frac{d\psi_1}{dx} \right)^2 + \psi_1^2 \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{v}{(u^2 + v^2)^2(1 + k^2x^2)} \right] \right\} + \\ & + \frac{v}{2(u^2 + v^2)(u - kxv)^2} \left\{ \frac{u(2u - x)}{x^2(u^2 + v^2)} \left[ \psi_1^2 - x\psi_1 \frac{d\psi_1}{dx} \right] + \frac{x - 3u}{x^2(u^2 + v^2)} \left[ \frac{2u}{x} - \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2} \right] \psi_1^2 \right\}, \quad (24) \end{aligned}$$

$$g = \frac{uv}{2(u - kxv)(1 + k^2x^2)(u^2 + v^2)^2} \left( \frac{2u}{x} - \frac{v^2}{u^2 + v^2} \right). \quad (25)$$

Вместо  $u$  и  $v$  подставим в уравнение (11) средние поля  $\bar{H}_\theta/H_0$ ,  $\bar{H}_z/H_0$ , разложим  $Q$  по  $\delta$ ,  $\gamma$ , умножим полученное уравнение на  $\psi_1 x dx/(1 + k^2x^2)$  и проинтегрируем по  $x$ . Вследствие самосопряженности уравнения (11) и

того обстоятельства, что  $\psi_1$  удовлетворяет этому уравнению, мы получим соотношение

$$A^2 \int \left[ \frac{\partial Q}{\partial u} \delta_1 + \frac{\partial Q}{\partial v} \gamma_1 \right] \psi_1^2 \frac{x dx}{1+k^2x^2} + \varepsilon \int \left[ \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{dx} \right] \frac{\psi_1^2 x^2 dx}{1+k^2x^2} = 0, \quad (26)$$

определяющее величину амплитуды  $A$ .

Если решение уравнений (22), (23) с начальными условиями  $\delta_1(0) = \gamma_1(0) = 0$  подставить в (26), то получим

$$A = S\varepsilon^{1/2} = S(k) \left( \frac{E_0}{E_c(k)} - 1 \right)^{1/2}, \quad (27)$$

где  $S$  — некоторая функция  $k$ . Численный расчет показал, что для  $k = 0,4$   $S = 0,18$ , для  $k = 0,45$   $S = 0,09$ .

То обстоятельство, что  $S(k)$  быстро убывает при  $k \rightarrow 0,5$ , указывает на плохую точность квазилинейного приближения, когда при извивании появляется особенность у магнитного поля.

Численный расчет показывает, что распределение средних полей  $H_\theta$  и  $H_z$  опять оказывается близким к бессиловому, которое задается значением только одного параметра  $\eta = 4\pi Ia / (\Phi c)$ . Этот параметр можно определить как

$$\frac{\eta}{\eta_c} = \frac{1 + \varepsilon \left( \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \right)_{x=x_c} + S^2 \varepsilon \left( \frac{\delta_1}{u} \right)_{x=x_c}}{1 + \varepsilon \int_0^{x_c} \left( \frac{dv}{dx} + S^2 \gamma_1 \right) x dx \left[ \int_0^{x_c} v x dx \right]^{-1}}. \quad (28)$$

При  $\varepsilon \ll 1$  это выражение можно разложить по  $\varepsilon$ , и подстановка результатов численного интегрирования дает

$$\frac{\eta}{\eta_c} = 1 - 0,3\varepsilon \quad \text{для } k = 0,4,$$

$$\frac{\eta}{\eta_c} = 1 - 0,1\varepsilon \quad \text{для } k = 0,45.$$

Отсюда следует, что при  $E_0 > E_z$  распределение поля по радиусу практически замораживается и соответствует примерно  $\eta \approx 3$ .

### Список литературы

1. Thonemann P.C. et al. // Nature. 1958. V. 4604 С. 218.
2. Butt E.P. et al. // Proc. 2nd U.N. Inter. Conf. PUAE **32** United Nations. Geneva, 1958. P. 42.
3. Allibone T.E., Chick D.R., Thomson G.P. // Proc. 2nd U.N. Inter. Conf. PUAE **32** United Nations. Geneva, 1958. P. 169.
4. Афросимов В.В. и др. // ЖТФ. 1960. Т. XXX. С. 1383.
5. Бабичев А.П. и др. // Ядерный синтез. Дополнение. 1962. Ч. 2. С. 635.
6. Colgate S.A., Furth H. // U.S. AEC Report UCRL-S862. 1960.
7. Suydam B. // Proc. 2nd U.N. Inter. Conf. PUAE **31** United Nations. Geneva, 1958. P. 157.

8. *Брагинский С.И., Шафранов В.Д.* // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / Под. ред. М.А. Леонтовича — М.: АН СССР, Институт атомной энергии, 1958. Т. 2. С. 26.
9. *Lees D.J., Rusbridge M.C.* // Proc. 4th Inter. Conf. Ionization Phenomena in Gases. (Uppsala, 17–21 Aug. North Holland Publishing Co. Amsterdam 1959) 1960. V. 2. P. 954.
10. *Шафранов В.Д.* // Атомная энергия. 1956. Т. 5. С. 38.
11. *Taylor R.* // Proc. Phys. Soc. (Lond.) 1957. V. 870. P. 1049.
12. *Johnson J. et al.* // Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 281.
13. *Newcomb W.A.* // Ann. Phys. 1960. V. 10. P. 232.
14. *Allen W.L.* // Nature. 1960. V. 4734. P. 279.
15. *Sawyer G.A., Scott P.L., Stratton T.E.* // Phys. Fluids. 1959. V. 2. P. 47.
16. *Wilcox J.M., Boley F.I.* // Phys. Fluids 1960. V. 3. P. 141.
17. *Робсон А.Е.* // Радиотехн. электр. 1959. Т. 4. С. 1299.

## ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ \*)

Рассмотрен вопрос о турбулентной диффузии бесстолкновительной плазмы в сильном магнитном поле, развивающейся вследствие дрейфовой неустойчивости. Показано, что при наличии колебаний наряду с линейным затуханием Ландау появляется нелинейное затухание, которое сильно понижает амплитуду установившихся колебаний. Приближенно определены спектр колебаний и коэффициент турбулентной диффузии.

### 1. Введение

В работе автора и А.В. Тимофеева [1] было показано, что неоднородная разреженная плазма с максвелловским распределением частиц по скоростям является неустойчивой по отношению к дрейфовым волнам [2] с поперечной длиной волны порядка среднего ларморовского радиуса ионов, причем для плазмы ничтожно малого давления инкремент нарастания малых колебаний может быть порядка частоты. Как показали Михайловский и Рудаков [3], увеличение давления плазмы приводит к уменьшению инкремента, так что при  $\beta_0 \equiv 8\pi p/H^2 \gg m_e/m_i$ , где  $p$  — давление плазмы,  $m_i$  — масса иона,  $m_e$  — масса электрона, в наиболее существенной области волновых чисел инкремент оказывается значительно меньше частоты колебаний. При этом можно ожидать, что развивающееся вследствие неустойчивости турбулентное движение плазмы будет представлять собой набор сравнительно слабо взаимодействующих колебаний, т. е. турбулентность будет слабой.

Общий метод рассмотрения слабо турбулентных состояний, использующий разложение по малому отношению инкремента к частоте, изложен в работе автора и В.И. Петвиашвили [4]. В настоящей работе этим методом исследуется вопрос о характере взаимодействия установившихся колебаний неоднородной разреженной плазмы с учетом нелинейного затухания Ландау и распада волн. Для простоты мы ограничились рассмотрением случая изотермической бестоковой плазмы в однородном магнитном поле. Таким образом, мы оставили вне поля зрения неустойчивость за счет градиента температуры [2, 3] и продольного тока [5]. Вопрос о влиянии неоднородности магнитного поля, или скорее, перекрещенности силовых линий будет обсужден качественно.

\*) ЖЭТФ. 1963. Т. 45. Вып. 4(10). С. 1230–1242.

## 2. Основные соотношения

Предположим, что неоднородная изотермическая ( $T_i = T_e = T = \text{const}$ ) плазма с градиентом плотности вдоль оси  $x$ :  $dn/dx \equiv \varkappa n$ , находится в сильном магнитном поле  $H$ , направленном вдоль оси  $z$ . Будем считать, что давление плазмы много меньше давления магнитного поля, а именно, предположим, что

$$\frac{m_e}{m_i} \ll \beta_0 \ll \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}. \quad (1)$$

При этом магнитное поле можно считать однородным.

Допустим далее, что магнитное поле настолько сильное, что средний ларморовский радиус ионов  $\rho \ll 1/\varkappa$ . При этом длина волны интересующих нас колебаний, имеющая порядок величины  $\rho$ , будет значительно меньше характерного размера неоднородности  $\varkappa^{-1}$ , так что для описания колебаний можно использовать квазиклассическое приближение, т. е. считать, что зависимость колеблющихся величин от пространственной координаты  $\mathbf{r}$  имеет вид  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ .

Для неустойчивости плазмы низкого давления существенными являются лишь возмущения так называемого конвективного типа, в которых продольное магнитное поле остается постоянным. Это означает, что поперечную составляющую электрического поля можно считать безвихревой, т. е.  $\mathbf{E}_\perp = -\nabla_\perp \varphi$ . Наряду с  $\varphi$  удобно ввести в рассмотрение величину  $\psi$ , определяемую соотношением  $E_z = -\partial\psi/\partial z$ . Переходя к фурье-представлению, будем иметь  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = -i\mathbf{a}\Phi_{\mathbf{k}\omega}$ , где  $\Phi_{\mathbf{k}\omega}$  — фурье-компонента потенциала,  $\mathbf{a} = \mathbf{k}_\perp + \mathbf{h}k_z\alpha_0$ ,  $\alpha_0 = \Psi_{\mathbf{k}\omega}/\Phi_{\mathbf{k}\omega}$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ .

Представляя функцию распределения для каждого сорта частиц в виде  $f + f'$ , где  $f$  — усредненная функция, а  $f'$  — колеблющаяся часть, и пользуясь операцией усреднения, разбиваем кинетическое уравнение для частиц заряда  $e$  и массы  $m$  на два:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f + \left(\frac{e}{m}\mathbf{E}_0 + \frac{e}{mc}[\mathbf{v}\mathbf{H}]\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = i\frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \langle \mathbf{b}_{\mathbf{k}\omega}\Phi_{\mathbf{k}\omega}F_{\mathbf{k}\omega}^* \rangle d\mathbf{k} d\omega, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left(-i\omega + i\mathbf{k}\mathbf{v} - \Omega\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)F_{\mathbf{k}\omega} &= i\frac{e}{m}\mathbf{b}_{\mathbf{k}\omega}\Phi_{\mathbf{k}\omega}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \\ &+ i\frac{e}{m}\int \mathbf{b}_{\mathbf{k}'\omega'} \left\{ \Phi_{\mathbf{k}'\omega'} \frac{\partial F_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}}{\partial \mathbf{v}} - \left\langle \Phi_{\mathbf{k}'\omega'} \frac{\partial F_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right\} d\mathbf{k}' d\omega'. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $F_{\mathbf{k}\omega}$  — фурье-компонента функции  $f'$ ,  $\mathbf{E}_0$  — среднее электрическое поле,  $\Omega = eH/(mc)$ ,  $\vartheta$  — азимутальный угол в пространстве скоростей,  $\mathbf{b}_{\mathbf{k}\omega} = \mathbf{a}(1 - \mathbf{k}\mathbf{v}/\omega) + \mathbf{k}(\mathbf{a}\mathbf{v})/\omega$ .

При  $\varkappa\rho \ll 1$  функцию  $f$  можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(v_\perp^2, v_z, x) + \frac{v_y}{\Omega} \frac{\partial f_0}{\partial x}, \quad (4)$$

так что величину  $\partial f/\partial \mathbf{v}$  в (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -mT^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{e}_y v_0)f_0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{e}_y$  — единичный вектор вдоль оси  $y$ ,  $T$  — температура,

$$v_0 = -\frac{T\varkappa}{m\Omega} = -\frac{T}{m\Omega n} \frac{dn}{dx}. \quad (6)$$

В дальнейшем для упрощения записи формул мы будем опускать индексы  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$ , где это не может привести к недоразумениям, отмечая штрихом величины с индексами  $\mathbf{k}'$ ,  $\omega'$  и двумя штрихами — с индексом  $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ ,  $\omega'' = \omega - \omega'$ .

Поскольку мы интересуемся колебаниями с частотами, значительно меньшими циклотронной  $\Omega$ , то уравнение (3) можно упростить, используя разложение по обратным степеням циклотронной частоты. В нулевом приближении имеем

$$ik_{\perp}v_{\perp} \cos(\vartheta - \alpha)F - \Omega \frac{\partial F}{\partial \vartheta} = -ieT^{-1}k_{\perp}v_{\perp} \cos(\vartheta - \alpha)f_0\Phi,$$

где  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{k}_{\perp}$  и осью  $x$ . Отсюда получаем

$$F = -e\Phi T^{-1}f_0 + F_1(v_{\perp}^2, v_z) \exp\left(i\frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]\mathbf{h}}{\Omega}\right). \quad (7)$$

Подставим это выражение в (3), умножим затем (3) на  $\exp(-i[\mathbf{k}\mathbf{v}]\mathbf{h}/\Omega)$  и усредним по  $\vartheta$ , что соответствует наложению условия ортогональности к решению сопряженного уравнения нулевого приближения. Пренебрегая в квадратичных членах слагаемыми, линейными по  $k$ , что вполне оправдано при  $k_{\perp} \gg \kappa$ , получим

$$\begin{aligned} -i(\omega - k_z v_z)F_1 &= -i\frac{e}{T} \frac{\omega + \omega_*}{\omega} (\omega - k_z v_z + k_z v_z \alpha_0) f_0 J_0\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) \Phi - \\ &- \frac{e}{m} \int \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']\mathbf{h}}{\Omega} \left\{1 + \frac{k'_z v_z (\alpha'_0 - 1)}{\omega'}\right\} J_0\left(\frac{k'_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) \{\Phi' F'' - \langle \Phi' F'' \rangle\} d\mathbf{k}' d\omega', \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\omega_* = k_y v_0$ ,  $\Phi' = \Phi_{\mathbf{k}'\omega'}$ ,  $F'' = F_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}$ ,  $\alpha'_0 = \alpha_0(\mathbf{k}'\omega')$ ,  $J_0$  — функция Бесселя нулевого индекса.

При слабой турбулентности квадратичный член следует считать малым, и, следовательно, зависимость  $F_1$  от  $v_{\perp}$  будет определяться первым слагаемым в правой части (8), откуда видно, что  $F_1$  можно представить в виде

$$F_1(v_z) J_0\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) f_m(v_{\perp}) \beta^{-1}(s).$$

Здесь

$$f_m(v_{\perp}) = \frac{m}{2\pi T} \exp\left(-\frac{mv_{\perp}^2}{2T}\right)$$

— максвелловская функция,  $F_1(v_z)$  — функция распределения по продольной скорости, а  $\beta(s) = e^{-s} I_0(s)$  — множитель, добавленный для нормировки,  $s = k_{\perp}^2 \rho^2 = k_{\perp}^2 T/m\Omega^2$ ,  $I_0$  — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Умножая (8) на  $J_0(k_{\perp} v_{\perp}/\Omega) \cdot 2\pi v_{\perp} dv_{\perp}$  и интегрируя по  $v_{\perp}$ , получаем уравнение для  $F_1(v_z)$ :

$$\begin{aligned} (\omega - k_z v_z)F_1(v_z) &= eT^{-1}(\omega + \omega_*)A f_0 \beta \Phi - \\ &- i\frac{c}{H} \int \frac{\chi(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\beta''} A' \{\Phi' F_1''(v_z) - \langle \Phi' F_1''(v_z) \rangle\} d\mathbf{k}' d\omega', \end{aligned} \quad (9)$$

где под  $f_0$  подразумевается максвелловская функция от  $v_z$ ,  $\beta'' = \beta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ ,

$$A = 1 - \frac{k_z v_z (1 - \alpha_0)}{\omega}, \quad A' = 1 - \frac{k'_z v_z (1 - \alpha'_0)}{\omega'}$$

а функция  $\chi(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  равна

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= [\mathbf{k}, \mathbf{k}'] \mathbf{h} \xi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \\ &= [\mathbf{k} \mathbf{k}'] \mathbf{h} \int J_0\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{k'_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{k'_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) f_m(v_{\perp}) d\mathbf{v}_{\perp}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (9) относится как к ионной  $F_1^i(v_z)$ , так и к электронной функциям распределения, причем для электронов можно считать  $\chi^e(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = [\mathbf{k} \mathbf{k}'] \mathbf{h}$ ,  $\beta^e = 1$ .

Эти уравнения должны быть дополнены уравнениями для электрического поля. В качестве таковых можно использовать условие квазинейтральности, которое, учитывая (7), мы представим в виде

$$\frac{T}{en} \int [F_1^i(v_z) - F_1^e(v_z)] dv_z - 2\Phi = 0, \quad (11)$$

и уравнение  $\partial j_z / \partial t = -(c^2/4\pi)(\text{rot rot } \mathbf{E})_z$ , которое с учетом (11) удобно записать в виде

$$\frac{T}{en} \int (\omega - k_z v_z) [F_1^i(v_z) - F_1^e(v_z)] dv_z - 2\omega\Phi = \frac{sk_z^2 v_A^2}{\omega} (\Psi - \Phi), \quad (12)$$

где  $v_A = H/\sqrt{4\pi n m_i}$  — альвеновская скорость,  $s = k_{\perp}^2 T/(m_i \Omega_i^2)$ ,  $\Psi = \alpha_0 \Phi$ .

В слабо турбулентной плазме взаимодействие между колебаниями мало, и поэтому частота колебаний определяется, в основном, линейным приближением. Отбрасывая в (9) квадратичные члены и выражая  $F_1$  через  $\Phi$ ,  $\Psi$ , приводим линеаризованные уравнения (11), (12) к виду

$$B_1 \Phi + B_2 \Psi = 0, \quad (11a)$$

$$\left[ \frac{(\omega + \omega_*)\omega(1 - \beta)}{sk_z^2 v_A^2} - 1 \right] \Phi + \Psi = 0, \quad (12a)$$

где

$$\omega_* \equiv \omega_*^i = -\omega_*^e, \quad \beta \equiv \beta^i, \quad \beta^e = 1, \quad v_i = \sqrt{\frac{2T}{m_i}}, \quad v_e = \sqrt{\frac{2T}{m_e}},$$

$$B_1 = -(1 - \beta) \frac{\omega + \omega_*}{\omega},$$

$$B_2 = -\beta \frac{\omega + \omega_*}{\omega} \left[ 1 - \frac{\omega}{k_z v_i} Y\left(\frac{\omega}{k_z v_i}\right) \right] - \frac{\omega - \omega_*}{\omega} \left[ 1 - \frac{\omega}{k_z v_e} Y\left(\frac{\omega}{k_z v_e}\right) \right], \quad (13)$$

$$\begin{aligned} Y\left(\frac{\omega}{k_z v_i}\right) &= \frac{k_z v_i}{\sqrt{\pi}} \int \frac{\exp(-v^2/v_i^2)}{\omega - k_z v + i\nu} \frac{dv}{v_i} = \\ &= 2 \int_0^{\omega/k_z v_i} \exp\left(-\frac{\omega^2}{k_z^2 v_i^2} + x^2\right) dx - \frac{i\sqrt{\pi} k_z}{|k_z|} \exp\left(-\frac{\omega^2}{k_z^2 v_i^2}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (12a) получаем

$$\alpha_0 = \frac{\Psi}{\Phi} = 1 - \frac{(\omega + \omega_*)\omega(1 - \beta)}{sk_z^2 v_A^2}, \quad (15)$$



а из (11а) с учетом (15), находим дисперсионное соотношение для частоты

$$D \equiv B_1 + \alpha_0 B_2 = 0.$$

В наиболее важном для нас случае  $v_i \ll \omega/k_z \ll v_e$  дисперсионное уравнение принимает вид

$$D = -2 + \beta \frac{\omega + \omega_*}{\omega} + \frac{\omega^2 - \omega_*^2}{sk_z^2 v_A^2} (1 - \beta) - i\sqrt{\pi} \frac{\omega - \omega_*}{|k_z| v_e} \left[ 1 - \frac{\omega(\omega + \omega_*)(1 - \beta)}{sk_z^2 v_A^2} \right] = 0. \quad (16)$$

Отсюда нетрудно найти частоту и инкремент нарастания малых колебаний.

Соответствующее исследование проведено в работе А.Б. Михайловского и Л.И. Рудакова [3], где были рассмотрены все ветви дрейфовых волн. Нас в первую очередь интересуют нарастающие во времени колебания, так как именно они будут иметь максимальную амплитуду. При малых  $s$  частота этих колебаний близка к  $\omega_*$ , а при достаточно больших  $s$ , когда

$$\beta = e^{-s} I_0(s) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \ll 1, \quad (17)$$

$$\omega_k \approx \frac{\omega_* \zeta^2}{2\sqrt{2\pi s} (\zeta^2 + \sin^2 \alpha)} = \frac{v_0 \zeta^2 \sin \alpha}{2\sqrt{2\pi} \rho (\zeta^2 + \sin^2 \alpha)},$$

где  $\rho = \sqrt{T/(m_i \Omega_i^2)}$ ,  $\zeta = \sqrt{2} \rho k_z v_A / v_0 = 2\rho k_z / (\varkappa \sqrt{\beta_0})$ .

Инкремент нарастания малых колебаний  $\gamma$  при  $s > 1$  и не слишком малых  $\zeta$  приближенно равен

$$\gamma \approx \frac{\sqrt{\pi} \omega_k^2}{|k_z| v_e \beta}. \quad (18)$$

Из сопоставления (17) и (18) видно, что инкремент достигает максимума  $\sim \beta^{-1} \omega_k [m_e / (m_i \beta_0)]^{1/2}$  при  $\zeta \sim 1$ , т. е. когда фазовая скорость  $\omega/k_z$  вдоль оси  $z$  достигает максимального значения  $\sim v_A$ .

При помощи реальной части уравнения (16) нетрудно показать, что для собственных колебаний

$$\alpha_0 = \frac{(1 - \beta)(\omega_* + \omega_k)}{\omega_* - \omega_k}. \quad (19)$$

Таким образом, в области  $s > 1$   $\alpha_0 \approx 1$ , т. е. колебания являются почти продольными.

### 3. Кинетическое уравнение для волн

Поскольку  $\gamma/\omega \ll 1$ , уравнение (9) можно решать разложением по амплитуде колебаний, считая, что в нулевом приближении мы имеем дело со свободными, не взаимодействующими волнами. Для простоты мы ограничимся рассмотрением лишь тех колебаний, которые в линейном приближении являются нарастающими, поскольку амплитуда затухающих колебаний должна быть заметно меньше.

Следуя работе автора и Петвиашвили [4], составим цепочку зацепляющихся уравнений для корреляционных функций. Умножая (9) на  $\Phi^*$  и

усредняя его по статистическому ансамблю, получим

$$(\omega - k_z v_z) P_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e}{T} (\omega + \omega_*) A f_0 \beta I_{\mathbf{k}\omega} - i \frac{c}{H} \int \frac{\chi(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\beta''} A' Q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') I_{\mathbf{k}\omega} &= \langle \Phi_{\mathbf{k}'\omega'}^* \Phi_{\mathbf{k}\omega} \rangle, \\ \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') P_{\mathbf{k}\omega}(v_z) &= \langle \Phi_{\mathbf{k}'\omega'}^* F_{1\mathbf{k}\omega}(v_z) \rangle, \\ \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \delta(\omega - \omega_1) Q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega} &= \langle \Phi_{\mathbf{k}'\omega'}^* \Phi_{\mathbf{k}\omega}^* F_{1\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}', \omega_1 - \omega'} \rangle. \end{aligned}$$

Согласно (20), парная корреляционная функция оказывается связанной с тройной. Аналогичным образом, умножением (9) на произведение двух  $\Phi$  можно получить уравнение для  $Q$ , которое будет содержать четверную корреляционную функцию. В приближении слабой связи можно пренебречь корреляцией между колебаниями с четырьмя различными  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$ , т. е. можно выразить четверную корреляционную функцию через произведение парных. В этом приближении получим для  $Q$ :

$$\begin{aligned} (\omega'' - k_z'' v_z) Q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega} &= eT^{-1} (\omega'' + \omega_*'') A'' f_0 \beta'' q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega} - \\ &- i \frac{c}{H} \left\{ \chi(\mathbf{k}'', \mathbf{k}) \frac{A I_{\mathbf{k}\omega} P_{-\mathbf{k}', -\omega'}}{\beta'} + \chi(\mathbf{k}'', -\mathbf{k}') \frac{A' I_{\mathbf{k}'\omega'} P_{\mathbf{k}\omega}}{\beta} \right\}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \delta(\omega - \omega_1) q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega} = \langle \Phi_{\mathbf{k}\omega}^* \Phi_{\mathbf{k}'\omega'} \Phi_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}', \omega_1 - \omega'} \rangle.$$

Определяя отсюда  $Q$  и подставляя в (20), получим

$$\begin{aligned} (\omega - k_z v_z + \eta_{\mathbf{k}\omega}) P_{\mathbf{k}\omega} &= eT^{-1} (\omega + \omega_*) A f_0 \beta I_{\mathbf{k}\omega} - \\ &- \frac{c^2}{H^2} I_{\mathbf{k}\omega} \int \frac{\chi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \chi(\mathbf{k}'', \mathbf{k})}{\beta'' \beta'} A A' \frac{P_{-\mathbf{k}', -\omega'}}{\omega'' - k_z'' v_z + i\nu} d\mathbf{k}' d\omega' - \\ &- i \frac{c}{H} \frac{e}{T} f_0 \int \chi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{(\omega'' + \omega_*'') A' A''}{\omega'' - k_z'' v_z + i\nu} q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (22) \end{aligned}$$

где

$$\eta_{\mathbf{k}\omega}(v_z) = \frac{c^2}{H^2} \int \frac{\chi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \chi(\mathbf{k}'', -\mathbf{k}')}{\beta'' \beta} \frac{A'^2 I_{\mathbf{k}'\omega'}}{\omega'' - k_z'' v_z + i\nu} d\mathbf{k}' d\omega'. \quad (23)$$

Положительная величина  $\nu \rightarrow 0$  добавлена нами для правильного обхода полюсов.

Нетрудно видеть, что  $\text{Im} \eta > 0$ . Таким образом, учет взаимодействия между колебаниями автоматически приводит к дополнительному загуханию в  $P_{\mathbf{k}\omega}$  и, следовательно, к устранению полюса в  $P_{\mathbf{k}\omega}$  как функции от  $v_z$ . Составляя уравнение для четверной функции, нетрудно проследить, что аналогичная добавка должна появиться в уравнении (21) для  $Q$  и вообще во всех уравнениях для корреляционных функций. Поэтому вместо  $i\nu$  в уравнении (22) следовало бы писать  $\eta_{\mathbf{k}\omega}$ , но поскольку  $\eta_{\mathbf{k}\omega}$  само мало, то это обстоятельство оказывается совершенно несущественным, за исключением одного случая, который будет отмечен ниже.

Для нахождения  $q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega}$  представим  $\Phi_{\mathbf{k}\omega}$  (и соответственно  $\Psi_{\mathbf{k}\omega}$ ) в виде  $\Phi_{\mathbf{k}\omega} = \Phi_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} + \Phi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)}$ , где  $\Phi_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}$  относится к свободным колебаниям и удовлетворяет уравнениям (11а), (12а), а  $\Phi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)}$  описывает вынужденные колебания под действием «силы», которая дается квадратичным слагаемым в (9).

Подставляя в это слагаемое вместо  $\Phi$ ,  $\Psi$  их приближенные значения  $\Phi^{(0)}$ ,  $\Psi^{(0)}$ , получим при помощи (11), (12):

$$B_1 \Phi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} + B_2 \Psi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = i \frac{c}{H} \int M_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} \Phi_{\mathbf{k}'\omega'}^{(0)} \Phi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^{(0)} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (24)$$

$$-\alpha_0 \Phi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} + \Psi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = -i \frac{\omega}{sk_z^2 v_A^2} \frac{c}{H} \int N_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} \Phi_{\mathbf{k}'\omega'}^{(0)} \Phi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^{(0)} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (25)$$

откуда находим

$$D \Phi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = i \frac{c}{H} \int L_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} \Phi_{\mathbf{k}'\omega'}^{(0)} \Phi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^{(0)} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (26)$$

где  $D$  — детерминант системы уравнений (24), (25), а величина

$$L_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} = M_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} + \frac{B_2 \omega}{sk_z^2 v_A^2} N_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} = \frac{1}{n} \int \left\{ \frac{1}{\omega - k_z v_z + i\nu} + \frac{B_2 \omega}{sk_z^2 v_A^2} \right\} \times \\ \times \frac{\chi^i(\mathbf{k}, \mathbf{k}')(\omega'' + \omega_*'') f_0^i + \chi^e(\mathbf{k}, \mathbf{k}')(\omega'' - \omega_*'') f_0^e}{\omega'' - k_z'' v_z + i\nu} A' A'' dv_z. \quad (27)$$

Что касается  $\Psi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)}$ , то можно приближенно считать  $\Psi^{(1)} = \alpha_0 \Phi^{(1)}$ , поскольку  $\Psi^{(1)}$  и  $\Phi^{(1)}$  имеют резкий максимум при частоте, совпадающей с собственной.

Поскольку  $\Phi^{(1)}$  мы считаем малой величиной, то в (26) под  $D$  следовало бы понимать  $\text{Re } D$ . Но ввиду того, что при учете высших поправок собственные колебания  $\Phi^{(1)}$  должны были бы затухать, слева в (26)  $D$  следует заменить на  $D_+ = D_1 + \nu \partial D_1 / \partial \omega$ , где  $D_1 = \text{Re } D$ , а малая величина  $\nu > 0$  учитывает затухание  $\Phi^{(1)}$ .

С учетом этого замечания и того обстоятельства, что тройная корреляционная функция свободных колебаний равна нулю, получим

$$q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega} = i \frac{c}{H} \left\{ \frac{L_{\mathbf{k}''\omega'', \mathbf{k}\omega} + L_{\mathbf{k}'\omega'', -\mathbf{k}'-\omega'}}{D_+(\mathbf{k}'\omega'')} I_{\mathbf{k}\omega} I_{\mathbf{k}'\omega'} + \right. \\ \left. + \frac{L_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega} + L_{\mathbf{k}'\omega', -\mathbf{k}'-\omega''}}{D_+(\mathbf{k}'\omega')} I_{\mathbf{k}\omega} I_{\mathbf{k}'\omega''} - \frac{L_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} + L_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega''}}{D_+(\mathbf{k}\omega)} I_{\mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}'\omega''} \right\}. \quad (28)$$

Повторяя выкладки (24)–(26), можно исключить из (11), (12), (22) функции  $P_{\mathbf{k}\omega}^e$  и  $P_{\mathbf{k}\omega}^i$  и получить уравнение

$$D_\eta I_{\mathbf{k}\omega} = i \frac{c}{H} \int L_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega} d\mathbf{k}' d\omega' - (\Gamma_{\mathbf{k}\omega}^i + \Gamma_{\mathbf{k}\omega}^e) I_{\mathbf{k}\omega}, \quad (29)$$

где

$$\Gamma_{\mathbf{k}\omega}^i = -\frac{c^2}{H^2 n} \int \left\{ \frac{1}{\omega - k_z v_z + \eta_{\mathbf{k}\omega}} + \frac{B_2 \omega}{sk_z^2 v_A^2} \right\} \times \\ \times \frac{\chi^i(\mathbf{k}, -\mathbf{k}') \chi^i(\mathbf{k} + \mathbf{k}', \mathbf{k})(\omega' + \omega_*') AA'^2 f_0^i I_{\mathbf{k}'\omega'}}{\beta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}(\omega' - k_z' v_z + i\nu')(\omega + \omega' - (k_z + k_z')v_z + i\nu)} d\mathbf{k}' d\omega' d\mathbf{v}, \quad (30)$$

а выражение для  $\Gamma_{\mathbf{k}\omega}^e$  отличается от (30) только заменой индекса  $i$  на  $e$

и  $\omega_*$  на  $-\omega_*$ . Подставляя в (29) выражение (28), получим

$$\begin{aligned} \tilde{D}I_{\mathbf{k}\omega} &\equiv (D_\eta + \Gamma^i + \Gamma^e + \Gamma^0)I_{\mathbf{k}\omega} = \\ &= \frac{1}{D_+(\mathbf{k}\omega)} \frac{c^2}{2H^2} \int |l_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}|^2 I_{\mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} d\mathbf{k}' d\omega', \end{aligned} \quad (31)$$

где  $l_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} = L_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} + L_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}$ , а величина  $\Gamma^0$  дается соотношением:

$$\Gamma_{\mathbf{k}\omega}^0 = \frac{c^2}{H^2} \int \frac{l_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} l_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega}}{D_+(\mathbf{k}'\omega')} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} d\mathbf{k}' d\omega'. \quad (32)$$

В выражениях (29)–(31) величины  $\Gamma^e$ ,  $\Gamma^i$  появляются за счет второго слагаемого в (22), в которое вместо  $P_{-\mathbf{k}', -\omega'}$  мы подставили его приближенное значение, полученное из (22) при отбрасывании второго и третьего слагаемых в правой части. Величина  $D_\eta$  отличается от введенного ранее детерминанта  $D$  лишь тем, что в выражении (14) для функций  $Y$  бесконечно малая величина  $i\nu$  заменяется на  $\eta_{\mathbf{k}\omega}(v_z)$ . Величина  $\Gamma^0$  слева и правая часть (31) появляются за счет  $q_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega}$ .

Уравнение (31) описывает вынужденные колебания слабо турбулентной плазмы с дисперсионным соотношением, определяемым из условия  $\tilde{D} = 0$ , под действием источника шумов, интенсивность которого дается правой частью (31). Очевидно, что в равновесии уравнение  $\tilde{D} = 0$  должно описывать затухающие колебания, т. е.  $\tilde{D}_2 \partial \tilde{D}_1 / \partial \omega > 0$ , где  $\tilde{D}_1 = \text{Re } \tilde{D}$ ,  $\tilde{D}_2 = \text{Im } \tilde{D}$ . Так как  $\tilde{D}$  отличается от  $D$  на малую величину порядка отношения инкремента к частоте, то приближенно будем считать  $\tilde{D}_1 = D_1$ , т. е. пренебрежем сдвигом собственных частот за счет колебаний.

Поскольку  $\tilde{D}_2 \ll D_1$  и знак  $\tilde{D}_2$  совпадает со знаком  $\text{Im } D_+$ , то в правой части (31), являющейся малой, можно заменить  $D_+$  на  $\tilde{D}^*$ . Учитывая, что  $\tilde{D}_2 \ll \tilde{D}_1 \approx D_1$ , получим

$$I_{\mathbf{k}\omega} = K \left[ \left( \frac{\partial D_1}{\partial \omega} \right)^2 (\omega - \omega_{\mathbf{k}})^2 + \tilde{D}_2^2 \right]^{-1} \approx \left( \tilde{D}_2 \frac{\partial D_1}{\partial \omega} \right)^{-1} \pi K \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}), \quad (33)$$

где через  $K$  мы обозначили коэффициент при  $1/D_+(\mathbf{k}\omega)$  в правой части уравнения (31). Полагая  $I_{\mathbf{k}\omega} = I_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$ , приводим (33) к виду

$$\begin{aligned} \text{Im} (D_\eta + \Gamma^i + \Gamma^e + \Gamma^0) I_{\mathbf{k}} &= \left( \frac{\partial D_1}{\partial \omega} \right)^{-1} \frac{\pi c^2}{2H^2} \int |l_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}|^2 \times \\ &\times \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) I_{\mathbf{k}'} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} d\mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (34)$$

Уравнение (34) представляет собой искомое стационарное кинетическое уравнение для волн. Его можно значительно упростить, пользуясь тем обстоятельством, что нас интересуют, в основном, волны с фазовой скоростью  $\sim v_A$ , т. е.  $v_i \ll \omega/k_z \ll v_e$ . Отсюда следует, что в  $\text{Im } D_\eta$  можно пренебречь добавкой, связанной с  $\eta^e$ , поскольку  $\text{Im } \eta^e \sim \text{Im } \eta^i$ , но при разложении интеграла типа (14) в ряд перед  $\text{Im } \eta^e$  появляется малый множитель  $\sim \omega^2 / (k_z^2 v_e^2)$ . С другой стороны, то же самое условие позволяет в

выражении типа (14) для  $Y_\eta^i$  заменить  $f_0^i$  на  $\delta(v_z)$ , откуда получаем

$$\text{Im } D_\eta - \text{Im } D \approx -\beta \frac{\omega_*}{\omega} \text{Im } \eta_{v_z=0}^i = -\frac{\omega_*}{\omega_{\mathbf{k}}} \frac{\pi c^2}{H^2} \int \frac{\chi_i^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\beta''} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) I_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}'. \quad (35)$$

Аналогичное упрощение дает

$$\text{Im } \Gamma_{\mathbf{k}\omega}^i = \frac{\pi c^2}{H^2} \frac{C_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \int \frac{\chi_i^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\beta''} \left(1 + \frac{\omega'_*}{\omega_{\mathbf{k}'}}\right) \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) I_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}', \quad (36)$$

где

$$C_{\mathbf{k}} = \frac{\omega_* - \omega_{\mathbf{k}}}{\omega_* + \omega_{\mathbf{k}}} (1 - \beta) = \frac{1}{\alpha_0}.$$

Что касается  $\text{Im } \Gamma^{(e)}$ , то нетрудно показать, что при  $\zeta > 1$  оно значительно меньше  $\text{Im } \Gamma^i$ , а при  $\zeta < 1$  оно внешне того же порядка величины, но вклад в него дают лишь колебания с  $\zeta < 1$ . Как мы увидим ниже, интенсивность колебаний очень быстро спадает с  $\zeta$ , так что величиной  $\text{Im } \Gamma^e$  можно пренебречь. Аналогичная ситуация имеет место для  $l_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}$ . Нетрудно убедиться, что электроны дают сравнимый с ионами вклад в  $l_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}$  только в том случае, если одновременно  $\zeta < 1$  и  $\zeta' < 1$ , т. е. опять электронными членами можно пренебречь, так что

$$l_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} \approx l_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}^i = C_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^{-1} \chi^i(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \left( \frac{\omega''_*}{\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}} - \frac{\omega'_*}{\omega_{\mathbf{k}'}} \right). \quad (37)$$

Следует отметить, что при вычислении правой части (34) возникает трудность, связанная с тем, что в  $|l_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}|^2$  дает вклад как действительная, так и мнимая части  $l_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}^e$ , и при стремлении  $\nu$  к нулю  $|l_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}^e|^2$  стремится к бесконечности. Но если учесть, что вместо  $i\nu$  мы фактически всюду должны подставлять  $\eta$ , то можно показать, что вкладом от  $l_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}^e$  можно пренебречь.

Подставляя (35)–(37) в (34), заменяя в  $\Gamma^0$  переменную интегрирования и учитывая, что приближенно  $\partial D_1 / \partial \omega \approx -\beta \omega_* / \omega^2$ , получим окончательно:

$$\begin{aligned} & -\frac{H^2}{c^2 \sqrt{\pi}} \frac{\omega_*(\omega_* + \omega_{\mathbf{k}})}{v_e |k_z|} (1 - \beta) + \frac{H^2}{c^2 \sqrt{\pi}} \frac{\omega_*(\omega_* + \omega_{\mathbf{k}})}{v_i |k_z|} \beta \exp\left(-\frac{\omega^2}{k_z v_i^2}\right) + \\ & \quad + \frac{\omega_*^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \int \frac{\chi_i^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\beta''} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) I_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}' - \\ & \quad - \frac{C_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \int \frac{\chi_i^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\beta''} \omega_*(\omega'_* + \omega_{\mathbf{k}'}) \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) I_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}' + \\ & \quad + \frac{C_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \int C_{\mathbf{k}''} \frac{\chi_i^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\beta''} \frac{\omega_*(\omega_* \omega_{\mathbf{k}'} - \omega'_* \omega_{\mathbf{k}})^2}{\omega''_* \omega_{\mathbf{k}}^2} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) I_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}' = \\ & = \frac{C_{\mathbf{k}}^2}{2I_{\mathbf{k}} \beta} \int \frac{(\omega_* \omega_{\mathbf{k}'} - \omega'_* \omega_{\mathbf{k}})^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2 \omega_{\mathbf{k}'}^2} \chi_i^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) I_{\mathbf{k}'} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} d\mathbf{k}'. \quad (38) \end{aligned}$$

Здесь первые два члена возникают за счет линейного затухания Ландау, вторые два члена естественно определить как нелинейное затухание и, наконец, последнее слагаемое слева вместе с выражением справа описывает процессы распада волн на две и слияния двух волн в одну. За

исключением линейного затухания на ионах, которое пренебрежимо мало при  $\beta_0 \gg (m_e/m_i)^{1/3}$ , все слагаемые в (38) одного порядка величины, и следовательно, все они оказываются существенными при рассмотрении взаимодействия между колебаниями.

#### 4. Качественное исследование кинетического уравнения для волн

Из уравнения (38) следует, что  $I_{\mathbf{k}}$ , как функция  $k_z$ , должна иметь максимум при том значении  $k_z$ , которое соответствует  $\zeta = 1$ . Действительно, при увеличении  $k_z$  уменьшается первое слагаемое, описывающее раскачку колебаний электронами, и поэтому амплитуда колебаний должна убывать с  $k_z$ . С другой стороны, при уменьшении  $\zeta < 1$  начинает быстро убывать  $\omega_{\mathbf{k}}$  перед интегральными членами в левой части (38), и поэтому при  $\zeta < 1$  функция  $I_{\mathbf{k}}$  должна убывать как  $\omega_{\mathbf{k}}^2 \sim \zeta^4$ .

Сходная картина имеет место и в отношении зависимости от  $k_{\perp}$ . Учитывая, что при малых  $k_{\perp}\rho$  величина  $C_{\mathbf{k}} \approx 1$  при  $k_z > \omega_*/v_A$  и  $C_{\mathbf{k}} \approx 1/s$  при  $k_z < \omega_*/v_A$ , нетрудно убедиться, что при  $k_{\perp} \rightarrow 0$  функция  $I_{\mathbf{k}}$  убывает линейно с  $k_{\perp}$  в области  $k_z > \omega_*/v_A$  и  $I_{\mathbf{k}} \sim 1/k_{\perp}$  при  $k_z < \omega_*/v_A$ . А так как при  $k_{\perp} \rightarrow 0$  область интегрирования  $k_z < \omega_*/v_A$  стягивается в точку, то колебания в этой области не играют никакой роли, и  $I_{\mathbf{k}}$  можно считать убывающей функцией  $k_{\perp}$  при малых  $k_{\perp}\rho$ .

Чтобы выяснить характер поведения  $I_{\mathbf{k}}$  при больших  $k_{\perp}\rho$ , необходимо знать конкретный вид  $\chi_i^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ . Из (10) видно, что функция  $\chi_i^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  полностью симметрична относительно  $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''$ . При больших  $k_{\perp}\rho, k'_{\perp}\rho$  интеграл в (10) можно вычислить методом перевала. Для случая  $k'/k \ll 1$ , например, такое вычисление дает:

$$\chi_i^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \approx \frac{s'}{2\pi\rho^4} \sin^2(\alpha - \alpha') e^{-s'} I_0^2 \left[ \frac{1}{2} s' \cos(\alpha - \alpha') \right]. \quad (39)$$

При  $s' \gg 1$  это выражение принимает вид

$$\chi_i^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \approx (\alpha - \alpha')^2 \exp \left[ -\frac{1}{2} s' (\alpha - \alpha')^2 \right] \frac{1}{2\pi^2 \rho^4}.$$

Интегрирование по углам этой функции приводит к зависимости  $\langle \chi_i^2 \rangle \sim (k'\rho)^{-3}$ , т. е. к очень быстрому убыванию с ростом  $k'$ . Таким образом, при  $k_{\perp}\rho \gg 1$  в интегральных членах (38) основной вклад должны давать те области интегрирования, где либо  $k'\rho$ , либо  $k''\rho$  порядка единицы. При этом у интегралов в левой части (38) вклад от области  $k''\rho \sim 1$  значительно меньше, чем соответствующий вклад от области  $k'\rho \sim 1$ . Действительно, первые два интеграла в левой части (38) в области  $k''\rho \sim 1$ , т. е. при  $k \approx k'$ , компенсируют друг друга, а последний интеграл, взятый по области  $k''\rho \sim 1$ , мал, поскольку при этом  $\beta'' \sim 1$ , а не малая величина, как в случае  $k'\rho \sim 1$ .

Далее, из (38) видно, что при больших  $k\rho$  процессы распада не играют роли. Действительно, при  $k'/k \ll 1$  в интеграле в левой части можно считать  $\omega_*/\omega_*'' \approx 1$ , а в интеграле справа можно считать  $I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \approx I_{\mathbf{k}}$  и вынести  $I_{\mathbf{k}}$  из-под интеграла, удваивая результат, чтобы учесть возможность  $k''\rho \sim 1$ . В этом приближении интегралы взаимно компенсируются.

Таким образом, в области больших  $k_{\perp}\rho$  взаимодействие между волнами с волновыми числами одного порядка оказывается пренебрежимо малым, и остается только взаимодействие с длинноволновыми колебаниями, которое описывается первыми двумя интегральными членами в левой части уравнения (38). При больших  $k_{\perp}\rho$  первый из них превышает второй и растет как  $k^3$ , поскольку  $\beta'' \sim 1/k$ . При достаточно больших  $k\rho$  он превышает первое слагаемое, описывающее раскачку волн электронами. Другими словами, наличие колебаний в области  $k_{\perp}\rho \sim 1$  приводит к тому, что все коротковолновые колебания становятся затухающими. А поскольку распадная диффузия волн в области больших волновых чисел мало эффективна, то все коротковолновые колебания будут подавлены.

Таким образом, спектральная функция  $I_{\mathbf{k}}$  в зависимости от  $k_{\perp}$  должна иметь максимум при  $k_{\perp}\rho \sim 1$ , довольно быстро убывая при  $k_{\perp} \rightarrow \infty$ .

Поскольку при  $k_{\perp}\rho \sim 1$  все функции в (38) имеют сложный характер, то определение  $I_{\mathbf{k}}$  наталкивается на значительные трудности. Тем не менее, уравнение (38) позволяет оценить интеграл от спектральной функции, через который выражается коэффициент турбулентной диффузии. Для этого умножим (38) на  $I_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$  и проинтегрируем его по  $\mathbf{k}$ . Нетрудно видеть, что при таком интегрировании распадные члены выпадают. Пренебрегая ионным затуханием и малыми величинами  $\beta$  и  $\omega_{\mathbf{k}}/\omega_*$ , а также симметризуя интегральные члены, получим следующее интегральное соотношение:

$$\frac{H^2}{c^2\sqrt{\pi}v_e} \int \frac{\omega_*^2}{|k_z|} I_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = \frac{1}{2} \int \frac{(\omega_* - \omega'_*)^2}{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}} \frac{\chi_i^2(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\beta''} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) I_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k} d\mathbf{k}'. \quad (40)$$

В левой части этого уравнения стоит как раз необходимый нам интеграл (ср. с (43)). Уравнение (40) можно интерпретировать, как равенство сил «трения», оказываемых со стороны колебаний соответственно на электроны и ионы. Поскольку распадные члены выпали, то это значит, что они не дают вклада в силу трения для ионов.

Поскольку  $I_{\mathbf{k}}$  обладает четко выраженным максимумом при  $\zeta = 1$ , т. е. при  $k_z = \varkappa\sqrt{\beta_0}/(2\sqrt{2})$ , то в выражении (40) можно положить приближенно  $\zeta = 1$ . В интеграле справа, в который основной вклад вносит область интегрирования вблизи  $\alpha$ ,  $\alpha' = \pi/2, 3\pi/2$ , можно приближенно считать  $\omega_{\mathbf{k}} = v_0 \sin \alpha / (4\sqrt{2}\pi\rho)$ . Будем считать  $I_{\mathbf{k}}$  изотропной в поперечном направлении. Тогда, подставляя в (40) приближенное значение для  $\chi_i^2 \approx \sin^2(\alpha - \alpha') / (2\pi^2\rho^4)$ , нетрудно произвести интегрирование по углам. Интегрирование  $\delta$ -функции по  $\alpha'$  дает  $\sin \alpha = \sin \alpha'$ , откуда  $\alpha' = \pi - \alpha$ , и затем интегрирование по  $\alpha$  проводится элементарно. Полагая  $\beta'' \approx 1/(2\sqrt{2}\pi\rho k'')$ , мы получим в правой части (40) интеграл вида

$$\int (k - k')^2 k'' I_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k} d\mathbf{k}',$$

который приближенно можно заменить на выражение

$$\frac{A}{\rho} \left\{ \int k^2 I_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \right\}^2,$$

где  $A$  — числовой множитель порядка  $10^{-1}$ .

Подставляя это выражение в соотношение (40), находим приближенное значение необходимого нам интеграла:

$$\int k^2 I_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = \frac{3\pi^2}{2^7 A} \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta_0}} \frac{T^2 \varkappa^2}{e^2} \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta_0}} \frac{T^2 \varkappa^2}{e^2}. \quad (41)$$

Учитывая, что флуктуация плотности  $n'$  связана с флуктуацией потенциала соотношением  $n' = e\varphi'/T$ , получим отсюда

$$\left\langle \left( \frac{n'}{n} \right)^2 \right\rangle \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta_0}} \varkappa^2 \rho^2, \quad (42)$$

что и следовало ожидать, поскольку возмущение плотности производится смещением плазмы на расстояние  $\sim \rho$ .

## 5. Коэффициент турбулентной диффузии

С помощью уравнения (2) для усредненной функции распределения нетрудно найти выражение для диффузионного потока. При этом можно пользоваться либо ионным, либо электронным уравнением — оба они дают в точности один и тот же результат. Практически удобнее пользоваться электронным уравнением. Действительно, при выводе уравнения (38) было установлено, что электронным вкладом в нелинейные члены можно пренебречь. Это означает, что и в усредненном уравнении (2) для электронов можно пренебречь всеми нелинейными членами, за исключением квадратичного. Таким образом, в данной задаче для электронов оказывается справедливым квазилинейное приближение [6].

Умножая уравнение (2) для электронов на  $v_y$  и интегрируя его затем по  $\mathbf{v}$ , находим поток электронов вдоль градиента плотности, а следовательно, и коэффициент турбулентной диффузии:

$$D_{\perp} = \frac{\sqrt{\pi} c^2}{H^2 v_e} \int \frac{\alpha_0 k_y^2}{|k_z|} \left( 1 + \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_*} \right) (1 - \beta) I_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \quad (43)$$

Если пренебречь здесь малыми величинами  $\beta$ ,  $\omega_{\mathbf{k}}/\omega_*$  и подставить найденное выше выражение для интеграла от спектральной функции, то получим приближенно

$$D_{\perp} \approx \frac{m_e \rho^2 v_i \varkappa}{m_i \beta_0}. \quad (44)$$

Таким образом, в рассматриваемом нами случае  $m_e/m_i \ll \beta_0 \ll (m_e/m_i)^{1/3}$  коэффициент турбулентной диффузии не зависит от магнитного поля.

## 6. Обсуждение результатов

Итак, в настоящей работе исследована турбулентная диффузия бесстолкновительной плазмы в сильном магнитном поле. Показано, что характер переноса колебательной энергии по спектру существенно отличается от механизма переноса энергии в обычной турбулентной жидкости. А именно, если в обычной гидродинамике происходит дробление вихрей и превращение их в пульсации более мелкого масштаба с сохранением полной энергии, так что имеет место постоянный поток энергии по спектру,



то в турбулентной бесстолкновительной плазме наряду с подобного рода диффузией энергии в пространстве волновых чисел, описываемой при помощи распадов, весьма существенным является дополнительное затухание волн, которое естественно назвать нелинейным затуханием Ландау.

Как видно из формул (22), (23), это затухание возникает благодаря взаимодействию между волнами  $\mathbf{k}\omega$ , и  $\mathbf{k}'\omega'$  через резонансные частицы, продольная скорость которых совпадает с «фазовой скоростью» биений на этих двух волнах, т. е.  $v_z = (\omega - \omega')/(k_z - k'_z)$ . Нелинейное затухание волн на волнах приводит к тому, что спектральная функция довольно быстро убывает при удалении от области максимального инкремента, где имеет место максимальная подпитка волн со стороны основного состояния.

Для простоты мы ограничились случаем однородного магнитного поля. Качественно нетрудно проследить, к чему должна приводить неоднородность. Наиболее существенное влияние на дрейфовые волны оказывает перекрещенность силовых линий. Этот эффект, детально проанализированный Михайловским и Галеевым, качественно может быть описан следующим образом. Будем характеризовать перекрещенность линий параметром  $\theta = 1/(\kappa L)$ , где  $L$  — такая длина плазменного шнура, что отнесенный к ней угол вращательного преобразования изменяется поперек шнура на величину порядка единицы. Тогда проекция  $k_{\parallel}$  волнового вектора на вектор магнитного поля будет изменяться как  $k_{\parallel} \approx \theta k_{\perp} \kappa x$  при удалении на расстояние  $x$  от точки, где шаг возмущения совпадает с шагом силовых линий. Но как только  $k_{\parallel}$  становится порядка  $\kappa/10$ , дрейфовая волна начинает поглощаться за счет затухания на ионах [1].

Таким образом, амплитуда произвольного волнового пакета нарастает лишь до тех пор, пока он остается локализованным на длине  $\Delta x \sim 1/(10k_{\perp}\theta)$ , т. е. в течение промежутка времени  $\Delta t \sim \Delta x/u$ , где  $u \sim \omega/k_{\perp}$  — групповая скорость. После этого пакет попадает в область сильного затухания и исчезает. В результате, в линейном приближении при  $\theta > \rho\kappa$  неустойчивость имеет место только при наличии точек поворота, когда волновой пакет отгорожен «потенциальными» барьерами от области затухания.

Рассмотрим теперь влияние перекрещенности силовых линий на развитые колебания. Наличие областей поглощения в этом случае приводит к диффузии волн по  $x$ , и этот эффект может быть учтен в кинетическом уравнении для волн членом типа  $u \partial I_{\mathbf{k}} / \partial x$  [5]. Диффузия волн в область поглощения приводит к уменьшению эффективного инкремента на величину  $\sim (1 - R)u/\Delta x \sim 10(1 - R)\omega\theta$ , где  $R$  — коэффициент отражения от «потенциальных» барьеров, если таковые имеются. А так как инкремент в рассматриваемом нами случае  $\gamma \sim \omega \sqrt{m_e/m_i} \kappa/k_{\parallel}$ , то эффект перекрещенности можно учесть в амплитуде колебаний и коэффициенте диффузии дополнительным множителем  $\sim [1 - (1 - R)\theta \sqrt{m_i/m_e}]$ .

Таким образом, при  $\theta \gtrsim (1 - R)^{-1} \sqrt{m_e/m_i}$  аномальная диффузия должна исчезнуть. При меньших значениях  $\theta$  наличие перекрещенности приводит лишь к уменьшению  $D_{\perp}$ , и в этом случае можно различать неустойчивость по отношению к бесконечно малым и конечным возмущениям. Если конечное возмущение задать в виде набора волновых пакетов, то при наличии взаимодействия между волнами отдельный пакет, прежде чем попасть в область затухания, благодаря рассеянию может породить волну,

идущую в противоположном направлении, и этот процесс вполне аналогичен отражению от потенциального барьера.

Таким образом, плазма в неоднородном магнитном поле, устойчивая в линейном приближении, может оказаться неустойчивой по отношению к возмущениям конечной амплитуды. При переходе к таким конечным возмущениям изменяется и сама постановка задачи об устойчивости: ввиду наличия взаимодействия между волнами отыскание собственных функций, отвечающих определенному асимптотическому поведению при  $t \rightarrow \infty$ , отступает на второй план, а вместо этого необходимо проследивать за поведением волновых пакетов в течение ограниченных промежутков времени  $\Delta t \sim 1/\gamma$ . Именно по этой причине при  $\kappa\rho \ll 1$  вполне оправдано использованное нами разложение не по собственным функциям линейной задачи, а в простые интегралы Фурье.

В заключение сделаем одну оговорку. Всюду выше мы считали, что распределение частиц по скоростям максвелловское. На самом деле колебания приводят к искажению  $f(v)$ , но, как показывают оценки, этим искажением можно пренебречь при  $D_{\perp} \kappa^2 < \nu_i$ , где  $\nu_i$  — частота ионных столкновений.

#### Список литературы

1. Кадомцев Б.Б., Тимофеев А.В. // ДАН СССР. 1962. Т. 146. С. 581.
2. Рудаков Л.И., Сагдеев Р.З. // ДАН СССР. 1961. Т. 138. С. 581.
3. Михайловский А.Б., Рудаков Л.И. // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. С. 912.
4. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 2234.
5. Кадомцев Б.Б. // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 1688.
6. Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. // Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 82.

## ВОЛНЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ \*)

Показано, что неравновесные прозрачные среды могут обладать аномальной дисперсией, и в этом случае энергия монохроматической электромагнитной волны может быть отрицательной, т. е. энергия среды с волной оказывается меньше энергии среды в отсутствие волны. Отрицательность энергии приводит к ряду своеобразных эффектов при распространении и взаимодействии волн.

Как известно [1], энергия монохроматической электромагнитной волны с частотой  $\omega$  и в диспергирующей изотропной прозрачной среде с магнитной проницаемостью  $\mu = 1$  дается выражением \*\*)

$$U = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{d}{d\omega} (\varepsilon\omega) \langle E \rangle^2 + \langle H \rangle^2 \right], \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость. В частном случае продольных колебаний ( $H = 0$ ), которым мы и ограничимся ниже, энергия волны пропорциональна производной  $d\varepsilon/d\omega$  и, следовательно, знак энергии зависит от того, обладает ли данная среда нормальной ( $d\varepsilon/d\omega > 0$ ) или аномальной ( $d\varepsilon/d\omega < 0$ ) дисперсией.

В термодинамически равновесной среде область прозрачности, как это следует из дисперсионных соотношений Кронига–Крамерса, является вместе с тем и областью нормальной дисперсии [1], и, следовательно, в такой среде  $U > 0$ . В термодинамически неравновесных средах соотношения Кронига–Крамерса в их обычной форме, вообще говоря, не справедливы, так как у  $\varepsilon$  могут появиться полюсы на действительной оси  $\omega$ , которые соответствуют незатухающим колебаниям тока в отсутствие электрического поля. В таких средах теряет силу и утверждение о положительности  $d\varepsilon/d\omega$ .

Указанные среды могут обладать отрицательной дисперсией в области прозрачности, и соответствующие волны будут иметь отрицательную энергию.

Примером такой среды может служить плазма в магнитном поле, либо неизотропная (с пучками), либо неоднородная в пространстве. Например, диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы с холодными электронами при сильно анизотропном распределении ионов по

\*) Кадомцев Б.Б., Михайловский А.Б., Тимофеев А.В. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. Вып. 6(12). С. 2266–2268.

\*\*) Это выражение остается справедливым и при наличии пространственной дисперсии.

скоростям ( $T_{\parallel}/T_{\perp} \rightarrow 0$ ) вблизи  $n$ -й гармоники циклотронной частоты ионов  $\Omega_i = eH/(Mc)$  имеет вид [2]

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{k_z^2}{k^2} - \frac{\Omega_0^2 \zeta_n}{(\omega - n\Omega_i)^2} \frac{k_z^2}{k^2}, \quad (2)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}, \quad \Omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{M}, \quad \zeta_n = I_n(x) e^{-x}, \quad x = \frac{k_{\perp}^2 T_{\perp}}{M\Omega_i^2},$$

$k$  — волновое число,  $k_z$  — проекция волнового вектора на направление внешнего магнитного поля,  $I_n$  — функция Бесселя от мнимого аргумента индекса  $n$ . Как мы видим, при частоте  $\omega$ , несколько меньшей  $\Omega_i$ ,  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} < 0$ , т. е. соответствующая волна обладает отрицательной энергией.

Другой пример представляет неоднородная плазма с максвелловским распределением электронов и ионов по скоростям в сильном магнитном поле. Диэлектрическая проницаемость такой плазмы вблизи  $n$ -й гармоники ионной циклотронной частоты при поперечном распространении ( $k_z = 0$ ) дается соотношением [3]

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_0^2 m}{Tk^2} \left(1 - \frac{\omega^*}{\omega}\right) \left(1 - \frac{\omega \zeta_n}{\omega - n\Omega_i}\right), \quad (3)$$

где  $\omega^* = kv_0$ ,  $v_0$  — скорость дрейфа электронов, направленная поперек градиента плотности и равная  $v_0 = \frac{T|\nabla n_0|}{M\Omega_i n_0}$ . Согласно (3), дисперсия вблизи  $\omega = n\Omega_i$  становится отрицательной при  $\omega < \omega^*$ .

Отрицательность энергии волн приводит к целому ряду своеобразных особенностей при взаимодействии таких волн с веществом и с другими волнами.

Например, введение обычной диссипации, соответствующей поглощению энергии (в выражениях (2), (3) в качестве такой диссипации может служить не учтенное нами затухание Ландау на электронах или столкновения электронов с атомами нейтрального газа), приводит не к убыванию, а к нарастанию амплитуды волны со временем. Действительно, энергия колебаний поглощается средой, если положительна проводимость  $\sigma = \frac{\omega}{4\pi} \varepsilon'' \equiv \frac{\omega}{4\pi} \text{Im} \varepsilon$ , и из выражения для декремента затухания волны  $\gamma = \varepsilon'' \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega}\right)^{-1}$  видно, что в среде с отрицательной дисперсией поглощение приводит к отрицательному декременту.

Аналогичный эффект усиления возникает при отражении волны от границы сред с дисперсией разного знака. Например, обычная волна усиливается при отражении от среды с отрицательной дисперсией, когда во вторую среду уходит волна с отрицательной энергией. Этот эффект проще всего обнаруживается при отражении звуковой волны (которую можно рассматривать как продольную электромагнитную волну) от тангенциального разрыва, т. е. от границы с такой же средой, движущейся со скоростью  $V$ .

Так как при переходе от сопутствующей системы координат к лабораторной частота колебаний  $\omega$  переходит в  $\omega + kV$ , то в случае сверхзвуко-

вого потока ( $V > c_s = \sqrt{T/M}$ ) частота распространяющейся против потока волны меняет знак и ее энергия становится отрицательной (см. [4]). Поэтому при отражении звуковой волны от сверхзвукового потока, как нетрудно проверить, амплитуда волны может увеличиваться. Более того, при  $V > 2c_s$  коэффициент отражения при определенном угле падения обращается в бесконечность, т. е. падающая волна может отсутствовать, и, следовательно, оказывается возможным парное рождение волн с положительной и отрицательной энергиями. При этом от границы раздела в обе стороны распространяются две уходящие волны.

Такое рождение особенно просто выглядит в системе координат, в которой один поток движется со скоростью  $v_0 = V/2$ , а второй — со скоростью  $-v_0$  вдоль оси  $x$ . В этой системе координат случай парного рождения соответствует волнам с частотой  $\omega = 0$  и отношением компоненты волнового вектора вдоль нормали  $k_y$  к компоненте  $k_x$ , равным  $k_y/k_x = c_s/v_0$ . Другими словами, при этом происходит черенковское излучение звуковых волн возмущенной поверхностью раздела. Мощность этого излучения пропорциональна квадрату амплитуды возмущения поверхности и может быть произвольной.

Аналогичный эффект парного рождения волн возможен также в бесконечной покоящейся плазме. Он возникает, когда дисперсионное уравнение  $\varepsilon(\omega) = 0$  имеет кратные корни и, следовательно, существуют решения с линейно растущей со временем амплитудой.

Поскольку знак энергии (соответственно и знак дисперсии) зависит от системы координат, то в некоторых случаях эффект отрицательности энергии является несущественным и может быть устранен переходом в другую систему отсчета. (При таком переходе изменяется и знак проводимости  $\sigma = \omega\varepsilon''/4\pi$ , поскольку декремент  $\gamma$  инвариантен относительно галилеевых преобразований.) Но если мы имеем дело с несколькими потоками, разделенными в пространстве или взаимопроникающими, то изменение знака энергии за счет движения приводит к вполне реальным эффектам.

В частности, вполне определенный физический смысл может иметь эффект изменения знака проводимости.

Рассмотрим, например, слабоионизованную плазму в продольном электрическом поле. Если направленная (токовая) скорость электронов  $V$  значительно меньше их тепловой скорости, то электронная проводимость в системе координат, движущейся вместе с электронами,  $\sigma_0 = \omega'\varepsilon''/4\pi$ , практически не зависит от скорости  $V$  и при условии  $\omega \ll \nu_e$  может считаться постоянной ( $\omega' = \omega + kV$  — частота в движущейся системе координат,  $\nu_e$  — частота столкновений электронов с атомами нейтрального газа). Следовательно, в лабораторной системе координат

$$\sigma = \frac{\omega}{4\pi} \varepsilon'' = \frac{\omega}{\omega + kV} \sigma_0 \quad (4)$$

(мы учли, что при переходе от одной системы координат к другой величина диэлектрической проницаемости не изменяется).

Соотношение (4) было получено Герценштейном и Пустовойтом [5] при помощи прямых вычислений в лабораторной системе координат. Согласно (4), проводимость меняет знак, когда скорость  $V$  становится больше фазовой скорости волны  $\omega/k$ . Изменение знака проводимости может привести

к раскачке волн с положительной энергией, но сами эти волны существуют только в том случае, если имеется реальное различие средних скоростей электронов и ионов.

Отрицательность энергии может проявиться и при нелинейном взаимодействии волн. При этом также может иметь место эффект возрастания амплитуды волны с отрицательной энергией за счет нелинейной передачи энергии обычным волнам, а также обратный ему эффект затухания волны за счет отбора энергии от обычных волн.

### *Список литературы*

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1957. С. 320, 338.
2. Киценко А.Б., Степанов К.Н. // ЖТФ. 1961. Т. 31. С. 176.
3. Михайловский А.Б., Тимофеев А.В. // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. С. 919.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. — М.: Гостехиздат, 1951. С. 226.
5. Герценштейн М.Е., Пустовойт В.И. // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 536.

## PLASMA TURBULENCE

### General topics \*)

#### 1. Introduction

It is known that under experimental conditions plasma often shows chaotic motion. Such motion, when many degrees of freedom are excited to levels considerably above the thermal level, will be called turbulent. The properties of turbulent plasma in many respects differ from the properties of laminar plasma. It can be said that the appearance of various anomalies in plasma behaviour indicates the presence of turbulence in plasma. In order to verify directly the presence of turbulent motion in plasma we must, however, measure the fluctuation of some microscopic parameters in plasma. Let us suppose that we introduce two electric probes in the plasma at  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{r}'$ . Then we can measure the fluctuation of the electric potential of these probes  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  and  $\varphi(\mathbf{r}', t')$ . Using special electronic devices we can average  $\varphi(\mathbf{r}, t)\varphi(\mathbf{r}', t')$  and determine the correlation function of the electric fields in two points at different moments of time. If plasma is stationary and homogeneous in the average, then this relation function depends only upon the differences  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  and  $(t - t')$ . Instead of this correlation function it is more convenient to use its Fourier transform  $I_{\mathbf{k}\omega}$ , so that

$$\langle \varphi(\mathbf{r}, t)\varphi(0, 0) \rangle = \int [\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})] I_{\mathbf{k}\omega} d\mathbf{r} d\omega.$$

It is this function that should be determined by the theory.

By measuring the correlation function  $\langle \varphi(\mathbf{r}, t)\varphi(\mathbf{r}', t') \rangle$  one can directly establish whether the turbulence is strong or weak. Weak turbulence represents a group of weak interacting waves. In the case of weak turbulence, only one eigen-frequency corresponds to each wave number so that in the  $k, \omega$  space, the intensity of oscillation is located in the vicinity of  $\omega = \omega_k$ , as shown in Fig. 1. In other words,

$$I_{\mathbf{k}\omega} = I_{\mathbf{k}}\delta(\omega - \omega_k).$$

Respectively, only one  $\mathbf{k}$  corresponds to each given  $\omega$  and, therefore, if we measure the correlation function of the potential for a given frequency  $\langle \varphi_{\omega}(\mathbf{r})\varphi_{\omega}(\mathbf{r} + \mathbf{x}) \rangle$  in relation to the distance between two probes we must obtain a nearly periodic function corresponding to one  $k$ . If the interaction between different waves increases, the dependence of  $I_{\omega x}$  on  $\omega$  spreads out and the turbulence tends to be strong, see Fig. 2.

\*) INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY. VIENNA, 1965. P. 543-554.

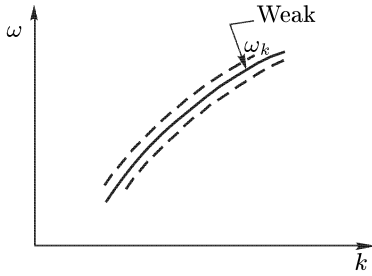


Fig. 1. Weak turbulence. The intensity of oscillation is located in the vicinity of  $\omega = \omega_k$

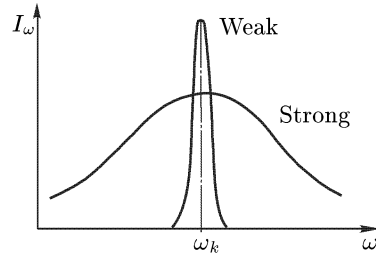


Fig. 2. The interaction between different waves increases, the dependence of  $I_{\omega x}$  on  $\omega$  spreads out

At present, we have a precise theory only for the weak turbulence of plasma, when perturbation methods can be used. A short survey of this theory will be given and then the strong turbulence will be discussed.

## 2. Thermal fluctuations in plasma

The turbulent fluctuations develop only in plasma not in thermodynamic equilibrium. This non-equilibrium may be caused either by non-homogeneity of plasma or by distribution-function anisotropy in space velocity. In equilibrium plasma these fluctuations cannot be distinguished from the usual thermal noises. It is therefore obvious that the complete theory should cover both the weak turbulence and thermal fluctuations. Let us first consider the case of thermal fluctuations in stable plasma. It is known that the Vlasov kinetic equation

$$\frac{\partial f_m}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f_m + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial f_m}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1)$$

is an exact equation for the microscopic distribution function

$$f_m = \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j).$$

The summation is made for the particles of a given species.

Let us split this function into two parts

$$f_m = f_0 + f,$$

where  $f_0$  is a function averaged over small macroscopic volumes and  $f$  is the fluctuating part. If we neglect the collisions, then in the absence of external magnetic fields the particles move freely under  $\mathbf{v} = \text{const}$ , and  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$ . Noting by  $f^\mu$  the part of  $f$ , corresponding to non-interacting particles, we shall obtain

$$\langle f^\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f^\mu(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}[t - t']) f_0(\mathbf{v}). \quad (2)$$

In Fourier representation this relation has the form

$$\langle f_{\mathbf{k}\omega}^\mu(\mathbf{v}) f_{\mathbf{k}'\omega'}^\mu(\mathbf{v}') \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{f_0(\mathbf{v})}{(2\pi)^3}, \quad (3)$$



where  $f_{\mathbf{k}\omega}^\mu$  is the Fourier component of

$$f^\mu = \int f_{\mathbf{k}\omega}^\mu \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\omega d\mathbf{k}. \quad (4)$$

In addition to  $f^\mu$  the fluctuations of the distribution function contain that part which corresponds to the electric field fluctuations. If the magnitude of these fluctuations is small enough, we may linearize the kinetic equation (1), so that in the Fourier representation we obtain

$$f_{\mathbf{k}\omega} = (\bar{g}_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{k}) f_0 \varphi_{\mathbf{k}\omega} + f_{\mathbf{k}\omega}^\mu, \quad (5)$$

where

$$\bar{g}_{\mathbf{k}\omega} = \mathbf{g}(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu)^{-1} \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}. \quad (6)$$

Here the small positive quantity  $\nu$  is introduced to ensure a proper choice of integration contour. Inserting the expression (5) for  $f_{\mathbf{k}\omega}$  in the Poisson equation

$$k^2 \varphi_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi e \int f_{\mathbf{k}\omega} d\mathbf{k} d\omega \quad (7)$$

we obtain

$$\varepsilon(\mathbf{k}\omega) \varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi e}{k^2} \int f_{\mathbf{k}\omega}^\mu d\mathbf{k} d\omega, \quad (8)$$

where  $\varepsilon$  is the plasma dielectric constant

$$\varepsilon(\mathbf{k}\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{(\partial f_0 / \partial \mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu}. \quad (9)$$

Thus, in the case of small level fluctuations, when the linearization of the Vlasov equation is justified, the intensity of thermal fluctuations in plasma may be found by squaring and averaging the relation (8) using (3), namely

$$I_{\mathbf{k}\omega} = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{k^4 |\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \int f(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (10)$$

The quantity  $I_{\mathbf{k}\omega}$  takes into account both the short-distance fluctuations ( $kD > 1$ ) and the long-distance wave fluctuations ( $kD < 1$ ). In the long wave length region ( $kD \ll 1$ ) the imaginary part  $\varepsilon'' = \text{Im } \varepsilon$  is small, so that

$$\frac{1}{|\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} = \frac{1}{|\varepsilon'|^2 + |\varepsilon''|^2} \approx \frac{1}{|\varepsilon'|^2} \pi \delta(\varepsilon'),$$

where  $\varepsilon' = \text{Re } \varepsilon$ . In this region  $I_{\mathbf{k}\omega} = I_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_k)$ , where according to (10) the quantity  $I_{\mathbf{k}}$  is given by

$$I_{\mathbf{k}} = \frac{2e^4}{k^4 |\gamma|} \left( \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \right)^{-2} \int f(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v}; \quad (11)$$

here  $\gamma$  means the rate of plasma waves damping:

$$-\gamma = \varepsilon'' \left( \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \right)^{-1}. \quad (12)$$

As we see from (11), when approaching unstable situations ( $\gamma \rightarrow 0$ ) the intensity of thermal fluctuations tends to infinity, and therefore weak turbulence must develop in plasma.

### 3. Kinetic equation for waves

To describe the weak turbulent fluctuations, it is necessary to retain non-linear terms in the kinetic equations (1). Splitting these equations into two parts by using the averaging operation, for the case of stationary fluctuations we obtain:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f_0 = S_{ef} = -i\frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k} \langle \varphi_{\mathbf{k}'\omega'}^* f_{\mathbf{k}\omega} \rangle d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\omega d\omega', \quad (13)$$

$$f_{\mathbf{k}\omega} = f_{\mathbf{k}\omega}^\mu + (\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega})f_0\varphi_{\mathbf{k}'\omega'} + \int (\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}\mathbf{k}')(\varphi_{\mathbf{k}'\omega'}f_{\mathbf{k}''\omega''} - \langle \varphi_{\mathbf{k}'\omega'}f_{\mathbf{k}''\omega''} \rangle), \quad (14)$$

where  $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$  and  $\omega - \omega' = \omega''$ . The term  $S_{ef}$  may be considered as a collision term.

If the amplitude of electrical potential oscillations  $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$  is small enough we may use the series expansion for  $f_{\mathbf{k}\omega}$ . This series may be obtained by iteration of expression (14), namely

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{k}\omega} &= f_{\mathbf{k}\omega}^\mu + (\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}\mathbf{k})f_0\varphi_{\mathbf{k}\omega} + \\ &+ \int (\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}\mathbf{k}')(\mathbf{g}_{\mathbf{k}''\omega''})f_0R\varphi_{\mathbf{k}'\omega'}\varphi_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega + \int (\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}\mathbf{k}')(\mathbf{g}_{\mathbf{k}''\omega''}\mathbf{k}_1) \times \\ &\times (\mathbf{g}_{\mathbf{k}''-\mathbf{k}_1, \omega''-\omega_1}(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}_1)f_0R\varphi_{\mathbf{k}'\omega'}\varphi_{\mathbf{k}_1\omega_1}\varphi_{\mathbf{k}''-\mathbf{k}_1, \omega''-\omega_1}) d\mathbf{k} d\omega d\mathbf{k}_1 d\omega_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Here  $R$  means the subtractions of averaged values, as shown below:

$$R\varphi\psi = \varphi\psi - \langle \varphi\psi \rangle, \quad R\varphi\psi\eta = \varphi\psi\eta - \varphi\langle \psi\eta \rangle - \langle \varphi\psi\eta \rangle, \dots$$

If we now insert this expression for  $f_{\mathbf{k}\omega}$  in Eq. (7), then in addition to the terms written before we obtain non-linear terms of the  $\varphi\varphi$ ,  $\varphi\varphi\varphi$  type, namely

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}\omega)\varphi_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{4\pi e}{k^2} \int f_{\mathbf{k}\omega}^\mu d\mathbf{k} d\omega + \int V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} R\varphi_{\mathbf{k}'\omega'} \varphi_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega' + \\ &+ \int M_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} R\varphi_{\mathbf{k}'\omega'} \varphi_{\mathbf{k}_1\omega_1} \varphi_{\mathbf{k}''-\mathbf{k}_1, \omega''-\omega_1} d\mathbf{k}' d\omega' d\mathbf{k}_1 d\omega_1, \end{aligned} \quad (16)$$

where  $V$  and  $M$  are matrix elements of the interaction.

If the amplitude of the oscillations is small, we can use the perturbation theory. Namely, in zero approximation we can neglect the wave interaction, and assume that waves are statistically independent. We note the zero approximation amplitude as  $\varphi^{(0)}$ . If we insert this zero amplitude in the quadratic term, then this non-linear term will act as a driving force. Thus, the amplitudes of forced oscillations  $\varphi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)}$  are given by the relation

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}\omega)} \int V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} R\varphi_{\mathbf{k}'\omega'}^{(0)} \varphi_{\mathbf{k}''\omega''}^{(0)} d\mathbf{k}' d\omega'.$$

Now let us multiply Eq. (16) by  $\varphi_{\mathbf{k}\omega}^*$  and average it over phases of free oscillations  $\varphi^{(0)}$ . In the case of many excited degrees of freedom these phases may be considered as random phases. In the approximation which we need, we can substitute  $\varphi^{(0)}$  for  $\varphi$  in the third right-hand term of Eq. (16). The second term, proportional to  $V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}$ , disappears in the zero approximation so that

it is necessary to take into account the corrections  $\varphi^{(1)}$  in order to obtain the input of the same order of magnitude. Retaining only the linear and quadratic term in  $I$  and neglecting the difference between  $\langle \varphi \varphi \rangle$  and  $\langle \varphi^0 \varphi^0 \rangle$  in non-linear terms we obtain the following equation for waves

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}\omega} I_{\mathbf{k}\omega} = & \frac{e^4}{\varepsilon^*(\mathbf{k}, \omega + i\nu)} \int f(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v} + I_{\mathbf{k}\omega} \int R_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega' + \\ & + I_{\mathbf{k}\omega} \int \frac{v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}''\omega''} v_{\mathbf{k}''\omega'', \mathbf{k}\omega}}{\varepsilon(\mathbf{k}'', \omega'' + i\nu)} I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega' + \\ & + \frac{1}{2\varepsilon^*(\mathbf{k}, \omega + i\nu)} \int |v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}|^2 I_{\mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega', \end{aligned} \quad (17)$$

where

$$R_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} = \frac{4\pi e}{k^2} \int (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) \{ (\mathbf{k} \mathbf{g}_{\mathbf{k}''\omega''} \mathbf{g}_{\mathbf{k}'\omega'}) (\mathbf{k} \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) + (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{\mathbf{k}''\omega''}) (\mathbf{k} \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) \} f d\mathbf{v}, \quad (18)$$

$$v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}''\omega''} = \frac{4\pi e}{k^2} \int \{ (\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{k}') (\mathbf{g}_{\mathbf{k}''\omega''} \mathbf{k}'') + (\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{k}') \} f d\mathbf{v}. \quad (19)$$

Integrating by parts we can show that  $k^2 v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}''\omega''} = \mathbf{k}''^2 v_{\mathbf{k}''\omega'', \mathbf{k}\omega}$ . Using this relation and introducing the «number of waves» (number of quasi-particles):

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{k^2}{8\pi} \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right| I_{\mathbf{k}}, \quad (20)$$

for the case of weak turbulent state ( $\gamma \ll \omega$ ), Eq. (17) can be rewritten as

$$\frac{1}{2} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \gamma_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} + \int W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}' + \frac{1}{2} \int U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} N_{\mathbf{k}'} N_{\mathbf{k}''} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''}) d\mathbf{k}', \quad (21)$$

where

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = & \frac{8\pi}{k'^2} \frac{\text{Im} R_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}}{\left| \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega'} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right|} + \frac{8\pi}{k'^2} \frac{\text{Im} \left\{ \frac{v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}^2}{\varepsilon''} \right\}}{\left| \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega'} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right|}, \\ U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = & \frac{8\pi^2 |v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}|^2 k^2}{k'^2 k''^2 \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega'} \cdot \frac{\partial \varepsilon''}{\partial \omega''} \right|}, \quad \varepsilon' = \varepsilon(\mathbf{k}', \omega'), \quad \varepsilon'' = \varepsilon(\mathbf{k}'', \omega''). \end{aligned} \quad (22)$$

In Eq. (21) the last term and the contribution from the residue of the third term at  $\varepsilon'' = 0$  describe the wave decay processes whereas the other non-linear terms describe the scattering of waves by particles.

In the expressions for  $R_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}$  and  $v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}$  we can neglect the exponentially small contribution from residues at  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$  and  $\omega' = \mathbf{k}'\mathbf{v}'$ . In this approximation  $v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} = v_{-\mathbf{k}'', \nu\omega'', \mathbf{k}\omega'}$ . Using this relation we can show that the wave scattering by particles does not change the net number of the quasi-particles  $\int N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$ . As to the wave-wave scattering, on the other hand, it conserves the net energy for oscillations.

Eq. (21) is valid only for electrons. In order to include the ion motion, it is sufficient to take into account the ion contribution to  $R$ ,  $v$  and  $\varepsilon$ . It is not difficult to generalize this equation for the case when the external magnetic field is present. For this purpose, it is sufficient to change the operator  $\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}$  in a proper way.

The second term in the right-hand side of Eq. (21) describes the thermal fluctuations. Thus, schematically, Eq. (21) can be written as

$$\frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial t} = \gamma N + q - \alpha N^2, \quad (23)$$

where the first term describes the oscillation growth with the increment  $\gamma$ ,  $q$  is the source of thermal noise, and where the non-linear terms describe the interaction of waves. One sees, therefore, that in the turbulent steady-state, when the increment is large, it is possible to neglect  $q$  and, consequently,  $I = \gamma/\alpha$ . On the other hand, when  $\gamma$  is negative and not very large in its absolute value, one can, in Eq. (23), neglect the non-linear term, thus  $I = q/|\gamma|$ . In this case, the plasma has thermal noise only. When the intensity of the thermal fluctuations tends to infinity, the non-linear term should be retained to define  $I_{\mathbf{k}}$ . The real picture of weak turbulent steady-state is, of course, more complicated because the non-linear terms are a form of diffusion nature in  $k$ -space.

#### 4. Interaction of particles with waves

Let us consider now the equation for the averaged function (13). The expression on the right-hand side of this equation is denoted by  $S_{\text{ef}}$ . As can be seen from Eq. (13) the term describing the collisions of particles and waves may be written

$$S_{\text{ef}} = \text{Im} \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k} P_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) d\mathbf{k} d\omega, \quad (24)$$

where the correlation function  $P_{\mathbf{k}\omega}$  is defined by the relation

$$P_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \langle \varphi_{\mathbf{k}'\omega'}^*, f_{\mathbf{k}\omega} \rangle. \quad (25)$$

Using the expression for  $f_{\mathbf{k}\omega}$  we obtain in the quasi-linear approximation

$$\dot{P}_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) = \frac{4\pi e f \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{(2\pi)^3 k^2 \varepsilon^*(\mathbf{k}, \omega + i\nu)} + I_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{k} \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega} f. \quad (26)$$

In this expression the first term describes the slowing down of particles due to the polarization of the medium and the Cerenkov radiation of the longitudinal waves.

Let us first consider the simplest case of a stationary stable plasma where we can neglect the quadratic terms in  $I$ . In this case the intensity of fluctuations  $I_{\mathbf{k}\omega}$  is given by (10). Substituting this value in the second term of Eq. (26) we find

$$S_{\text{ef}} = \frac{2e^4}{m^2} \int \frac{\delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}'\mathbf{v}')}{k^4 |\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{k}\mathbf{v})|^2} \left\{ f(\mathbf{v}) \mathbf{k} \frac{\partial f(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} - f(\mathbf{v}') \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right\} d\mathbf{k} d\mathbf{v}'. \quad (27)$$

When  $kD > 1$  (where  $D$  is the Debye radius), the dielectric constant  $\varepsilon$  may be set equal to unity and the integral in Eq. (27), as can be easily shown,

converts into the Landau collision term. (One should moreover cut off the integral in the upper limit at  $k \approx 1/\rho_0$ , where  $\rho_0$  is the minimum distance between particles at binary collisions.)

When approaching instability the amplitude of thermal noises increases, in the expression (26) the second term prevails. By neglecting the first term we obtain the quasi-linear approximation treatment. In this case, and in the case of slightly unstable plasma, it is more convenient to consider a non-stationary problem with given initial conditions. In the wave kinetic equation we should, therefore, take into account a term with a time derivative, whereas in the expression for  $S_{\text{ef}}$  we should consider  $I_{\mathbf{k}}$  to be the time function.

## 5. Non-linear interaction of langmuir and ion-sound waves

Let us now consider the simplest example of Langmuir oscillations. The Langmuir wave spectrum is non-decaying; hence, the scattering of waves by particles will be the main non-linear process. When  $kD > \sqrt{m/M}$  we may neglect the wave scattering by ions, and the kinetic equation (21) becomes:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{\omega_0 m n^2} \int \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} (\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \delta(\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v}) \mathbf{k}'' \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}'. \quad (28)$$

From this relation, one sees that the total number of waves  $\int N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$  really remains constant. According to Eq. (28) the wave scattering process by electrons results in the diffusion of the wave packet in the  $\mathbf{k}$ -space towards small  $k$ . The characteristic damping rate of this diffusion is of the order of magnitude

$$\nu \approx \omega_0 (kD)^3 \frac{\varepsilon}{nT}, \quad (29)$$

where  $\varepsilon$  is the energy of the Langmuir waves.

When  $kD < \sqrt{m/M}$  the ion scattering prevails, and instead of Eq. (28) we obtain

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{\pi\omega_0 T_i^2}{(T_e + T_i)^2 M n^2} \int \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'^2}{k^2 k'^2} \delta(\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v}) \mathbf{k}'' \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}'. \quad (30)$$

As we can see, the ion scattering also leads to the decrease of  $k$ . The oscillation energy  $\varepsilon$  tends to a finite limit, and, consequently the process of scattering cannot by itself result in the complete relaxation of waves in homogeneous medium.

Let us now consider ion-sound waves. Such waves can be excited in a plasma with  $T_i \ll T_e$  and in the presence of electric current, when the mean (drift) velocity of electrons is higher than the sound velocity  $c_s = \sqrt{T_e/M}$ . In this case the scattering of waves by ions also results in a flux in the  $k$ -space towards small  $k$ . As can be shown, the wave kinetic equation becomes:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 2\gamma_k N_k + 2A N_k \left( k^6 \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial k} + 4k^5 N_k \right), \quad (31)$$

where  $A = \Omega_0^2 T_i \theta^2 / (2g T_e^2 n)$ ,  $\Omega_0^2 = 4\pi e^2 n / M$ , and  $\theta$  is the mean square root value of the angle between  $k$  and the  $z$ -axis, which was supposed to be small.

When ion-sound instability occurs  $\gamma_k = \alpha k$ , where  $\alpha$  is a constant, and from Eq. (31) we obtain

$$N_k \approx \frac{\alpha}{2Ak^4} \ln \frac{1}{kD}. \quad (32)$$

We see that non-linear interaction leads to the spectrum sharply decreasing with  $k$ .

Using the wave kinetic equation we can investigate various weak turbulent states. Unfortunately, this kinetic equation cannot be applied to the cases when the interaction between waves is not small. For such strong turbulent states we have no suitable strict mathematical methods. We have, therefore, to use some approaches similar to the weak coupling approximation or semi-empirical theory based on the mixing length concept.

## 6. Weak coupling approximation

Up to now, the wave interaction has been considered to be very small. Let us see what happens when the matrix element increases. Let us consider the model equation

$$(\omega - \omega_{\mathbf{k}})C_{\mathbf{k}\omega} = \int V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} C_{\mathbf{k}'\omega'} C_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (33)$$

where the eigen-frequency  $\omega_{\mathbf{k}}$  is a complex number. We assume that the matrix element of the interaction  $V$  increases approaching of the order of unity. It is clear that the interaction between waves results in the broadening of  $I_{\omega}$  as a function of  $\omega$ . Hence, in the case of strong turbulence, the dependence of  $I_{\mathbf{k}\omega}$  upon the frequency cannot be approximated by  $\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$ . We cannot therefore use the kinetic equation in form (21). If the matrix element still remains lower than unity then, even in the case of stronger turbulence, one can use the weak coupling approximation.

Note that according to Eq. (33), a single wave  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$  interacts only with two quite different waves  $\mathbf{k}'$ ,  $\omega'$  and  $\mathbf{k}''$ ,  $\omega''$ . As we have seen above, one of the main effects of non-linear interaction is the damping of a single wave which is defined by the right-hand side of Eq. (33). Let us rewrite this equation in the form

$$(\omega - \omega_{\mathbf{k}} + \eta_{\mathbf{k}\omega})C_{\mathbf{k}\omega} = \eta_{\mathbf{k}\omega}C_{\mathbf{k}\omega} + \int V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} C_{\mathbf{k}'\omega'} C_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega'. \quad (34)$$

The term  $\eta_{\mathbf{k}\omega}C_{\mathbf{k}\omega}$  in the left-hand side of this equation takes into account the part of non-linear interaction proportional to  $C_{\mathbf{k}\omega}$ . In the right-hand side of Eq. (34) from which we have already picked up the «damping» of every single wave, there remains only the effect of the driving force. We shall consider this force to be small, which is in fact so if  $V \ll 1$ . According to this, we shall write  $C = C^{(0)} + C^{(1)}$ , where  $C^{(1)} \ll C^{(0)}$ . For the amplitude of the forced oscillations  $C^{(1)}$  in the right-hand side of Eq. (34), it will be sufficient to retain the non-linear term only, thus we shall have

$$C_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = (\omega - \omega_{\mathbf{k}} + \eta_{\mathbf{k}\omega})^{-1} \int V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} C_{\mathbf{k}'\omega'}^{(0)} C_{\mathbf{k}''\omega''}^{(0)} d\mathbf{k}' d\omega'. \quad (35)$$

Let us multiply Eq. (34) by  $C_{\mathbf{k}\omega}^*$  and average the result over the random phase of oscillations. In the non-linear term we substitute  $C = C^{(0)} + C^{(1)}$ , assuming

that  $C^{(0)}$  should be statistically independent. The averaging of the non-linear term leads to three terms, two of which are proportional to  $I_{\mathbf{k}\omega}$ , and the third one contains  $I_{\mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}''\omega''}$  as the integrands. Defining the quantity  $\eta_{\mathbf{k}\omega}$  so as to cancel the terms in the right-hand side of the mentioned equation, which are proportional to  $I_{\mathbf{k}\omega}$ , we obtain the following equations:

$$|\omega - \omega_{\mathbf{k}} + \eta_{\mathbf{k}\omega}|^2 I_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{2} \int |v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}|^2 I_{\mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (36)$$

$$\eta_{\mathbf{k}\omega} = - \int \frac{v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}''\omega''} v_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega}}{\omega'' - \omega_{\mathbf{k}''} + \eta_{\mathbf{k}''\omega''}} I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (37)$$

where

$$v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} = V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} + V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}''\omega''}.$$

Defining a new function  $S_{\mathbf{k}\omega}$  by the relation  $S_{\mathbf{k}\omega} = (\omega - \omega_{\mathbf{k}} + \eta_{\mathbf{k}\omega})^{-1}$ , we rewrite these equations in the form

$$I_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{2} |S_{\mathbf{k}\omega}|^2 \int |v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}|^2 I_{\mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (38)$$

$$S_{\mathbf{k}\omega} = S_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} - S_{\mathbf{k}\omega}^{(0)2} \int S_{\mathbf{k}''\omega''} v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} v_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega} I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (39)$$

where

$$S_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = (\omega - \omega_{\mathbf{k}})^{-1}.$$

The functions  $S_{\mathbf{k}\omega}$  and  $S_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}$  have a simple physical meaning which can be easily understood if a small additional external force  $f_{\mathbf{k}\omega}$  is added to the right-hand side of Eq. (8). Repeating the calculations it will be easy to verify that  $S_{\mathbf{k}\omega}$  is the Green function describing the response of the turbulent medium to the «smallforce»  $f_{\mathbf{k}\omega}$ .  $S_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}$  is the Green function in the linear approximation.

The equation of this form for ordinary fluid was suggested by Kraichnan. Wild has shown that such equations may be derived using the selective summation of the perturbation theory series. Similar equations may be used to treat strong turbulence phenomena in plasma.

## 7. Semi-empirical approaches

Even if the weak coupling approximation were to be applied to strong plasma turbulence it would require a large number of numerical calculations. That is why it is desirable to use simpler methods of treatment of strong turbulent motions in plasma. In many specific cases, the semiempirical methods similar to those used in ordinary hydrodynamics may be developed for plasma turbulence. We shall consider here only one specific case, namely, the turbulent convection in mirror traps. Such turbulent convection was observed experimentally by Ioffe. In his experiment, the collisionless plasma at low pressure was produced by acceleration of ions in a radial electrical field. This plasma, with an ion temperature of the order of 1 keV and density  $\sim 10^9 \text{ cm}^{-3}$ , escapes from the trap at an anomalous time during  $t \sim 10^{-4} \text{ s}$ .

Experiments show that decay of plasma is induced by flute instability. This instability leads to convection of plasma in traps. In the Ioffe device

the electrons are cold. Their temperature is of the order 10 eV. Hence, the instability arises due to force  $F \approx nT_i/R$  which acts on the unit volume of a single plasma tube in radial direction.  $R$  is the mean radius of curvature of magnetic lines. As can be shown easily, this force leads to the acceleration of a single tube of the order of  $g_0 = (T_i/Rm)[\Omega_0^2/(\Omega_c^2 + \Omega_0^2)]$ , where  $\Omega_c = eH/(mc)$ ,  $\Omega_0^2 = 4\pi e^2 n/m$ . If this tube is surrounded by plasma, then the magnitude of the acceleration is  $g \approx (n'/n)g_0$ , where  $n'$  is the excess of plasma density compared to the background density.

When the turbulent convection develops, the amplitude of pulsation  $n'$  at a distance  $x$  from the wall is of the order of  $n' \approx x dn/dx$ . The amplitude of velocity pulsation is of the order  $v' \approx (gx)^{1/2} \approx x(g_0 d \ln n/dx)^{1/2}$ , so that the coefficient of turbulent diffusion  $D \approx v'x \approx x^2(g_0 d \ln n/dx)^{1/2}$ . Thus, near the wall, the flux  $q$  is equal to  $-Ax^2(dn/dx)^{3/2}(g_0/n)^{1/2}$ , where  $A$  is a numerical factor of the order of unity. To obtain  $q$  and therefore the plasma lifetime  $\tau$  we must estimate the minimal scale of pulsations  $x_0$ . To do this, we must take into account that plasma motion is produced by fluctuations of the electrical fields. Namely, the transverse component of these fields  $E_\perp = -\nabla_\perp \varphi$  leads to transverse velocity  $\mathbf{v}_\perp = c(\mathbf{E} \times \mathbf{H})/H^2$ . Since cold electrons are not confined by magnetic mirrors, the plasma potential must be positive. But in the vicinity of the wall, namely at the distance  $x \approx \rho_i = (T_i'/m\Omega_c^2)^{1/2}$ , the plasma tubes lose their ions, so that in this region the potential cannot be positive. It means that the boundary of plasma is equipotential and the radial component of velocity  $v_r \approx cE_\varphi/H$  must be zero at a distance of the order of about  $\rho_i$  near the wall. From these arguments it follows that the minimal scale of pulsation  $x_0$  must be of the order of the ion Larmor-radius  $\rho_i$ . Estimating  $q$  as  $q \approx An\sqrt{g_0 x_0} \approx An\sqrt{g_0 \rho_i}$ , we obtain for the plasma lifetime in a magnetic trap of radius  $a$  the following relation

$$\tau = \frac{\pi a^2 2n}{2\pi a q} = Ca \left( \frac{T_i \rho_i}{mR} \frac{\Omega_0^2}{\Omega_c^2 + \Omega_0^2} \right)^{1/2}.$$

At low density, when  $\Omega_0^2 < \Omega_c^2$ , this relation leads to  $\tau \approx \sqrt{n}$ . This dependence was verified experimentally. Moreover, the experimental data on electrical field fluctuations fit fairly well into the qualitative theoretical picture of turbulent convection.

This fact demonstrates the validity of using semi-empirical approaches to plasma turbulence. Such an approach cannot, of course, give quantitative results, but it is adequate for a qualitative consideration of the turbulent phenomena. One may express the hope that together with the weak coupling approximation, this approach can give quantitative as well as qualitative results.



## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ НА ЗАПЕРТЫХ ЧАСТИЦАХ \*)

Как известно, в ловушках с магнитными пробками и в тороидальных ловушках с замкнутыми силовыми линиями может иметь место желобковая неустойчивость [1, 2]. Эта неустойчивость возникает вследствие того, что в неоднородном магнитном поле с радиусом кривизны силовых линий  $R$  электроны и ионы дрейфуют в разные стороны со скоростями  $v_j = cT_j/(e_jHR)$  ( $H$  — магнитное поле,  $T$  — температура,  $e_j$  — заряд частиц сорта  $j$ ). За счет этого дрейфа происходит поляризация плазмы в возмущениях типа «языков» на поверхности плазмы, и если магнитное поле убывает наружу, то возникающее за счет поляризации электрическое поле приводит к выбросу плазмы. Экспериментально желобковая неустойчивость была изучена Иоффе и др. [3, 4].

В тороидальных системах с незамкнутыми силовыми линиями, лежащими на тороидальных поверхностях, как показывает рассмотрение в гидродинамическом приближении [5, 6], плазма достаточно низкого давления должна быть устойчива. Однако в разреженной плазме, когда гидродинамическое приближение неприменимо, вывод о стабилизации желобковой неустойчивости за счет эффекта перекрещенности силовых линий теряет силу. В самом деле, в основе этого вывода лежит представление о том, что в высокотемпературной плазме заряды, возникающие за счет магнитного дрейфа, должны компенсироваться в результате перетекания их вдоль силовых линий. Такой эффект компенсации действительно имеет место, но он относится только к так называемым пролетным частицам, свободно движущимся вдоль силовых линий. Если величина магнитного поля меняется вдоль силовых линий, то, кроме пролетных частиц, имеется группа «запертых» частиц, совершающих колебания между магнитными пробками, т. е. областями с повышенным магнитным полем. Если изменение магнитного поля вдоль силовых линий мало, то пробочное отношение  $P = H_{\max}/H_{\min}$  близко к единице, и при этом доля частиц, захваченных между пробками,  $\varepsilon \approx \sqrt{P-1}$  мала. Так как захваченные частицы заперты пробками, то они не могут свободно перемещаться вдоль силовых линий, и, следовательно, на них может развиваться неустойчивость типа желобковой, которую естественно назвать неустойчивостью на запертых частицах.

Эта неустойчивость отличается от желобковой тем, что заряды, образующиеся за счет запертых частиц, в значительной мере компенсируют-

\*) Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 4. С. 15-19.

ся пролетными частицами. За счет этого эффекта инкремент нарастания становится мал, и пролетные частицы успевают распределиться по закону Больцмана, т. е. возмущение их плотности равно  $-e_j \varphi n / T_j$ , где  $\varphi$  — потенциал электрического поля,  $n$  — невозмущенная плотность. Что касается возмущения плотности запертых частиц  $n'_t$ , то в квазиклассическом приближении, когда возмущение потенциала имеет вид плоской волны, в пренебрежении разбросом по дрейфовым скоростям мы имеем для нее следующее уравнение непрерывности:

$$(-\omega + k_y v_{jt}) n'_t + \frac{k_y c \varphi}{H} \varepsilon \frac{dn}{dx} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $dn/dx = \nu n$ ,  $k_y$  — компонента волнового вектора, перпендикулярная  $\nabla n$  и  $\mathbf{H}$ ,  $v_{jt}$  — дрейфовая скорость запертых частиц (все величины предполагаются соответствующим образом усредненными вдоль силовых линий магнитного поля). Последнее слагаемое в (1) учитывает дрейф в электрическом поле. Было показано [7], что дрейфовая скорость запертых частиц  $v_{jt}$  пропорциональна градиенту от продольного инварианта

$$J_{\parallel} = \int m v_{\parallel} dl, \quad (2)$$

где интегрирование проводится по силовой линии между точками поворота. По порядку величины  $v_{jt} \sim v_j$ .

Таким образом, с учетом (1) для полного возмущения плотности  $n'_j$  частиц сорта  $j$  имеем следующее выражение:

$$n'_j = -\frac{e_j \varphi}{T_j} n + \frac{k_y c \varepsilon}{(\omega - k_y v_{jt}) H} \frac{dn}{dx} \varphi. \quad (3)$$

Здесь первое слагаемое справа представляет собой возмущение плотности пролетных частиц.

Из условия квазинейтральности  $n'_j = n'_e$  нетрудно получить дисперсионное уравнение для  $\omega$ . Для случая равных температур  $T_i = T_e = T$  оно имеет вид

$$\omega^2 = (k_y v_{jt})^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon R}{a} \right), \quad (4)$$

где  $a = -n(dn/dx)^{-1}$  — характерный размер.

Как мы видим, при  $\varepsilon > a/R$  имеет место неустойчивость с инкрементом нарастания  $\gamma \sim cT/(eHR)$ . Так как  $\varepsilon \sim \sqrt{\delta H/H}$ , а  $R \sim LH/\delta H$  (где  $\delta H$  — амплитуда модуляции магнитного поля, а  $L$  — длина, на которой происходит изменение поля), то  $\varepsilon \frac{R}{a} \sim \frac{L}{a} \sqrt{\frac{H}{\delta H}} > 1$  для систем с умеренно модулированным магнитным полем. Таким образом, в системах с умеренно неоднородным магнитным полем должна, вообще говоря, развиваться неустойчивость указанного вида. Эта неустойчивость должна приводить к выбросу захваченных частиц, при этом за счет столкновений или неустойчивостей на высокочастотных продольных колебаниях конус захваченных частиц (в пространстве скоростей) будет все время заполняться пролетными. При  $R \sim a$  развитая неустойчивость может приводить к утечке плазмы порядка бомовской.

Неустойчивость на запертых частицах заведомо должна отсутствовать в плотной плазме, когда частота ион-ионных столкновений больше, чем  $\gamma/\varepsilon^2$  (здесь множитель  $\varepsilon^{-2}$  учитывает диффузионный характер кулоновских столкновений). В разреженной плазме неустойчивость отсутствует, если частицы совершают благоприятный дрейф [1]. Для этого достаточно, чтобы при заданной энергии  $mv^2/2$  и поперечном адиабатическом инварианте  $\mu = v_{\perp}^2/H$  продольный инвариант (2) убывал к периферии. В установке типа Токамак, например, такие условия осуществляются в области, где величина  $q = rH_z/(R_0H_{\theta})$  достаточно быстро убывает с  $r$  ( $r$  — текущий малый радиус,  $H_z$  — продольное,  $H_{\theta}$  — азимутальное магнитное поле,  $R_0$  — большой радиус тора). Условие  $\delta J_{\parallel} < 0$  заменяет собой гидродинамическое условие  $\delta \oint \frac{dl}{H} < 0$ , которое используется при отыскании так называемых «конфигураций с минимумом  $H$ ». Подробное исследование неустойчивости на запертых частицах в тороидальном разряде типа Токамак проведено автором совместно с О.П. Погуце.

#### Список литературы

1. Longmire L., Rosenbluth M. // Ann. d. Physik. 1957. V. 1. P. 120.
2. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 16.
3. Иоффе М.С., Соболев Р.И., Тельковский В.Г., Ошманов Е.Е. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 1602; 1961. Т. 40. С. 40.
4. Иоффе М.С., Соболев Р.И. // Атомная энергия. 1964. Т. 17. С. 366.
5. Suydam B. // Proc. 2 nd U.N. Intern. Conference P.U.A.E. Geneva, 1958. V. 31. P. 157.
6. Johnson J., Oberman C., Kulsrud R., Frieman E. // Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 281.
7. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. III. С. 285.

## О ДИФФУЗИИ ПЛАЗМЫ ТОРОИДАЛЬНОГО РАЗРЯДА \*)

Как известно [1], плазма в экспериментальных тороидальных установках подвержена аномальной диффузии, значительно превосходящей классическую диффузию за счет парных столкновений. Этот факт качественно согласуется и с теоретическими соображениями, указывающими на наличие обширного типа механизмов неустойчивости плазмы в тороидальной геометрии, которые могут приводить к усилению диффузии. При обсуждении экспериментальных данных, наряду с рассмотрением неустойчивостей, не следует забывать о том, что в тороидальной геометрии даже классическая диффузия может приводить к утечке частиц, значительно превышающей утечку из прямого разряда. Этот эффект возникает за счет тороидального дрейфа заряженных частиц, который в отсутствие вращательного преобразования приведет бы к разделению зарядов и выбросу плазмы к наружной стенке тора [1]. При наличии вращения силовых линий на магнитных тороидальных поверхностях заряды компенсируются за счет перетекания вдоль силовых линий [2, 3]. Однако из-за конечной проводимости полной компенсации не происходит, и это приводит к эффективному увеличению среднего потока плазмы.

Для стеллараторов в отсутствие вихревого электрического поля соответствующий эффект был рассмотрен в работах [4, 6] (аналогичный эффект усиления теплопроводности рассмотрен в [5]). В настоящей работе получена формула для диффузионного потока плазмы в тороидальном осесимметричном разряде при наличии вихревого электрического поля.

Введем квазицилиндрическую систему координат  $\rho, \varphi, \omega$  с квадратом элемента дуги  $dl^2 = d\rho^2 + r^2 d\varphi^2 + \rho^2 d\omega^2$ , где  $r = R(1 + \varepsilon \cos \omega)$ ;  $\varepsilon = \rho/R$ ;  $R$  — расстояние от оси вращения до центра сечения некоторой фиксированной магнитной поверхности. Это сечение с достаточной для нас степенью точности можно считать круглым ( $\rho = \text{const}$ ). На рассматриваемой поверхности, по определению, нормальные компоненты плотности тока и магнитного поля равны нулю  $j_\rho = B_\rho = 0$ . Остальные требующиеся для расчета величины имеют вид [3]

$$E_\varphi = \frac{\mathcal{E}_0(t, \rho)}{2\pi r}, \quad B_\varphi = \frac{2I(\psi)}{cr} = \frac{B_{\varphi 0}(\rho)}{(1 + \varepsilon \cos \omega)}, \quad (1)$$

$$j_\varphi = 2\pi c \frac{dp(\psi)}{d\psi} r + \frac{1}{cr^2} \frac{dI^2(\psi)}{d\psi}, \quad (2)$$

$$B_\omega = B_{\omega 0}(\rho)[1 + \varepsilon \Lambda_1(\rho) \cos \omega + \varepsilon^2 \Lambda_2(\rho) \cos 2\omega + \dots] = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad (3)$$

$$j_\omega = j_\varphi \frac{B_\varphi}{B_\omega} - \frac{c}{B_\varphi} \frac{dp}{d\rho} = \frac{dI}{d\psi} B_\omega, \quad (4)$$

$$E_\omega = \left( \frac{j_\varphi}{\sigma_{\parallel}} - E_\varphi \right) \frac{B_\varphi}{B_\omega} + \frac{1}{\sigma_{\parallel}} j_\omega = E_{\omega 0}(t) - \frac{\partial \varphi}{\rho \partial \omega}, \quad (5)$$

\*) Кадомцев Б.Б., Шафранов В.Д. // Доклады АН СССР. 1966. Т. 167, №6. С. 1273–1275.

$$v_\rho = \frac{c}{B_\omega} \left( E_\varphi - \frac{j_\varphi}{\sigma_\parallel} \right) - \frac{c^2}{B^2} \left( \frac{1}{\sigma_\perp} - \frac{1}{\sigma_\parallel} \right) \frac{dp}{d\rho}. \quad (6)$$

Здесь  $\psi$  — поперечный магнитный поток, так что  $\psi(\rho, \omega) = \text{const}$  представляет собой уравнение магнитной поверхности;  $\mathcal{E}_0(t)$  — напряжение на обходе тора;  $\sigma_\perp(\rho)$  и  $\sigma_\parallel(\rho)$  — поперечная и продольная проводимости плазмы;  $\varphi$  — однозначный потенциал;  $E_{\omega 0}(t)$  — среднее значение вихревого азимутального электрического поля.

Среднее по тороидальной поверхности значение нормальной скорости  $v_{\text{эф}}$  определяется формулой

$$v_{\text{эф}} = \left\langle v_\rho \frac{r}{R} \right\rangle = \langle v_\rho (1 + \varepsilon \cos \omega) \rangle, \quad (7)$$

где угловые скобки означают усреднение по азимуту  $\omega$ .

Усредняя (5) по  $\omega$ , находим связь распределения  $p(\psi)$  и  $I(\psi)$  с  $\mathcal{E}_0$ :

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\pi c (\langle j_\omega \rangle / \sigma_\parallel - \langle E_\omega \rangle)}{I \langle 1/r^2 B_\omega \rangle} + \frac{4\pi I I'}{c \sigma_\parallel} + \frac{4\pi^2 c p'}{\sigma_\parallel} \frac{\langle 1/B_\omega \rangle}{\langle 1/r^2 B_\omega \rangle}. \quad (8)$$

Подставляя выражения для  $\mathcal{E}_0$ ,  $j_\varphi$ ,  $B_\varphi$ ,  $j_\omega$  в (6) и производя усреднение (7), получаем выражение для средней скорости расширения плазменного шнура

$$v_{\text{эф}} = -\frac{c^2}{\sigma_\perp B^2} \left( 1 + \frac{\sigma_\perp}{\sigma_\parallel} \frac{B_{\omega 0}^2}{B_{\varphi 0}^2} \right) \frac{dp}{d\rho} + \frac{c j_{\varphi 0} B_{\omega 0}}{\sigma_\parallel B_{\varphi 0}^2} - c \frac{E_{\omega 0}}{B_{\varphi 0}} - \frac{2c^2 \rho^2}{\sigma_\parallel B_{\omega 0}^2 R^2} \frac{dp}{d\rho}. \quad (9)$$

Первый член в этом выражении представляет собой диффузионную скорость. Если под  $\sigma_\perp$  понимать некоторую эффективную проводимость с учетом неустойчивостей, то этим членом описывается и аномальная диффузия. Второй член в (9) есть скорость стягивания плазмы магнитным полем тока (пинч-эффект в продольном магнитном поле), третий — дрейф в вихревом азимутальном поле, связанном с изменением продольного поля; при  $B_{\varphi 0} \gg B_{\omega 0}$

$$E_{\omega 0} = \frac{\rho}{2c} \frac{\dot{B}_{\varphi 0}}{B_{\varphi 0}}. \quad (10)$$

Усиленная за счет тороидальности диффузия описывается последним членом выражения (9). Это слагаемое представляет собой усредненный по тороидальной поверхности дрейф зарядов в скрещенных продольном магнитном поле  $B_\varphi$  и электрическом поле  $E_\omega$  разделения зарядов. Действительно, нормальная к магнитной поверхности компонента скорости такого дрейфа равна

$$v_{\text{др}} = -c \frac{E_\omega}{B_\varphi} = -c \frac{E_\omega}{B_{\varphi 0}} l (1 + \varepsilon \cos \omega). \quad (11)$$

Электрическое поле  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , связанное с разделением зарядов, определяется из проекции закона Ома на магнитное поле  $-\mathbf{B}\nabla\varphi = j_\parallel \mathbf{B} / \sigma_\parallel$ , где  $\mathbf{j}_\parallel = h\mathbf{B}$  — плотность продольного тока, снимающего разделение зарядов, вызванное тороидальным дрейфом. Из условия  $\text{div} \mathbf{j} = 0$  для  $h$  получается уравнение  $\mathbf{B}\nabla h = \mathbf{j}_\perp \nabla B^2 / B^2$ . Ограничимся для простоты случаем сильного продольного поля  $B_\varphi^2 \gg B_\omega^2$ , тогда  $\mathbf{j}_\perp \nabla B^2 \approx \frac{j_{\perp 0} \partial B_\varphi^2}{\rho \partial \omega} = 2\varepsilon j_{\perp 0} \sin \omega$ .

Следовательно,  $h = -2\varepsilon j_{\perp 0} \cos \omega / B_{\omega 0}$ , и из закона Ома получаем

$$E_{\omega} = -2\varepsilon \frac{f_{\perp 0} B_{\varphi 0}^2}{\sigma_{\parallel} B_{\omega}^2} \cos \omega = \frac{2c\varepsilon}{\sigma_{\parallel}} \frac{B_{\varphi 0}}{B_{\omega}^2} \frac{dp}{d\rho} \cos \omega. \quad (12)$$

Подставляя эти значения электрического поля в выражение для скорости  $v_{др}$  и производя усреднение (7) по магнитной поверхности, получаем

$$v_{др} = -\frac{2c^2 \varepsilon^2}{B_{\omega}^2 \sigma_{\parallel}} \frac{dp}{d\rho} \quad (13)$$

в согласии с последним слагаемым в формуле (9). При  $B_{\varphi}^2 \gg B_{\omega}^2$  суммарный эффективный коэффициент диффузии  $D_{эф}$  выражается через коэффициент диффузии в цилиндрической геометрии  $D_{\perp}$  в виде

$$D_{эф} = D_{\perp} \left( 1 + \frac{2\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} q^2 \right). \quad (14)$$

Параметр  $q = \rho B_{\varphi 0} / (R B_{\omega 0})$  («коэффициент запаса устойчивости» по отношению к винтовым возмущениям) в экспериментах на Токамаке обычно составляет несколько единиц ( $q \sim 5$ ).

Заметим, что этот параметр связан с углом прокручивания силовых линий магнитного поля  $\iota$  соотношением  $q = 2\pi/\iota$ . Подстановка этого значения  $q$  в (14) приводит к выражению для  $D_{эф}$ , совпадающему с результатом Пфирша и Шлютера, полученным для стеллараторов:

$$D_{эф} = D_{\perp} \left( 1 + \frac{8\pi^2 \sigma_{\perp}}{\iota^2 \sigma_{\parallel}} \right). \quad (15)$$

Можно показать, что эта формула пригодна для любых тороидальных систем с круговой магнитной осью и сечением магнитных поверхностей, близким к круговому.

При наличии вихревых электрических полей скорость расширения плазмы может быть сделана в принципе равной нулю. При постоянном продольном магнитном поле ( $E_{\omega 0} = 0$ ) компенсация диффузии возможна, как это следует из формулы (9), лишь при сравнительно низком давлении плазмы  $p \sim B_{\omega 0}^2 / (8\pi q^2)$ .

#### Список литературы

1. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. — М.: Изд-во АН СССР, 1961.
2. Вандакуров Д.В. // ЖТФ. 1959. Т. XXIX. С. 1312.; 1960. Т. XXX. С. 134; 1961. Т. XXXI. С. 907.
3. Шафранов В.Д. // В кн.: Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1963. Вып. 2.
4. Eckhardt D., Gierke G., Grieger G. // II Международн. конф. по физике плазмы и управляемым термоядерным реакциям. Калэм, 1965 г. Доклад CN 2150.
5. Шафранов В.Д. // Атомная энергия. 1966. Т. 19. С. 120.
6. Knorr G. // Phys. Fluids. 1965. Т. 8. С. 1334.

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ НА ЗАПЕРТЫХ ЧАСТИЦАХ В ТОРОИДАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ \*)

Показано, что в тороидальных разрядах с продольным магнитным полем может развиваться неустойчивость, сходная с желобковой неустойчивостью плазмы в ловушках с магнитными пробками. Эта неустойчивость развивается на частицах, захваченных между пробками, т.е. областями с более высоким значением магнитного поля.

## Введение

Как было показано теоретически [1, 2] и подтверждено экспериментально [3, 4], наиболее опасной для удержания плазмы в ловушках с магнитными пробками является так называемая желобковая неустойчивость, развивающаяся за счет магнитного дрейфа заряженных частиц в неоднородном магнитном поле. Как показывает гидродинамическое рассмотрение [5, 6], в тороидальной геометрии желобковая неустойчивость, казалось бы, легко может быть стабилизирована за счет эффекта «шира» — перекрещенности силовых линий. Эффект стабилизации возникает в результате свободного движения частиц вдоль силовых линий, благодаря чему легко компенсируются заряды, возникающие за счет магнитного дрейфа, и возмущения без искривления силовых линий с не слишком узкой локализацией оказываются невозможными.

Однако вывод о свободном перетекании зарядов теряет силу в разреженной бесстолкновительной плазме. Точнее говоря, он относится только к пролетным частицам, но не применим к частицам, запертым между магнитными пробками. Именно на этих частицах может развиваться неустойчивость, сходная с желобковой неустойчивостью плазмы в ловушках с магнитными пробками и названная нами неустойчивостью на запертых частицах [7]. Пролетные частицы при этом играют роль внешней среды с большой диэлектрической постоянной, они лишь сильно снижают потенциал, создаваемый запертыми частицами, но не сводят его до нуля.

В настоящей работе исследуется неустойчивость на захваченных частицах в тороидальных системах типа Токамак. В разделе 1 кратко рассматривается равновесное состояние и вводится удобная для исследования криволинейная система координат; в разделе 2 рассматривается движение заряженных частиц; в разделе 3 получено и исследовано интегральное уравнение для потенциала, играющее роль дисперсионного уравнения для определения собственной частоты колебаний  $\omega$ ; в разделе 4 учтены столкновения частиц.

---

\*) *Кадомицев Б.Б., Погуце О.П. // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. Вып. 6(12). С. 1734–1746.*

## 1. Система координат

Чтобы не усложнять рассмотрения, мы предположим, что тороидальность мала, т. е. что малый радиус  $a$  тороидального плазменного шнура значительно меньше большого радиуса  $R_0$ . Величина  $a/R_0$  будет в дальнейшем играть роль малого параметра. Для исследования колебаний удобно ввести специальные криволинейные координаты, переходящие в обычные цилиндрические при  $R_0 \rightarrow \infty$ . Обозначим новые координаты через  $r, \vartheta, \zeta$ , вводя временно для обычных цилиндрических координат обозначения  $r', \varphi', z'$ .

Предположим, что тороидальный шнур получен путем искривления цилиндрического шнура круглого сечения. Тогда приближенно можно считать, что магнитные поверхности в сечении  $\varphi' = \text{const}$  представляют собой вложенные друг в друга окружности. Радиус этих окружностей  $r$  естественно принять за одну из криволинейных координат так, чтобы уравнение  $r = \text{const}$  определяло одну из магнитных

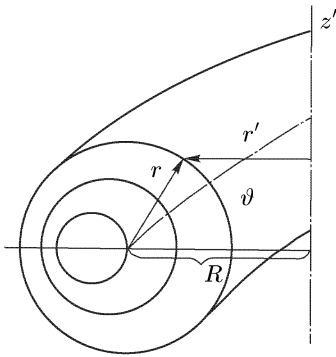


Рис. 1

поверхностей. В качестве второй координаты мы выберем величину  $\vartheta$  — азимутальный угол малой окружности (рис. 1). Центр окружности,  $r = \text{const}$ , представляющий собой сечение данной магнитной поверхности, находится на расстоянии  $R = R_0 + \Delta(r)$  от оси симметрии, где  $R_0 = \text{const}$ , а малая величина  $\Delta(r)$  учитывает смещение магнитных поверхностей за счет искривления. Выбирая в качестве третьей координаты угол  $\varphi'$ , мы можем записать следующую связь между цилиндрическими координатами  $r', \varphi', z'$  и введенными нами координатами  $r, \vartheta, \zeta$ :

$$r' = R_0 - r \cos \vartheta, \quad z' = r \sin \vartheta, \quad \varphi' = \zeta, \quad (1.1)$$

причем в (1.1) мы опустили величину смещения  $\Delta(r)$ , так как при малой тороидальности, т. е. при  $\varepsilon = r/R \ll 1$ ,  $\Delta/a$  является малой величиной, порядка  $\varepsilon$ .

Заметим, что тороидальность вносит следующие изменения по сравнению с прямым шнуром: во-первых, появляются зависимости от угла  $\vartheta$  поправки порядка  $\varepsilon$  в макроскопических величинах — давлении, компонентах магнитного поля и т. д. и, во-вторых, что более существенно, качественно изменяется движение заряженных частиц. Это происходит потому, что в тороидальной системе величина магнитного поля меняется вдоль силовой линии, т. е. появляются магнитные пробки. В результате частицы разделяются на две группы: запертые, которые движутся между пробками, и пролетные, которые движутся вдоль всей системы. Этот эффект, как будет показано ниже, оказывается порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ . Поэтому при малых  $\varepsilon$  мы будем сохранять эффекты тороидальности только там, где они существенно скажутся на движении заряженных частиц, т. е. приведут к эффектам порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ .

При  $\beta = 8\pi nT/H^2 \ll 1$  и  $H_\parallel^2/H^2 \ll 1$  продольное (в смысле соответствия с прямым шнуром) магнитное поле с точностью до членов порядка  $\varepsilon$  равно:

$$H_\zeta = H_0 \left( 1 + \frac{r}{R_0} \cos \vartheta \right), \quad (1.2)$$



где  $H_0$  — значение поля на магнитной оси. Что касается азимутального магнитного поля, то при  $H_\vartheta \ll H_0$  оно может быть записано в виде

$$H_\vartheta = H_{\vartheta 0} (1 + O(r) \cos \vartheta). \quad (1.2)$$

В самом деле,  $H_\vartheta$  следующим образом связано с  $H_0$ :

$$H_\vartheta = H_0 \frac{r}{R} \frac{1}{q} = H_0 \varepsilon \frac{1}{q}, \quad q(r) = \frac{r H_0}{R H_\vartheta}, \quad (1.4)$$

где  $q$  — так называемый коэффициент запаса. В установках типа Токамак  $q$  выбирается порядка нескольких единиц, чтобы был выполнен критерий Шафранова–Крускула. Таким образом,  $H_\vartheta$  мало по сравнению с  $H_0$ , и, следовательно, в  $H_\vartheta$  поправки порядка  $\varepsilon$  можно не учитывать. Полученные выше соотношения однозначно определяют геометрию шнура и соответствующую систему координат для любого распределения  $p$  и  $H_\vartheta$  по радиусу  $r$ .

## 2. Дрейфовые траектории

Рассмотрим движение заряженных частиц в тороидальном магнитном поле. Полученные здесь результаты будут использованы при интегрировании кинетического уравнения, а также позволят понять физическую причину рассматриваемой ниже неустойчивости на запертых частицах.

Закон движения заряженной частицы в сильном магнитном поле можно задать в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{n} \frac{v_\perp}{\Omega} \cos \alpha + \mathbf{b} \frac{v_\perp}{\Omega} \sin \alpha, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{r}_0(t)$  — траектория ведущего центра,  $\mathbf{n}$  — нормаль,  $\mathbf{b}$  — бинормаль к силовой линии магнитного поля,  $v_\perp$  — поперечная компонента скорости, а  $\alpha = \alpha_0 - \Omega(t - t_0)$  — азимут в пространстве скоростей.

Как известно, движение ведущего центра  $\mathbf{r}_0(t)$  заряженной частицы описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = v_\parallel \mathbf{h} + \frac{c[\mathbf{h}\nabla\varphi_0]}{H} + \frac{Mc}{2eH^2} (v_\perp^2 + 2v_\parallel^2)[\mathbf{h}\nabla H]. \quad (2.2)$$

Совместно с законом сохранения энергии

$$\frac{Mv^2}{2} + e\varphi_0 = \text{const} \quad (2.3)$$

и поперечного магнитного момента  $\mu$

$$\mu = \frac{v_\perp^2}{H} = \text{const} \quad (2.4)$$

оно полностью определяет движение.

Наиболее существенным эффектом, возникающим при переходе к тороидальной геометрии, является, как уже отмечалось выше, появление запертых частиц, совершающих колебания между магнитными пробками. Чтобы их учесть, достаточно сохранить тороидальную поправку лишь в магнитном моменте (2.4), а в остальных членах слабой зависимостью от  $\vartheta$  множителя  $(1 + \varepsilon \cos \vartheta)$  можно пренебречь. Ограничиваясь случаем  $\varphi_0 = 0$  и вводя отклонение  $\xi$  от силовой линии на магнитной поверхности согласно

соотношению  $\xi = \zeta - q\vartheta$ , получим из (2.2) с точностью до  $\sqrt{\varepsilon}$  следующую систему:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \pm \frac{v}{R_0 q} \left[ 1 - \frac{\mu H_0}{v^2} \left( 1 + \frac{r}{R_0} \cos \vartheta \right) \right]^{1/2}, \quad (2.5)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\Omega R_0} (v^2 + v_{\parallel}^2) \sin \vartheta, \quad (2.6)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{2\Omega R_0 r} (v^2 + v_{\parallel}^2) (q \cos \vartheta + q' r \vartheta \sin \vartheta), \quad (2.7)$$

где  $\Omega = eH_0/(Mc)$ ,  $q' = dq/dr$ .

Отклонение  $\Delta r$  от силовой линии является малым, и поэтому величину  $r$  в (2.5) можно считать постоянной. В результате уравнение для продольного движения можно решать независимо от (2.6), (2.7). Введем сферическую систему координат  $v$ ,  $\psi_{\pi}$ ,  $\alpha$  в пространстве скоростей в точке  $\vartheta = \pi$ . Тогда  $v_{\perp}^2/v^2 = \mu H_0(1 - \varepsilon)/v^2 = -\sin^2 \psi_{\pi}$  и, следовательно, уравнение (2.5) принимает вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \pm \frac{v}{R_0 q} [\cos^2 \psi_{\pi} - \varepsilon \sin^2 \psi_{\pi} (1 + \cos \vartheta)]^{1/2}, \quad (2.8)$$

где  $\varepsilon = r/R_0$ . Отсюда видно, что при малых  $\cos^2 \psi_{\pi}$  подкоренное выражение может обращаться в нуль при некоторых значениях  $\vartheta$ , т. е. происходит отражение частиц от магнитной пробки (магнитного зеркала). Введем дополнительный угол  $\gamma_{\pi} = \pi/2 - \psi_{\pi}$ . Так как для запертых частиц угол  $\gamma$  мал, то для них можно приближенно положить  $\cos^2 \psi_{\pi} \approx \gamma_{\pi}^2$ ,  $\sin^2 \psi_{\pi} \approx 1$ . Вводя, кроме того, новую переменную  $\varkappa^2 = \gamma_{\pi}^2/2\varepsilon$ , запишем уравнение (2.8) для частиц с малой продольной скоростью в виде

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \pm \frac{v\sqrt{\varepsilon}}{R_0 q} \sqrt{2\varkappa^2 - 1 - \cos \vartheta}. \quad (2.9)$$

Точка поворота  $\vartheta = \vartheta_0(\varkappa)$  определяется из условия  $1 + \cos \vartheta_0 = 2\varkappa^2$ . Она существует при  $\varkappa < 1$ . Таким образом, значение  $\varkappa = 1$  разделяет пролетные частицы от запертых. С помощью (2.9) находим период колебаний  $\tau$  запертых частиц:

$$\tau = 4 \frac{R_0 q}{v\sqrt{\varepsilon}} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{dv}{\sqrt{2\varkappa^2 - 1 - \cos \vartheta}} = 4 \frac{R_0 q}{v\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{2} K(\varkappa), \quad (2.10)$$

где  $K$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

Для пролетных частиц ( $\varkappa > 1$ ) введем в рассмотрение величину

$$\tau = 4 \frac{R_0 q}{v\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\varkappa^2 - 1 - \cos \vartheta}} = 4 \frac{\sqrt{2} R_0 q}{v\sqrt{\varepsilon}} K\left(\frac{1}{\varkappa}\right), \quad (2.10a)$$

имеющую смысл времени двух полных оборотов по углу  $\vartheta$ . Удобство такого определения  $\tau$  для пролетных частиц выяснится в дальнейшем, когда при переходе от интегрирования по времени к интегрированию по углу  $\vartheta$

(см. формулу (3.11)) угол  $\vartheta$  можно будет считать непрерывно меняющимся при переходе от захваченных частиц к пролетным.

Введем обозначение  $\omega_0 = 2\pi/\tau$ . При больших  $\varkappa$  частицы движутся вдоль магнитного поля практически свободно и  $\omega_0 \approx v\sqrt{2\varepsilon\kappa}/(2R_0q) \approx v\gamma/(2R_0q)$ . При  $\varkappa \rightarrow 1$  частота обращения частиц по  $\vartheta$  замедляется до нуля, а затем частицы захватываются, и  $\omega_0$  приобретает смысл угловой частоты колебаний между пробками.

Как мы видим, при наличии неоднородности вдоль магнитного поля характер движения частиц существенно меняется. А именно, если в прямом поле для медленных волн  $\omega/k_z \ll v_i$  частицы успевают за счет того, что они могли свободно двигаться вдоль силовых линий, приходиться в равновесие по Больцману, то теперь существует группа захваченных частиц с малыми продольными скоростями  $v_{\parallel}/v < \sqrt{2\varepsilon}$ , которые в среднем практически не движутся вдоль поля, т. е. и для очень медленных волн  $\omega/k_z \ll v_i$  не успевают распределиться по Больцману. За счет этой неравновесности и возникает неустойчивость на захваченных частицах. Для исследования этой неустойчивости необходимо рассмотреть кроме продольного также и поперечное движение.

Учитывая, что для захваченных частиц  $v_{\parallel} \ll v$ , из (2.6) получаем

$$\Delta r = \pm \int \frac{qv}{2\Omega\sqrt{\varepsilon}} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{2\varkappa^2 - 1 - \cos \vartheta}} = \pm \frac{vq}{\Omega\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{2\varkappa^2 - 1 - \cos \vartheta}. \quad (2.11)$$

При движении вдоль магнитного поля ( $v_{\parallel} > 0$ ) ионы дрейфуют наружу от магнитной поверхности, а при обратном движении они перемещаются внутрь. Для электронов  $\Delta r$  имеет противоположный знак. Как следует из (2.11), отклонение ионов по радиусу имеет порядок величины  $\Delta r \sim \rho_i q/\sqrt{\varepsilon}$ . Мы будем считать, что эта величина значительно меньше  $a$ , так как в противном случае заметная часть ионов могла бы уходить на стенки даже в отсутствие столкновений или неустойчивости.

Для пролетных частиц с  $\varkappa \gg 1$  можно считать  $v_{\parallel} = \text{const}$ , и тогда из (2.5), (2.6) получаем

$$\Delta r = -\frac{q}{2\Omega_0 v_{\parallel}} (v^2 + v_{\parallel}^2) \cos \vartheta. \quad (2.12)$$

Отсюда видно, что смещение пролетных частиц приблизительно в  $\sqrt{R/r}$  раз меньше захваченных.

В дальнейшем нам понадобится среднее смещение  $\langle \Delta \xi \rangle$  захваченных частиц за период вдоль шнура (т. е. по  $\zeta$ ). Это смещение, согласно (2.5), (2.6), можно представить в виде

$$\langle \Delta \xi \rangle \approx \frac{1}{\Omega} \frac{q}{r} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial r}; \quad (2.13)$$

здесь

$$\begin{aligned} J_{\parallel} &= \oint v_{\parallel} dl = 4qR_0\sqrt{\varepsilon}v \int_{\vartheta_0}^{\pi} \sqrt{2\varkappa^2 - 1 - \cos \vartheta} d\vartheta = \\ &= 8\sqrt{2\varepsilon}qR_0v[E(\varkappa) - (1 - \varkappa^2)K(\varkappa)], \end{aligned} \quad (2.14)$$

$E$  — полный эллиптический интеграл второго рода,  $J_{||}$  представляет собой продольный инвариант. Заметим, что соотношение вида (2.13) может быть получено в общем виде для любого квазипериодического движения [9].

Выполняя дифференцирование в (2.13) и учитывая (2.10), находим среднюю скорость дрейфа  $v_{\zeta}$  запертых частиц вдоль  $\zeta$ :

$$v_{\zeta} = \frac{\langle \Delta \xi \rangle}{\tau} = \frac{v^2 q \varepsilon}{\Omega r^2} G(\kappa), \quad (2.15)$$

где

$$G(\kappa) = G_1(\kappa) + \frac{2q'r}{q} G_2(\kappa) \equiv \left( \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2q'r}{q} \left( \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 + \kappa^2 \right). \quad (2.16)$$

Зависимость  $v_{\zeta}$  от  $\kappa$  изображена на рис. 2. При  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  точки отражения захваченных частиц лежат в области  $\vartheta < \pi/2$ , т. е. в области, где магнитное поле растет наружу.

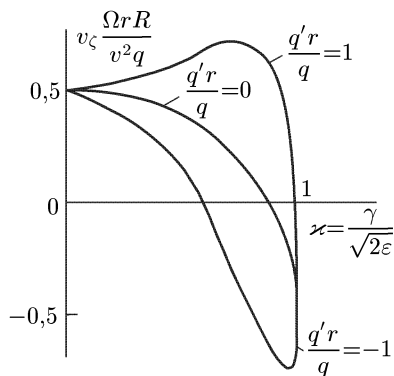


Рис. 2

При малых  $\kappa$  частица находится вблизи наружного обвода магнитной поверхности (между точками  $\cos \vartheta_0 = -(1 - 2\kappa^2)$ ), т. е. в области, где магнитное поле убывает наружу. В этой области при  $q' = 0$  частица совершает неблагоприятный с точки зрения устойчивости дрейф ( $v_{\zeta} > 0$ ). Но по мере увеличения  $\kappa$  скорость уменьшается, и при  $\kappa_1 = 0,9$  ( $\cos \vartheta_0 = 0,66$ ) она меняет знак (см. рис. 2) — соответствующие частицы большую часть времени проводят в области  $\vartheta < \pi/2$ , где магнитное поле возрастает наружу от магнитной поверхности. При  $q' \neq 0$  точка  $\kappa_1$ , в которой  $v_{\zeta}$  обращается в нуль, перемещается в область больших  $\kappa$  при  $q'r/q > 0$  и в область меньших  $\kappa$  (т. е. область благоприятного магнитного дрейфа расширяется) при  $q'r/q < 0$ .

При  $q' \neq 0$  точка  $\kappa_1$ , в которой  $v_{\zeta}$  обращается в нуль, перемещается в область больших  $\kappa$  при  $q'r/q > 0$  и в область меньших  $\kappa$  (т. е. область благоприятного магнитного дрейфа расширяется) при  $q'r/q < 0$ .

### 3. Дисперсионное уравнение для потенциальных колебаний

Перейдем к исследованию неустойчивости неоднородной плазмы в тороидальной геометрии. Рассмотрим сначала случай бесстолкновительной плазмы и предположим, что колебания являются потенциальными. При этом кинетическое уравнение для малых колебаний имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f' + \mathbf{v} \nabla f' + \frac{e}{M} \nabla \varphi_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f' + \frac{e}{Mc} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f' = -\frac{e}{M} \nabla \varphi' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f. \quad (3.1)$$

Здесь равновесная функция распределения  $f$  удовлетворяет уравнению:

$$\mathbf{v} \nabla f + \frac{e}{M} \nabla \varphi_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f + \frac{e}{Mc} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f = 0, \quad (3.2)$$

$\varphi_0$  — невозмущенный потенциал электрического поля,  $\varphi'$  — его возмущение,  $\mathbf{H}$  — невозмущенное магнитное поле,  $f'$  — возмущение функции распределения.

В равновесном состоянии  $\varphi_0$  есть функция магнитной поверхности, т. е. переменной  $r$ . Переходя в движущуюся вдоль  $\zeta$  систему координат, можно добиться, чтобы  $\nabla\varphi_0$  обратился в нуль. Для рассматриваемых здесь нами локальных возмущений можно считать, что переносная скорость не зависит от  $r$ , и, следовательно, член с  $\nabla\varphi_0$  в (3.1), (3.2) можно опустить.

Далее мы предположим, что равновесная функция распределения  $f$  близка к максвелловской  $f_0$  с зависящими от  $r$  плотностью  $n$  и температурой  $T$ . Тогда с точностью до малых величин первого порядка по  $\Omega^{-1}$  получаем из (3.2)

$$f = f_0 - \frac{1}{\Omega} [\mathbf{h}\mathbf{v}] \nabla f_0. \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.1) имеет вид

$$f' = -\frac{e}{M} \int_{-\infty}^t \nabla\varphi' \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{v}} dt', \quad (3.4)$$

где интегрирование ведется по невозмущенной траектории (2.1). В силу периодичности по  $\zeta$  и  $\vartheta$  функцию  $\varphi$ , и аналогично  $f'$ , можно представить в виде

$$\varphi' = \exp(-i\omega t + im\vartheta - il\zeta) \varphi(r, \vartheta), \quad (3.5)$$

где  $\varphi(r, \vartheta)$  — периодическая функция  $\vartheta$ , на которую можно наложить требование, чтобы она имела минимальное число узлов по  $\vartheta$ . Подставляя (3.3), (3.5) в (3.4) и производя обычные вычисления [10], легко можно получить выражение для возмущенной плотности частиц, а из условия квазинейтральности, т. е. равенства возмущенной плотности электронов и ионов, находим дисперсионное уравнение для частоты  $\omega$  малых колебаний:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i} \right) n_0 \varphi = \\ & = -i \sum_{j=e,i} \int_{-\infty}^0 \int dk \exp \{ -i\omega t + ik(r_j(t') - r) + im(\vartheta'_j - \vartheta) - il(\xi'_j - \zeta) \} \times \\ & \quad \times J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) \frac{1}{T_j} j_{0j}(\omega - \omega_j^*) \varphi dt' d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь суммирование в правой части проводится по электронам и ионам, причем  $e_i = e$ ,  $e_e = -e$ ,  $J_0$  — функция Бесселя,

$$\omega_j^* = \frac{cT_j m}{e_j H r} \frac{1}{f_{0j}} \frac{d}{dr} f_{0j}$$

— дрейфовая частота зарядов соответствующего сорта. Уравнение (3.6) написано для низкочастотных колебаний  $\omega \ll \Omega$ . Кроме того, предполагая, что  $m \gg 1$ , мы пренебрегли  $\partial\varphi/\partial\vartheta'$  по сравнению с  $m\varphi'$ . Уравнение (3.6) отличается от соответствующего выражения в цилиндрической геометрии только более сложным характером движения частиц по невозмущенной траектории. Уравнение (3.6) представляет собой однородное интегральное уравнение, а  $\omega$  является его собственным значением. Интегрирование в правой части (3.6) ведется по координатам ведущего центра (так как

мы уже произвели усреднение по быстрому циклотронному вращению частиц), и чтобы записать уравнение (3.6) в явном виде, необходимо воспользоваться дрейфовыми траекториями, найденными в разд. 2.

Так как с точки зрения макроскопических эффектов наиболее опасны крупномасштабные возмущения, то мы предположим, что локализация возмущений по  $r$  значительно больше  $\Delta r$  — амплитуды колебаний частиц по радиусу при невозмущенном дрейфе, при этом в (3.6) можно положить  $J_0 = 1$ . Но, с другой стороны, будем считать, что  $\varphi$  имеет достаточно узкую локализацию по сравнению с  $a$ , так что  $\omega = \omega(r)$  представляет собой локальное значение для собственной частоты. Рассмотрим сначала интеграл в правой части (3.6) по  $t'$  для пролетных частиц. Для них  $\vartheta' - \vartheta \approx v_{||}t'/(Rq)$ ,  $\zeta' - \zeta \approx q(\vartheta' - \vartheta)$ , и, следовательно, интегрирование по  $dt'$  приводит к множителю вида  $i\{\omega - (m - lq)v_{||}/(qR)\}^{-1}$ . Для рассматриваемых нами колебаний  $\omega \lesssim \omega^* \sim m\rho_i v_i/a^2$ , и этот множитель даже при  $m - lq \ll 1$  (но  $m - lq \gg \rho_i m/a$ ) значительно меньше  $\omega^{-1}$ , и поэтому вкладом в интеграл (3.6) от пролетных частиц можно пренебречь по сравнению с членом порядка единицы в левой части.

При вычислении интеграла по  $t'$  для запертых частиц полагаем  $\zeta'_j - \zeta = q(\vartheta'_j - \vartheta) + \xi'_j$ . Тогда в экспоненте перед  $\vartheta'_j - \vartheta$  будет стоять множитель  $(m - lq)$ . Число  $m$  у нас пока не фиксировано. Очевидно, что для любого заданного  $l$  можно подобрать такое  $m$ , чтобы разность  $m - lq$  была меньше  $1/2$ . Такой выбор означает, что в качестве  $\varphi$  мы выбираем функцию, имеющую минимальное число узлов по  $\vartheta$ . Рассмотрим сначала более простой случай  $m - lq \ll 1$ . Тогда величиной  $(m - lq)(\vartheta' - \vartheta)$ , являющейся для захваченных частиц периодической функцией  $t'$  порядка  $(m - lq)$ , можно пренебречь. Кроме того, пренебрегая величиной  $l(\xi' - \langle \xi \rangle)$  за один период колебаний, произведем усреднение по периоду колебаний  $\tau_j$  и положим  $\xi'_j \approx \langle \xi'_j \rangle = v_{\zeta j} t$  (где  $v_{\zeta j}$  определено выражением (2.15)). Тогда уравнение (3.6) примет вид

$$\left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i}\right) n_0 \varphi = \sum_j \frac{1}{T_j} \int d\mathbf{v} f_{0j} \frac{\omega - \omega_j^*}{\omega + l v_{\zeta j}} \int_{-\tau_j}^0 \varphi' \frac{dl'}{\tau_j}. \quad (3.7)$$

Здесь вместо интегрирования по  $t'$  можно перейти к интегрированию по  $\vartheta'$ , полагая (как это следует из (2.9), (2.10))

$$\frac{dt'}{\tau} = \frac{1}{4\sqrt{2}K(\varkappa)} (r\varkappa^2 - 1 - \cos \vartheta')^{-1/2} d\vartheta'.$$

Далее,  $d\mathbf{v}$  для запертых частиц при  $\varepsilon \ll 1$  имеет вид

$$d\mathbf{v} = 2\pi v^2 dv d\gamma_\vartheta, \quad (3.8)$$

где  $\gamma_\vartheta = \pi/2 - \psi$  — угол в пространстве скоростей в точке  $\vartheta$ . В силу сохранения поперечного адиабатического инварианта имеем

$$\frac{v_\perp^2}{v^2} = \cos^2 \gamma_\vartheta = \cos^2 \gamma_\pi - \varepsilon(1 + \cos \vartheta), \quad (3.9)$$

где  $\gamma_\pi$  — введенный нами ранее угол в пространстве скоростей в точке  $\vartheta = \pi$ . Согласно (3.9) при малых  $\varepsilon$  имеем  $\gamma_\vartheta^2 = \gamma_\pi^2 - \varepsilon(1 + \cos \vartheta)$ . Отсюда

находим

$$d\gamma_{\vartheta} = \frac{\gamma_{\pi} d\gamma_{\pi}}{\gamma_{\vartheta}} = \frac{\sqrt{\varepsilon} d\chi^2}{\sqrt{2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta}}. \quad (3.10)$$

Подставляя полученные выражения для  $dt'$ ,  $d\gamma_{\vartheta}$  в (3.7), получим интегральное уравнение для потенциала  $\varphi$

$$\left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i}\right) \varphi = \sum_j \frac{1}{T_j} \sqrt{2\varepsilon} \int 2\pi v^2 \frac{f_{0j}}{n_0} dv \int_{(1+\cos\vartheta)/2}^1 \frac{d\chi^2}{K(\chi)\sqrt{2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta}} \times \\ \times \frac{\omega - \omega_j^*}{\omega + lv_{\zeta j}} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{\varphi(\vartheta') d\vartheta'}{\sqrt{2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta}}. \quad (3.11)$$

Для случая равных температур  $T_e = T_i$  скорости дрейфа электронов и ионов  $v_{\zeta e}$ ,  $v_{\zeta i}$  при одной и той же энергии  $m_j v^2/2$  равны по величине и противоположны по знаку. Это приводит к существенному упрощению уравнения:

$$\varphi = 2\pi\sqrt{2\varepsilon} \int_0^{\infty} v^2 \frac{f_0}{n_0} dv \int_{(1+\cos\vartheta)/2}^1 \frac{d\chi^2}{K(\chi)\sqrt{2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta}} \times \\ \times \frac{\omega^2 - \omega^* lv_{\zeta}}{\omega^2 - l^2 v_{\zeta}^2} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{\varphi(\vartheta') d\vartheta'}{\sqrt{2\chi^2 - 1 - \cos\vartheta}}. \quad (3.12)$$

В интегральное уравнение (3.12) не входит масса частиц, уравнение также не зависит от знака заряда.

#### 4. Неустойчивость на запертых частицах

Наличие запертых частиц приводит к появлению возможности развития неустойчивости желобкового типа на захваченных частицах. В самом деле, запертые частицы, находящиеся в некоторой силовой трубке между магнитными пробками, совершенно изолированы от других областей в плазме, и, следовательно, они вполне аналогичны захваченным частицам в обычном пробкотроне. Так как они совершают, вообще говоря, неблагоприятный магнитный дрейф в убывающем к периферии магнитном поле, то, как и в обычной магнитной ловушке на малом возмущении желобкового типа, должно происходить такое разделение зарядов, при котором начальное возмущение нарастает. Все отличие от открытого пробкотрона состоит в том, что в тороидальной геометрии желобки захваченных частиц погружены в плазму пролетных частиц, которая благодаря своей большой продольной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^0 = 1 + 8\pi n e^2 / (T k_{\parallel}^2) \gg 1$  в значительной мере компенсирует заряды запертых частиц. Но так как  $\varepsilon^0 \neq \infty$ , то полной компенсации не происходит, и, следовательно, в плазме должна развиваться сильно замедленная желобковая неустойчивость на запертых частицах.

Чтобы в этом убедиться, обратимся к исследованию интегрального уравнения (3.12). Введем вместо  $\omega$  инкремент  $\gamma$ :  $\omega = i\gamma$ . При этом знаменатель  $\omega^2 - l^2 v_\zeta^2 = -(\gamma^2 + l^2 v_\zeta^2)$  станет монотонно возрастающей функцией  $\gamma$ . Вспомним теперь, что  $v_\zeta$  является малой величиной порядка  $\varepsilon$ . Так как выражение справа в (3.12) содержит малый множитель  $\sqrt{\varepsilon}$ , то оно может стать порядка единицы, если знаменатель  $\gamma^2 + l^2 v_\zeta^2$  будет достаточно мал. При этом можно пренебречь  $\gamma^2$  в числителе по сравнению с  $\omega^* l v_\zeta$ . Таким образом, по порядку величины имеем из (3.12)

$$1 \sim \sqrt{\varepsilon} \frac{\varepsilon \omega^*}{\gamma^2 + \varepsilon^2 \omega^{*2}},$$

здесь использована малость  $l v_\zeta \sim \varepsilon \omega^*$ . Отсюда видно, что  $\gamma^2 \sim \varepsilon^{3/2} \omega^{*2}$ , поэтому величиной  $\varepsilon^2 \omega^{*2}$  в знаменателе (3.12), при достаточно малых  $\varepsilon$ , можно пренебречь по сравнению с  $\gamma^2$ .

Для решения (3.12) удобно, кроме того, перейти к фурье-представлению, разлагая  $\varphi(\vartheta)$  в ряд по  $\cos \vartheta$ . Для этого положим

$$\varphi(\vartheta) = \sum_s e^{-is\vartheta} \varphi_s, \quad (4.1)$$

где  $\varphi_s = \varphi_{-s}$  — действительные коэффициенты. Подставляя это выражение в (3.12) и опуская, как указано выше, малые члены в числителе и знаменателе, после интегрирования по  $\vartheta$  получим

$$\lambda(1 + \delta_{0s})\varphi_s = \sum_{s'} F_{ss'} \varphi_{s'}, \quad (4.2)$$

где

$$\lambda = \frac{2\pi}{3} \frac{\gamma^2}{\sqrt{2} \varepsilon \omega_M \omega_p^*}, \quad \omega_B = \frac{-2lq\varepsilon cT}{eHr^2} \approx \frac{-2mcT}{eHrR_0},$$

$$\omega_p^* = \frac{c}{eH} \frac{m}{rn^0} \frac{d}{dr} n^0 T,$$

а коэффициенты  $F_{ss'}$  определяются соотношениями

$$F_{ss'} = F_{ss'}^1 + \frac{2q'r}{q} F_{ss'}^2, \quad F_{ss'}^i = \int_0^1 \frac{G_i \Pi_s \Pi_{s'}}{K(\varkappa)} d\varkappa^2. \quad (4.3)$$

Выражение для  $G$  приведено в разд. 2, формула (2.16), а функции

$$\Pi_s = \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{\cos s\vartheta d\vartheta}{\sqrt{2\varkappa^2 - 1 - \cos \vartheta}} \quad (4.4)$$

выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Собственные значения  $\lambda$  находятся из условия обращения в нуль детерминанта матрицы, соответствующей системе (4.2). Значения матричных



элементов  $F_{ss'}^i$  для  $s, s' \leq 2$  приведены в таблице.

Таблица

$F_{ss'}^1$				$F_{ss'}^2$			
$s'$	$s$			$s'$	$s$		
	0	1	2		0	1	2
0	0,681	-0,543	0,011	0	0,888	-0,145	-0,189
1	-0,543	0,380	-0,151	1	-0,145	0,128	0,029
2	0,011	-0,151	0,161	2	-0,189	0,029	0,091

Как мы видим,  $F_{ss'}^i$  быстро убывают с ростом  $s$ . Поэтому при вычислении наибольшего значения  $\lambda$ , отвечающего наиболее неустойчивым колебаниям, достаточно ограничиться системой конечного порядка, считая  $\varphi_s = 0$  при  $s$  больше некоторого значения  $s_0$ . Ограничиваясь системой уравнений второго порядка, находим для случая  $q' = 0$ ,  $\lambda = 0,74$  (если решить систему третьего порядка, то  $\lambda = 0,76$ ). Второй корень близок к нулю и лежит практически за пределами применимости нашего рассмотрения. Вспоминая определение  $\lambda$  и приравнявая его полученному численному значению, получим

$$\gamma^2 \approx \sqrt{\varepsilon} \frac{\omega_M \omega_p^*}{2}. \quad (4.5)$$

Из системы (4.2) можно найти коэффициенты разложения  $\varphi(\vartheta)$  в ряд Фурье. При  $q' = 0$  с точностью до  $\cos 2\vartheta$  имеем

$$\varphi(\vartheta) = 1 - 1,4 \cos \vartheta + 0,4 \cos 2\vartheta. \quad (4.6)$$

Как мы видим,  $\varphi$  локализована в области  $\vartheta = \pi$ . Другими словами, колебания развиваются на наружном обводе тора, их амплитуда стремится к нулю при  $\vartheta \rightarrow 0, 2\pi$ . Поскольку  $\varphi(\vartheta = 0) = 0$ , то  $m$  можно считать близким к  $lq$  даже в том случае, если  $lq$  (а следовательно, и  $m$ ) не является целым числом. Таким образом, полученное здесь решение распространяется на все значения  $r$ , если положить  $m \approx lq$ .

Рассмотрим теперь, как влияет на неустойчивость изменение  $q'$ . Как мы уже упоминали выше, увеличение  $q'$  приводит к усилению неустойчивости, а при  $q' < 0$  имеет место некоторая стабилизация, связанная с укорочением участка силовой линии между точками поворота при движении наружу.

Полагая  $\lambda = 0$ , нетрудно найти критическое значение для параметра  $q'r/q$ , ниже которого колебания устойчивы. Оно оказывается равным  $-1,5$ , так что условие стабилизации неустойчивости на захваченных частицах имеет вид

$$\frac{d \ln q}{d \ln r} < -\frac{3}{2}. \quad (4.7)$$

Вернемся теперь к уравнению (3.12). Напомним, что при переходе к более простому уравнению (4.2) мы пренебрегали величиной  $l^2 v_\zeta^2$  порядка  $\varepsilon^2$  по сравнению с  $\gamma^2 \sim \varepsilon^{3/2}$ . Но так как  $\gamma^2$  пропорционально  $dp/dr$ , а  $v_\zeta$  от давления не зависит, то даже при малом  $\varepsilon$  такое пренебрежение не всегда

оправдано, а поскольку  $\gamma^2/v_c^2$  всего лишь  $\sim\sqrt{\varepsilon}$ , то переход от (3.12) к (4.2) может быть незаконным даже при не очень малом градиенте давления. Нетрудно видеть, что при уменьшении  $dp/dr$  инкремент уменьшается и обращается в нуль при некотором критическом значении  $dp/dr$ . Чтобы найти это критическое значение градиента, положим в (3.12)  $\omega = 0$ , а затем, опять переходя к фурье-представлению, получим систему

$$\mu(1 + \delta_{0s})\varphi_s = \sum_{s'} P_{ss'}\varphi_{s'}. \quad (4.8)$$

Здесь

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{2\varepsilon}} \left( \frac{d \ln n/T}{d \ln r} \right)^{-1}, \quad P_{ss'} = \int_0^1 \frac{\Pi_s \Pi_{s'}}{K(\varkappa)G(\varkappa)} d\varkappa^2, \quad (4.9)$$

где интеграл по  $d\varkappa^2$  следует брать в смысле главного значения. Нетрудно видеть, что при  $|rq'/q| \rightarrow \infty$  матричные элементы  $P_{ss'}$  убывают. Наибольшее значение  $\mu$  соответствует  $rq'/q \sim 1$ . Нами было проведено вычисление корней  $\mu$  при  $rq'/q = 1/2$ . Для этого значения  $P_{00} = 11,9$ ,  $P_{01} = 2,02$ ,  $P_{11} = 2,24$ , откуда находим  $\mu_1 = 6,5$ ,  $\mu_2 = 1,7$ . Беря большее значение  $\mu_1$  и подставляя его в (4.9), находим условие устойчивости

$$-\frac{(1-\eta)}{(1+\eta)} \frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{1}{3} \sqrt{\frac{r}{R_0}}, \quad (4.10)$$

где  $\eta = d \ln T/d \ln n$ . Практически это условие может быть выполнено только в отдельных узких областях изменения  $r$ .

## 5. Диссипативная неустойчивость на запертых частицах

Неустойчивость на запертых частицах весьма чувствительна к столкновениям. В самом деле, в результате столкновений захваченные частицы будут выбрасываться в «пролетный» конус в пространстве скоростей, т. е. соответствующее возмущение будет затухать с некоторой эффективной частотой  $\nu_{\text{эф}}$ . При  $\varepsilon \ll 1$  угол  $\gamma$  в пространстве скоростей, разделяющий область захваченных частиц от пролетных, является малым ( $\sim\sqrt{\varepsilon}$ ). Доля захваченных частиц, соответственно, также мала. Поэтому в интеграле столкновений в форме Ландау для захваченных частиц можно сохранить лишь слагаемое со второй производной от функции распределения, так что приближенно интеграл примет диффузионный вид

$$\text{St}_j \approx \nu_j v_j^2 \Delta_{\vartheta} f', \quad (5.1)$$

где  $\Delta_{\vartheta}$  — лапласиан в пространстве скоростей,  $\nu_j$  — частота столкновений частиц сорта  $j$ ;  $v_j^2 = 2T_j/M_j$ . В этом интеграле столкновений наибольшим является слагаемое, содержащее вторую производную по  $\gamma$  и по порядку величины  $\text{St} \sim f' \nu_j / \gamma^2 \sim f' \nu_j / \varepsilon$ . Другими словами,  $\nu_{\text{эф}} = \nu / \varepsilon$ .

Если в уравнении (3.1) для  $f'$  добавить интеграл столкновений и учесть его в виде  $-\nu_{\text{эф}} f'$ , то, как нетрудно видеть, в знаменателе дисперсионного

уравнения (3.7)  $\omega$  заменится на  $\omega + i\nu_{\text{эф}}$ . Так как в не очень плотной плазме пролетные частицы можно считать распределенными по Больцману, то дисперсионное уравнение с учетом столкновений можно приближенно записать в виде

$$2 = \sqrt{\varepsilon} \frac{\omega - \omega^*}{\omega + i\nu_i/\varepsilon - \omega_B} + \sqrt{\varepsilon} \frac{\omega + \omega^*}{\omega + i\nu_e/\varepsilon + \omega_B}. \quad (5.2)$$

Здесь слагаемые в правой части, учитывающие вклад запертых частиц, содержат множитель  $\sqrt{\varepsilon}$ , равный доле захваченных частиц,  $\omega_B$  — частота магнитного дрейфа, а множитель  $1/\varepsilon$  перед  $\nu_e$  и  $\nu_i$  учитывает диффузионный характер кулоновских столкновений. Для простоты считаем  $T_e = T_i$ . Если  $\nu_{\text{эф}} \gg \omega$ , то в (5.2) можно пренебречь частотой  $\omega$  по сравнению с  $\omega^*$ . Кроме того, можно совершенно пренебречь магнитным дрейфом, в результате получаем следующее выражение для частоты и инкремента:

$$\omega = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \omega^* + i \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{(\omega^*)^2}{\nu_e} - i \frac{\nu_i}{\varepsilon}. \quad (5.3)$$

Как видим, имеет место неустойчивость на запертых частицах, не зависящая от знака кривизны силовых линий (т. е.  $\omega_B$ ). Эту неустойчивость естественно назвать диссипативной неустойчивостью на запертых частицах.

При уменьшении  $\nu$  инкремент неустойчивости возрастает, достигая максимального значения порядка  $\gamma_{\text{max}} \sim \sqrt{\varepsilon} \omega^*$  при  $\nu \sim \varepsilon^{3/2} \omega^*$ , затем он начинает опять убывать. В плотной плазме, т. е. при достаточно частых столкновениях, неустойчивость на запертых частицах, как видно из (5.3), стабилизируется. Условие стабилизации имеет вид

$$\nu_i \nu_e > \frac{\varepsilon^3 (\omega^*)^2}{4}. \quad (5.4)$$

Отсюда видно, что в первую очередь стабилизируются длинноволновые возмущения с малыми  $m$ . При уменьшении  $k_z = (m - lq)/(qR)$  в выражении для возмущенной плотности необходимо учитывать пролетные частицы, и рассмотренная здесь неустойчивость переходит в дрейфово-диссипативную (см., например [11]).

## Заключение

Мы рассмотрели здесь конкретную задачу о неустойчивости на запертых частицах в тороидальной системе с осевой симметрией при  $H_{\vartheta} \ll H_0$ . Однако сама неустойчивость имеет гораздо более общий характер. В самом деле, в любой тороидальной системе должны иметься области с пониженным магнитным полем, в которых имеются частицы, захваченные между магнитными пробками. Если эти частицы совершают неблагоприятный магнитный дрейф, т. е. находятся в области спадающего к периферии магнитного поля, то в бесстолкновительной плазме должна развиваться неустойчивость на запертых частицах. В достаточно плотной плазме, когда частота электронных столкновений превышает дрейфовую частоту  $\omega^*$ , может развиваться диссипативная неустойчивость на запертых частицах, для которой знак магнитного дрейфа оказывается несущественным.

При увеличении частоты столкновений инкремент этой неустойчивости быстро убывает, так что для достаточно плотной плазмы неустойчивость на запертых частицах можно считать неопасной.

*Список литературы*

1. *Longmire L., Rosenbluth M.* // Ann. Phys. 1957. V. 1. P. 120.
2. *Кадомыцев Б.Б.* // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 1958. Т. IV. С. 16.
3. *Иоффе М.С., Соболев Р.И., Тельковский В.Г., Юшманов Е.Е.* // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 1602; 1961. Т. 40. С. 40.
4. *Иоффе М.С., Соболев Р.И.* // Атомная энергия. 1964. Т. 17. С. 366.
5. *Suydam B.* // Proc. 2-nd UN Intern. Conference PUAE. Geneva, 1958. V. 31. P. 157.
6. *Johnson J., Oberman C., Kulsrud R., Frieman E.* // Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 281.
7. *Кадомыцев Б.Б.* // ЖЭТФ. Письма. 1966. Т. 4. С. 15.
8. *Шафранов В.Д.* // Ядерный синтез. 1963. Т. 3. С. 183.
9. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* // Вопросы теории плазмы. 1963. Т. 2. С. 177.
10. *Rosenbluth M., Rostoker N., Krall N.* // Nucl. Fusion Suppl. 1962. Pt. 1, 143.
11. *Кадомыцев Б.Б.* // В сб.: Вопросы теории плазмы. Т. 4. — М.: Атомиздат, 1964. С. 288.

## ОБ УДЕРЖАНИИ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДАЛЬНЫХ ЛОВУШКАХ С РАЗРУШЕННЫМИ МАГНИТНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ\*)

Показано, что разрушение магнитных поверхностей в тороидальных ловушках, связанное с наличием внешних возмущений или несовершенством конструкции обмоток, должно приводить к утечке плазмы, имеющей величину порядка боровской в широком интервале изменения параметров плазмы.

### 1. Введение

Известно, что в тороидальных магнитных ловушках типа «стелларатор» наблюдается аномальная утечка плазмы с временем жизни  $\tau$ , близким к так называемому боровскому:  $\tau = \pi a^2 e H / (cT)$ , где  $a$  — радиус плазменного шнура,  $T$  — температура,  $H$  — магнитное поле [1, 2]. Единственным пока исключением служит работа [3], где наблюдалось значительно лучшее удержание цезиевой плазмы с временем жизни, близким к классическому\*\*) (мы не рассматриваем здесь осесимметричных систем типа токамак и левитрон). Для объяснения аномальной утечки плазмы обычно привлекаются неустойчивости дрейфового типа, которые приводят к эффектам типа турбулентной диффузии, причем соответствующие коэффициенты диффузии в сильно вытянутых вдоль  $\mathbf{H}$  системах могут приближаться к боровскому. Однако удивительная близость экспериментально наблюдаемого времени жизни к боровскому в очень широком интервале изменения температуры и плотности плазмы наводит на мысль, что утечка плазмы может быть связана с более грубыми эффектами. В настоящей работе показано, что к утечке порядка боровской должно приводить разрушение магнитных поверхностей, связанное с несовершенством магнитной системы.

### 2. Качественное рассмотрение

Рассмотрим случай, когда замкнутые внутри плазмы магнитные поверхности отсутствуют. Другими словами, предположим, что каждая силовая линия рано или поздно выходит из плазмы, как бы «протыкая»

\*) ЖЭТФ. 1967. Т. 52. Вып. 4. С. 1039–1048.

\*\*) Несколько лучшее удержание по сравнению с боровским наблюдалось также в [4].

плазменный шнур, входя в него с одной стороны и выходя из другой. Если мысленно выпрямить шнур плазмы и пренебречь влиянием кривизны силовых линий на движение электронов и ионов, то в качестве простейшей модели рассматриваемой ситуации можно представить себе цилиндрический столб с несколько наклонным магнитным полем по отношению к оси цилиндра:  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ , где  $\mathbf{h}$  — поперечная компонента поля, а  $\mathbf{H}_0$  направлено вдоль цилиндра. В магнитогидродинамическом приближении плазма в таком поле должна была бы разлетаться вдоль силовых линий со скоростью порядка тепловой скорости ионов  $v_i = \sqrt{T/m_i}$ . Внешне такой разлет выглядел бы как расширение шнура вдоль  $\mathbf{h}$  со скоростью  $v_t \sim hv_i/H_0$ .

Однако эта картина соответствует действительности лишь при не очень малом наклоне силовых линий, т. е. при не очень малом  $h/H_0$ . В самом деле, поскольку электроны и ионы плазмы дрейфуют в азимутальном направлении со скоростью  $v_d \sim \rho_i v_i/a$ , где  $\rho_i = v_i/\Omega_{Hi} = v_i m_i c/(eH)$  — средний ларморовский радиус ионов,  $a$  — поперечный размер плазменного шнура, то магнитогидродинамическое приближение теряет силу, когда скорость разлета становится сравнимой с  $v_d$ . При  $v_t < v_d$ , т. е.

$$\frac{h}{H_0} < \frac{\rho_i}{a}, \quad (1)$$

магнитогидродинамическое приближение неприменимо, и следует воспользоваться либо уравнениями двухжидкостной магнитной гидродинамики, если частота столкновений частиц достаточна для поддержания максвелловского распределения, либо кинетическими уравнениями, если плазма разрежена.

Мы рассмотрим здесь случай достаточно плотной плазмы, хотя это совершенно несущественно.

Предположим для простоты, что температура электронов постоянна по сечению шнура. Кроме того, допустим, что  $h$  не слишком мало, а именно

$$\frac{h}{H_0} > \frac{\rho_e}{a} = \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \frac{\rho_i}{a}, \quad (2)$$

где  $\rho_e$  — средний ларморовский радиус электронов. Условие (2) эквивалентно предположению  $hv_e/H_0 > v_d$ , где  $v_e = \sqrt{T/m_e}$  — средняя тепловая скорость электронов. Оно означает, что электроны успевают прийти в равновесие вдоль силовых линий магнитного поля, т. е. для них справедливо уравнение равновесия

$$\nabla(nT) = -en\mathbf{E} - enc^{-1}[\mathbf{v}_e\mathbf{H}], \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}_e$  — средняя (гидродинамическая) скорость электронов. Поскольку  $T = \text{const}$ , то уравнение (3) можно представить в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}_e\mathbf{H}] - \nabla\left(\frac{T \ln n}{e}\right). \quad (4)$$

Подставляя это выражение в уравнение Максвелла, получим

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \text{rot } \mathbf{E} = \text{rot } [\mathbf{v}_e\mathbf{H}]. \quad (5)$$

Отсюда следует, что магнитное поле заморожено в электроны. Это означает, что если даже в начальный момент была создана покоящаяся плазма,

то в силу вмороженности магнитное поле внутри плазмы будет увлекаться электронами, как показано штриховыми линиями на рис. 1, и в результате натяжения силовых линий плазма начнет вращаться со скоростью порядка  $v_d \sim \rho_i v_i / a$ . Момент количества движения при этом передается, очевидно, от внешних обмоток.

Вращение плазмы такого вида было рассмотрено Тонеманом и Колбом [5, 6] в применении к  $\theta$ -пинчам. Если кинетическая энергия вращения  $m_i n v_d^2 / 2 \sim \rho_i^2 n T / a^2$  значительно меньше энергии поперечного поля  $h^2 / 8\pi$ , т. е.

$$\beta = \frac{8\pi n T}{H^2} \ll \frac{h^2 a^2}{H_0^2 \rho_i^2}, \quad (6)$$

то возмущением поперечного поля за счет вращения можно пренебречь. Поскольку согласно (2)  $\frac{h^2 a^2}{H_0^2 \rho_i^2} > \frac{m_e}{m_i}$ , то условие (6) заведомо выполняется при  $\beta < \frac{m_e}{m_i}$ .

Таким образом, если  $h/H_0 > \rho_e/a$ , то плазма низкого давления должна прийти во вращение со скоростью порядка дрейфовой, и при  $h/H_0 < \rho_i/a$  ионы за время одного оборота по азимуту не будут успевать заметно смещаться вдоль  $\mathbf{H}$ .

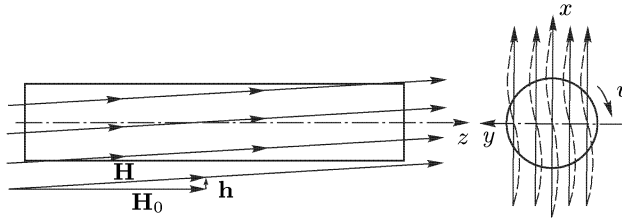


Рис. 1

Однако само вращение приводит к появлению центробежной силы  $m_i g \sim m_i v_d^2 / a \sim m_i v_i^2 \rho_i^2 / a^3$ . Так как в отсутствие магнитных поверхностей ничто не препятствует плазме расширяться вдоль  $\mathbf{h}$ , то эта центробежная сила должна приводить к разлету плазмы со скоростью порядка  $\sqrt{g a} \sim v_i \rho_i / a$ .

Другими словами, плазма должна распаться со временем жизни порядка  $\tau \sim a^2 / v_i \rho_i \sim a^2 e H / (c T)$ . Поскольку при этом электроны вытекают в основном вдоль силовых линий, а ионы — поперек, то весь процесс сходен с диффузией слабо ионизованной плазмы в перекошенном металлическом баллоне [7], где имеет место эффект закорачивания токов Саймона [8].

Ниже будет дано более подробное рассмотрение стационарного состояния плазмы и развития течения вследствие центробежной неустойчивости.

### 3. Течение плазмы с холодными ионами

Рассмотрение колебаний, развивающихся за счет центробежной неустойчивости, удобно начать с более простого случая плазмы с холодными ионами ( $T_i = 0$ ). Кроме того, мы рассмотрим сначала однородные вдоль шнура течения и только после этого перейдем к более общему случаю двумерного течения.

Введем декартову систему координат с осью  $z$ , совпадающей с осью плазменного шнура, и осью  $x$ , направленной вдоль  $\mathbf{h}$ . В предположении однородности, т. е.  $\partial/\partial z = 0$ , из проекции уравнения равновесия для электронов (3) на направление магнитного поля  $\mathbf{H}$  находим

$$\frac{\partial}{\partial x} nT_e = en \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (7)$$

т. е.

$$\varphi = \frac{T_e}{e} \ln n + \varphi_0(y), \quad (8)$$

где  $\varphi$  — потенциал электрического поля:  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . (Температуру электронов  $T_e$  мы считаем постоянной по сечению шнура.) Для ионов при  $T_i = 0$  можно воспользоваться уравнением

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -en\nabla\varphi + \frac{en}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad (9)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость ионов,  $d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ .

При  $h/H_0 < c_s/(a\Omega_{Hi})$ , где  $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$  — скорость звука, можно пренебречь продольной скоростью ионов (вдоль  $\mathbf{H}$ ), и в этом же приближении в уравнении (9) под  $\mathbf{H}$  можно подразумевать  $\mathbf{H}_0$ . Другими словами, в рассматриваемом приближении уравнение (9) описывает двумерное течение с  $v_z = 0$ .

Если в уравнении (9) пренебречь малым инерционным членом в левой части, то с учетом (8) получим

$$\mathbf{v} = \frac{cT_e}{eH^2 n} [\mathbf{H}_0 \nabla n] + \mathbf{u}, \quad (10)$$

где через  $\mathbf{u}$  мы обозначили величину  $(c/eH^2)[\mathbf{H}_0 \nabla \varphi_0]$ . В рассматриваемом нами случае однородных вдоль  $z$  колебаний  $\mathbf{u}$  имеет отличную от нуля только  $x$ -компоненту, причем  $u_x = u_x(t, y)$ . Подставляя выражение (10) в уравнение непрерывности и учитывая, что первое слагаемое в (10) не приводит к изменению плотности, так как соответствующие линии тока находятся на поверхности  $n = \text{const}$ , получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} + u_x \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Отсюда видно, что в стационарном состоянии  $u_x = 0$ , т. е. потенциал  $\varphi_0$  должен быть постоянным.

Обратимся теперь к уравнению (9) с инерционным членом, в котором, ввиду его малости, вместо  $\mathbf{v}$  можно подставить выражение (10). Чтобы получить замкнутое уравнение для  $u_x$ , мы должны учесть следующее обстоятельство.

Из уравнения (3) при  $\partial/\partial z = 0$  следует, что равновесие вдоль магнитного поля автоматически приводит к компенсации градиента давления электронов вдоль  $x$  электрическим полем  $E_x$ , т. е. к соотношению (7), из которого следует  $v_{ey} = 0$ . Другими словами, электроны могут перемещаться вдоль оси  $x$  и вдоль силовых линий, но не поперек магнитных поверхностей, которые в рассматриваемом нами случае совпадают с поверхностями  $y = \text{const}$ . Отсюда в силу квазинейтральности и в предположении, что отсутствует эффект замыкания токов через внешние проводники (например,



через проводящую камеру), следует, что для ионов должно иметь место соотношение

$$\int n v_y dx = 0, \quad (12)$$

т. е. поток ионов через любую магнитную поверхность должен также обращаться в нуль.

Интегрируя  $x$ -компоненту уравнения (9) и учитывая соотношения (8), (11), (12), получим

$$\int n \frac{dv_x}{dt} dx = N \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{cT_e}{eH} \frac{\partial u_x}{\partial y} \int \frac{\partial n}{\partial x} dx + \frac{c^2 T_e^2}{e^2 H^2} \int \left( \frac{\partial n}{\partial y} \frac{\partial^2 n}{\partial x \partial y} - \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \right) \frac{dx}{n} = 0, \quad (13)$$

где  $N = \int n dx$  — погонная плотность.

Предположим, что плазменный шнур не касается стенок. Тогда

$$\int \frac{\partial n}{\partial x} dx = 0,$$

и уравнение (13) принимает вид

$$N \frac{\partial u_x}{\partial t} = - \frac{c^2 T_e^2}{e^2 H^2} \int \left( \frac{\partial n}{\partial y} \frac{\partial^2 n}{\partial x \partial y} - \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \right) \frac{dx}{n}. \quad (14)$$

В стационарном состоянии интеграл в правой части уравнения (14) должен обращаться в нуль. Нетрудно видеть, что, в частности, он обращается в нуль для любого симметричного относительно плоскости  $x$  состояния, т. е.  $n(x, y) = n(-x, y)$ . Допустим теперь, что на исходное симметричное равновесное состояние  $n$  наложено небольшое возмущение  $n'$ , и рассмотрим эволюцию этого возмущения в линейном приближении. Линеаризуя уравнение (14), а затем дифференцируя его по  $t$  и учитывая (11), получим после интегрирования по частям

$$N \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = - \frac{c^2 T_e^2}{e^2 H^2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial y} \int \frac{1}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 dx \right\}. \quad (15)$$

Так как это уравнение эллиптического типа, то оно соответствует неустойчивости, т. е. экспоненциально нарастающим со временем решениям. Например, для одного из простейших распределений  $n = n_0 \exp(-r^2/a^2)$  уравнение (15) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = - \frac{2c^2 T_e^2}{e^2 H^2 a^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad (16)$$

откуда для возмущений вида  $\exp(\gamma t + ik_y y)$  находим инкремент нарастающих малых возмущений:

$$\gamma = \sqrt{2} \frac{cT_e}{eHa} k_y. \quad (17)$$

По порядку величины для крупномасштабных возмущений с  $k_y \sim 1/a$  имеем  $\gamma \sim cT_e/(eHa^2) \sim D_B/a^2$ , где  $D_B = (1/16)cT_e/(eH)$  — бомовский коэффициент диффузии.

Чтобы яснее представить себе механизм неустойчивости, рассмотрим деформацию шнура, при которой профиль  $n = \text{const}$  становится эллиптическим (рис. 2), и выделим отдельный слой  $AB$ . Как мы видим из рис. 2,

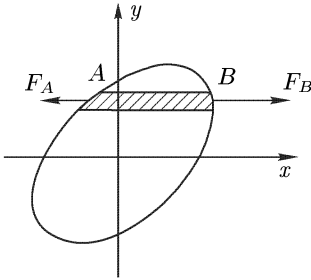


Рис. 2

в точке  $B$  кривизна кривой  $n = \text{const}$ , совпадающей в первом приближении с линией тока, больше, чем в точке  $A$ . Поэтому центробежная сила  $F_B$  в точке  $B$  больше центробежной силы  $F_A$  в точке  $A$ , и, следовательно, слой  $AB$  должен двигаться ускоренно вдоль оси  $x$ , т. е. начальное возмущение нарастает. Полная компенсация сил, приложенных к данному слою, возможна только для частного вида распределений, например для симметричных  $n(x, y) = n(-x, y)$ . В общем случае вращающаяся плазма не может быть в равновесии, она должна «соскальзывать» отдельными слоями вдоль магнитных поверхностей, т. е. в рассматриваемом

случае вдоль  $x$ . Так как характерная скорость этого скольжения порядка  $cT_e/(eHa)$ , то время утечки плазмы должно быть порядка  $\tau \sim eHa^2/(cT_e)$ .

Мы рассмотрели здесь одномерные «пластинчатые» течения, соответствующие скольжению однородных вдоль  $z$  слоев плазмы. Наряду с ними возможны течения, периодические по  $z$ .

Выберем некоторое сечение  $z = 0$  и рассмотрим картину двумерного течения в этой плоскости. Из уравнения равновесия электронов вдоль магнитного поля

$$T_e \left( H_0 \frac{\partial n}{\partial z} + h \frac{\partial n}{\partial x} \right) = en \left( H_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + h \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (18)$$

находим

$$\varphi = \frac{T_e}{e} \ln n + \varphi_0 \left( x - \frac{h}{H_0} z, y \right), \quad (19)$$

так что в плоскости  $z = 0$  потенциал  $\varphi_0$  можно считать произвольной функцией  $x, y$  с периодом  $b = hL_0/H_0$  вдоль  $x$  ( $L_0$  — длина шнура). С учетом (19) из уравнения равновесия (3) получаем с точностью до членов порядка  $h/H_0$

$$\mathbf{v}_e = \frac{c}{H^2} [\mathbf{H} \nabla \varphi_0] = \frac{c}{H} \left\{ -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \frac{h}{H_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right\}. \quad (20)$$

Как мы видим, скорость электронов направлена вдоль эквипотенциальной поверхности  $\varphi_0 = \text{const}$ , т. е. поток электронов через такую поверхность должен быть равен нулю. А в силу квазинейтральности в отсутствие замыкания токов через камеру должен обращаться в нуль поток ионов через поверхность  $\varphi_0 = \text{const}$ . Таким образом, если умножить уравнение (9) на  $\mathbf{v}_e = cH^{-2}[\mathbf{H} \nabla \varphi_0]$  и проинтегрировать по поверхности  $\varphi_0 = \text{const}$ , представляющий собой цилиндр произвольного сечения с образующими вдоль  $\mathbf{H}$ , то последний интеграл при этом исчезнет, так как он приводится к интегралу от  $n \mathbf{v} \nabla \varphi_0$ . Что касается интеграла от первого слагаемого в правой части (9), то он также обращается в нуль, так как с учетом (8) он представляет собой интеграл по замкнутой поверхности от поверхностной дивергенции.

Таким образом, имеем

$$\int_{\varphi_0=\text{const}} n \left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{H} \right] \nabla \varphi_0 dS = 0. \quad (21)$$

Здесь под  $\mathbf{H}$  можно подразумевать  $\mathbf{H}_0$ , поскольку продольным движением ионов мы пренебрегаем. Наряду с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{c[\mathbf{H}_0 \nabla \varphi_0]}{H^2} \nabla n = 0$$

уравнение (21) дает полное описание произвольного двумерного течения. В частном случае  $\partial \varphi_0 / \partial x = 0$  оно приводится к рассмотренному ранее уравнению движения (14) для одномерного течения вдоль оси  $x$ . Если выбрать  $\varphi_0$  в виде  $\varphi_0 = \varphi_0(t, y - \alpha(x - hz/H_0))$ , то в плоскости  $z = 0$  эквипотенциали снова будут представлять собой прямые линии  $y = ax + \text{const}$ , но лишь наклонные по отношению к оси  $x$ . При этом течение снова является одномерным, представляющим собой скольжение слоев плазмы, и уравнения движения должны иметь вид (11), (14), но в повернутой системе координат.

Отсюда следует, в частности, что стационарное состояние имеет место только при осевой симметрии, когда поверхности  $n = \text{const}$  представляют собой соосные цилиндры кругового сечения.

В общем случае течение представляет собой конвекцию, при которой электроны перемещаются отдельными трубками, расположенными вдоль силовых линий, как это имеет место при развитой желобковой неустойчивости плазмы в магнитных ловушках [9]. Можно думать, что такое течение является турбулентным, и в этом случае малый множитель  $1/16$  в выражении для бомовского коэффициента диффузии  $D_B = \frac{1}{16} \frac{cT_e}{eH}$  соответствует малости длины перемешивания по сравнению с характерным размером плазмы  $a$ , как это имеет место при гидродинамической турбулентности [10].

#### 4. Конвекция плазмы с горячими ионами

Поскольку по отношению к электронам конвекция за счет центробежной неустойчивости сходна с двумерной конвекцией при желобковой неустойчивости, то при  $T_i \neq 0$  следует учитывать эффект конечного ларморовского радиуса, приводящего в случае желобковой неустойчивости к стабилизации малых колебаний [11].

Для описания этого эффекта можно воспользоваться уравнениями двухжидкостной гидродинамики с учетом «косой» бесстолкновительной вязкости [12]. В рассматриваемом нами случае несжимаемого двумерного течения уравнение движения для ионов может быть записано в виде

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{T_i}{\Omega_{Hi} H} ([\mathbf{H}_0 \nabla n] \nabla) \mathbf{v} - \nabla \left\{ \frac{T_i n}{2\Omega_{Hi}} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right\} = \\ = -\nabla n T_i - en \nabla \varphi + \frac{en}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0]. \quad (22)$$

Рассмотрим опять одномерное однородное вдоль  $z$  течение. Подставляя в уравнение (22) вместо  $\varphi$  выражение (8) и пренебрегая малыми членами в левой части (22), находим

$$\mathbf{v} = \frac{c(T_e + T_i)}{eH^2 n} [\mathbf{H}_0 \nabla n] + \mathbf{u}, \quad (23)$$

где  $\mathbf{u}$  опять имеет только  $x$ -компоненту, причем  $u_x$  не зависит от  $x$  и  $z$ .

Интегрируя уравнение (22) по  $x$ , с учетом квазинейтральности получаем опять уравнение типа (13):

$$\int \left( n \frac{dv_x}{dt} - \frac{cT_i}{eH^2} [\mathbf{H}_0 \nabla n] \nabla v_x \right) dx = 0. \quad (24)$$

Подставляя сюда вместо  $\mathbf{v}$  его приближенное значение (23), в предположении, что плазма не касается стенок, получаем

$$N \frac{\partial u_x}{\partial t} = - \frac{c^2 T_e (T_e + T_i)}{e^2 H^2} \int \left( \frac{\partial n}{\partial y} \frac{\partial^2 n}{\partial x \partial y} - \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \right) \frac{dx}{n}. \quad (25)$$

Это уравнение отличается от (14) только тем, что множитель  $T_e^2$  заменяется на  $T_e(T_e + T_i)$ .

Таким образом, при  $T_i \neq 0$  конвекция имеет точно такой же характер, как и в холодной плазме, только скорость течения, а следовательно, и коэффициент турбулентной диффузии возрастают на фактор  $\sqrt{1 + T_i/T_e}$ , т. е.  $D \sim (cT_e/eH) \sqrt{1 + T_i/T_e}$ . Как видим, в рассматриваемом случае «слоистого» течения вдоль магнитных поверхностей эффект конечного ларморовского радиуса не только не приводит к стабилизации малых колебаний, но и вообще не изменяет характера течения.

## 5. Обсуждение общего случая

Выше мы рассмотрели простейшую систему без магнитных поверхностей, замкнутых внутри плазмы, а именно, мы считали магнитное поле однородным. Однако предположение об однородности поля является совершенно несущественным, и вывод о развитии конвекции в отсутствие магнитных поверхностей является более общим.

В самом деле, для вывода о наличии неустойчивости стационарного состояния существенным было лишь предположение о том, что силовые линии не остаются внутри плазмы, т. е. имеется некоторая поперечная составляющая магнитного поля, пронизывающая шнур в поперечном направлении и приводящая к его вращению, и что электроны распределены по Больцману.

Первое допущение имеет место в любом случае разрушенных поверхностей или поверхностей, выходящих наружу от плазменного шнура, так как под разрушением как раз и понимается возможность выхода силовых линий наружу от плазмы.

Что касается второго допущения, то в разреженной плазме оно оправдано, если за время  $t \sim a^2/\rho_i v_i \sim a^2/\rho_e v_e$  дрейфовых колебаний электроны успевают пролетать вдоль силовых линий, т. е. если длина  $L_H$  силовой

линии до выхода из плазмы не превышает значения  $v_e t \sim a^2/\rho_e$ :

$$L_H < \frac{a^2}{\rho_e}. \quad (26)$$

Это условие эквивалентно (2).

В плотной плазме за счет конечной проводимости может появляться дополнительное электрическое поле при перетекании электронов вдоль силовых линий  $E_{\parallel} \sim j_{\parallel}/\sigma$ . Потенциал этого поля  $\varphi \sim E_{\parallel} L_H$  с учетом того, что  $j_{\parallel} \sim L_H j_{\perp}/a$ , при  $j_{\perp} \sim enD/a \sim en\rho_i v_i/a$  составляет величину  $\varphi \sim L_H^2 en v_i \rho_i/a^2 \sigma$ . Из условия малости этого потенциала по сравнению с  $T_e/e$  находим условие установления максвелловского распределения:

$$L_H < a\sqrt{\Omega_{He}\tau_e}, \quad (27)$$

где  $\Omega_{He} = eH/m_e c$ ,  $\tau_e$  — среднее время электрон-ионных столкновений.

В применении к существующим экспериментам условия (26), (27) являются очень мягкими, т. е. даже в том случае, если силовая линия до выхода из плазмы совершает очень много оборотов вдоль тора, условия (26), (27) выполнены.

Что касается конкретных деталей разрушения магнитных полей, то они не являются существенными, достаточно лишь, чтобы на выходящих из плазмы силовых линиях можно было построить некоторые магнитные поверхности, вдоль которых могли бы скользить электронные трубки. (Так как концы этих трубок находятся снаружи от плазмы, то наличие перекрещенности силовых линий не изменяет качественно картину конвекции.)

Для полноты картины рассмотрим еще обратный случай, когда в плазме существуют замкнутые поверхности. Так как электроны легко приходят в равновесие и устанавливаются по закону Больцмана, то их температуру на заданной магнитной поверхности можно считать постоянной, и из продольной компоненты уравнения равновесия (3) находим  $\varphi = (T_e/e) \ln n + \varphi_0$ , где  $T_e$  и  $\varphi_0$  являются функциями только магнитных поверхностей. Отсюда следует, что вектор  $\vec{\nabla}(nT_e) - en\nabla\varphi$  направлен перпендикулярно магнитной поверхности, и, следовательно, как видно из (3), нормальная к поверхности компонента скорости электронов  $v_{en}$  равна нулю. Другими словами, при наличии распределения Больцмана электроны не могут перемещаться поперек магнитных поверхностей. Очевидно, что это утверждение равносильно вмороженности силовых линий в электроны.

Таким образом, эффекты аномальной диффузии могут возникать только за счет отклонения электронов от распределения Больцмана, т. е. к ним могут приводить либо трение электронов об ионы, либо взаимодействие с колебаниями резонансных электронов. А поскольку все эти эффекты в высокотемпературной плазме невелики, то при наличии магнитных поверхностей следует ожидать удержания значительно лучшего, чем согласно формуле Боме.

В свете изложенного выше становится понятным еще один вопрос. Как известно, бомовская диффузия наблюдается только в тороидальных системах, а в открытых ловушках при условии подавления желобковой неустойчивости удержание плазмы значительно лучше (см., например [13]). Если бомовская диффузия связана с разрушением магнитных поверхностей, то эта ситуация легко объяснима.

В самом деле, если бы плазменный шнур рис. 1 не был свернут в тор, а представлял бы собой ограниченной длины цилиндр, то он мог бы существовать и без вращения. При этом, как обычно, внутри плазмы должно возникать радиальное электрическое поле  $\mathbf{E} = \nabla p_i / (en)$ , уравнивающее давление ионов. Что касается небольшого несовпадения поверхностей  $n = \text{const}$  с силовыми линиями, то в сильно вытянутом цилиндре оно привело бы просто к небольшим колебаниям типа дрейфовых, которые макроскопически выглядели бы как вращение цилиндра вокруг центральной силовой линии в сторону дрейфа электронов. Реального вращения ионов при этом не было бы.

При замыкании (или очень сильном удлинении) шнура картина существенно меняется — радиальное электрическое поле  $\mathbf{E} = \nabla p_i / (en)$  уже не может установиться, так как при этом возникли бы электронные токи. Электроны вмораживаются в силовые линии, шнур начинает вращаться, и развивается центробежная неустойчивость.

Таким образом, в отсутствие замкнутых магнитных поверхностей тороидальный шнур существенно отличается от ограниченного с торцов плазменного шнура.

Рассмотрим еще один эффект, который может появиться при переходе к более сложной геометрии, чем на рис. 1, а именно, эффект минимума среднего магнитного поля.

Если к учтенной выше центробежной силе добавить силу от диамагнитного эффекта, приводящего к дополнительной стабилизации плазмы, то по порядку величины получим

$$\gamma^2 \sim \frac{v_i^2}{a^2} k^2 \rho_i^2 - \frac{v_i^2}{aR}, \quad (28)$$

где  $\gamma$  — инкремент нарастания малых возмущений,  $R$  — средний радиус кривизны силовых линий. В выражении (28) первое слагаемое отвечает центробежной неустойчивости (см. (16), (17)), а второе учитывает эффект неоднородности магнитного поля. Из соотношения (28) видно, что при наличии достаточно глубокого минимума среднего магнитного поля происходит стабилизация длинноволновых возмущений, но неустойчивость сохраняется при  $k^2 \rho_i^2 > a/R$ . Естественно считать, что этот эффект может привести к снижению эффективного коэффициента диффузии на фактор  $1/(ka) \sim (\rho_i/a) \sqrt{R/a}$ .

## 6. Заключение

В настоящей работе показано, что даже небольшое разрушение магнитных поверхностей, при котором длина силовой линии  $L_H$  до выхода из плазмы не превышает (26), (27), в плазме развиваются центробежная неустойчивость и конвекция, приводящая к утечке порядка бомовской, если  $L_H > a^2/\rho_i$ .

Так как соответствующие условия очень легко выполняются, то бомовская диффузия должна наблюдаться в очень широком интервале изменения параметров плазмы.

Поскольку в тороидальных системах сложной геометрии очень трудно добиться замыкания магнитных поверхностей, то следует отдать предпо-

чение осесимметричным системам, таким как токамак, левитрон и др., где при одинаковых требованиях к точности изготовления обмоток легче создать замкнутые магнитные поверхности.

### Список литературы

1. *Bishop A.S., Hinnov E.* // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA, Vienna, 1966. V. 2. P. 673.
2. *Stodick W., Grove D.J., Kessler J.O.* // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA, Vienna, 1966. V. 2. P. 687.
3. *Eckhardt D., Gierke G., Grieger G.* // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA, Vienna, 1966. V. 2. P. 719.
4. *Акулина Д.К., Батанов Г.М., Бережнецкий М.С., Гребенщиков Ф.Е., Рабинович М.С., Сбитников И.С., Шпигель И.С.* // Plasma Physics and Controlled Nucl. Fusion Research. IAEA, Vienna, 1966. V. 2. P. 733.
5. *Thonemann P.C., Kolb A.C.* // Phys. Fluids. 1964 V. 7. P. 1455.
6. *Kolb A.C., Thonemann P.C., Hinz E.* // Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 1005.
7. *Голант В.Е.* // УФН. 1963. Т. 79. С. 377.
8. *Simon A.* // Phys. Rev. 1955. V. 98. P. 317.
9. *Кадомцев Б.Б.* // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 328.
10. *Абрамович Г.Н.* Теория турбулентных струй. — М.: Физматгиз, 1960.
11. *Rosenbluth M.N., Rostoker N., Krall N.A.* // Nucl. Fus. Suppl. 1962. V. 1. P. 143.
12. *Брагинский С.И.* // В сб.: Вопросы теории плазмы. Т. 1. — М.: Атомиздат, 1963. С. 191.
13. *Иоффе М.С., Соболев Р.И., Тельковский В.Г., Юшманов Е.Е.* // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 40.

# ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ\*)

Рассматривается эффект аномального сопротивления плазмы при условии, что ларморовская частота электронов превышает их ленгмюровскую частоту. Показано, что при этом ионно-звуковая неустойчивость не приводит к заметному изменению проводимости. Однако если в плазме появляются ускоренные электроны, то за счет неустойчивости на аномальном доплер-эффекте они могут изотропизироваться и приводить к увеличению давления плазмы. Экспериментально этот эффект может проявляться как аномальное сопротивление.

## 1. Введение

Как известно, из-за дальнедействующего характера сил между заряженными частицами релаксационные процессы в плазме часто принимают форму коллективных эффектов, связанных с возбуждением колебаний. В частности, такого рода эффекты могут иметь место при протекании электрического тока через полностью ионизованную плазму. В условиях, когда электронная температура  $T_e$  значительно превосходит ионную  $T_i$ , при протекании тока достаточно большой величины возможна раскачка ионно-звуковых колебаний. Рассеяние электронов на этих колебаниях должно приводить к более быстрому обмену импульсом между электронной и ионной компонентами, т. е. к аномальному сопротивлению [1–3]. В отсутствие магнитного поля (точнее, при  $H \ll (4\pi m_e c^2 n_0)^{1/2}$ , где  $n_0$  — плотность электронов) присутствие шумов с уровнем всего лишь на один-два порядка выше теплового заметно увеличивает эффективную частоту электрон-ионных столкновений. Это связано с тем, что взаимодействие «незамагниченных» электронов с медленными колебаниями имеет характер упругого рассеяния, при котором быстро теряется направленная скорость. В результате, проводимость сможет стать значительно меньше столкновительной [1–3].

В экспериментах по джоулеву нагреву плазмы в токамаках — тороидальных установках с сильным продольным магнитным полем — было обнаружено [4], что эффект повышенного сопротивления наблюдается и при  $H > (4\pi m_e c^2 n_0)^{1/2}$ , т. е.  $\omega_H > \omega_0$ , где  $\omega_H = eH/(m_e c)$  — циклотронная, а  $\omega_0$  — ленгмюровская частота. Точнее говоря, в этих экспериментах было показано, что проводимость плазмы  $\sigma$  значительно меньше классической проводимости  $\sigma_0 = e^2 n_0 \tau_0 / m_e$ , рассчитанной по температуре электронов  $T_0$ , найденной из измерений диамагнитного сигнала, т. е. давления плазмы  $p = n_0 T_0$  (вклад ионов в давление мал). В связи с этим представляет интерес рассмотреть вопрос об аномальном сопротивлении плазмы при  $\omega_H > \omega_0$ .

Следует иметь в виду, что при  $\omega_H > \omega_0$  существенно изменяется характер взаимодействия электронов с колебаниями. В этом случае лармо-

---

\*) Кадомцев В.Б., Погуце О.П. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. Вып. 6(12). С. 2025–2033.



ровский радиус электронов меньше дебаевского, так что поперечная энергия тепловых электронов представляет собой адиабатический инвариант — при взаимодействии с колебаниями поля она остается неизменной. Поэтому результаты для слабого магнитного поля [1–3] не могут быть перенесены на случай  $\omega_H > \omega_0$ .

В настоящей работе проводится обсуждение физических процессов, которые могут иметь место при протекании тока через плазму в сильном магнитном поле, и оценивается величина аномального сопротивления.

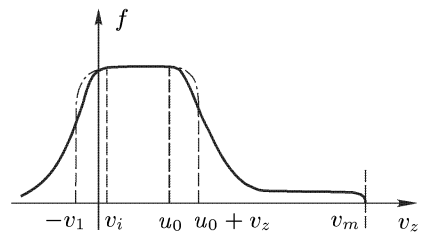
## 2. Качественное рассмотрение

Изучение слабо нелинейных коллективных процессов в плазме естественно разбить на три этапа. Прежде всего в линейном приближении нужно исследовать, какие неустойчивости могут развиваться в плазме. Затем обратный эффект воздействия колебаний на функцию распределения частиц по скоростям. При малой амплитуде колебаний для этой цели достаточно воспользоваться квазилинейным приближением, согласно которому развитие колебаний сопровождается образованием «плато» на функции распределения в области резонансного взаимодействия частиц с волнами. И, наконец, для полного решения задачи и определения как спектра шумов, так и макроскопических эффектов, ими создаваемых, следует решить нелинейное кинетическое уравнение для волн с учетом рассеяния волн на частицах и процессов трансформации одних волн в другие.

Рассмотрим с этой точки зрения интересующую нас задачу. Предположим, что  $T_e \gg T_i$  и что направленная скорость электронов  $u = j/(en_0)$  значительно превышает скорость звука  $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ . Будем считать, что магнитное поле не очень сильное, так что

$$\omega_{0i} = \left( \frac{4\pi e^2 n_0}{m_i} \right)^{1/2} \gg \omega_{Hi} = \frac{eH}{m_i c}.$$

При этом ионы можно считать незамагниченными, и частота ионно-звуковых колебаний с длиной волны, больше электронной дебаевской, т. е.  $k < \omega_0/v_e$ , равна  $\omega = kc_s$ . Фазовая скорость таких волн вдоль магнитного поля равна  $v_\phi = \omega/k_z = kc_s/k_z$ , где  $k_z$  — продольная компонента волнового вектора  $\mathbf{k}$ . В зависимости от наклона вектора  $\mathbf{k}$  по отношению к направлению магнитного поля  $v_\phi$  может изменяться в широких пределах, начиная от  $c_s$  и выше. При  $k > \omega_0/v_e$  фазовая скорость уменьшается вплоть до  $v_\phi \sim v_i = \sqrt{T_i/m_i}$ . Таким образом, в области  $v_i < v_z < v_e = \sqrt{T_e/m_e}$



электроны имеют возможность вступать в резонансное взаимодействие с волнами, т. е. излучать ионно-звуковые волны черенковским механизмом. Вследствие этого во всей области скоростей  $v_i < v_\phi = v_z < v_p \sim u$ , где в отсутствие колебаний производная от функции распределения  $\partial f/\partial v_z$  была бы положительной, должны происходить раскачка ионно-звуковых колебаний и образование «плато» на электронной функции распределения (см. рисунок).

Если электрическое поле  $E$  значительно меньше критического  $E_c = m_e v_e / (e \tau_e)$ , то кроме ионно-звуковой неустойчивости никаких других высокочастотных неустойчивостей нет, и величина аномальной проводимости определяется шириной и положением плато на функции распределения. При  $u \ll v_e$  соответствующий эффект весьма мал. Однако образование плато не приводит к полной стабилизации неустойчивости — за счет столкновений в области плато поддерживается некоторый положительный наклон функции распределения  $\partial f / \partial v_z > 0$ , так что нарастание колебаний продолжается, хотя и со значительно меньшим инкрементом. Увеличение амплитуды колебаний приводит к тому, что в игру вступают нелинейные эффекты типа рассеяния на электронах и ионах. Рассеяние на электронах оказывается большим, чем на ионах. Оно происходит лишь на электронах вне области плато и сопровождается передачей им энергии. В результате, как будет показано ниже, область плато несколько расширяется, однако и в этом случае эффект дополнительного сопротивления невелик.

Таким образом, при  $\omega_H > \omega_0$  и  $E \ll E_c$  эффект аномального сопротивления мал. Обсудим теперь качественно случай  $E \sim E_c$ .

При приближении продольного электрического поля  $E$  к критическому  $E_c$  экспоненциально нарастает число убегающих электронов [5], так что на электронной функции распределения появляется «хвост» (см. рисунок). Нетрудно видеть, что эти электроны также могут приводить к раскачке колебаний плазмы. В самом деле, при наличии магнитного поля, кроме резонанса при  $\omega - k_z v_z = 0$ , существует резонанс на гармониках циклотронной частоты с учетом эффекта Доплера,  $\omega - n \omega_H - k_z v_z = 0$ , где  $n$  — произвольное целое число, положительное или отрицательное [6]. При  $n < 0$ , когда имеет место так называемый «аномальный» эффект Доплера, при частоте колебаний  $\omega \ll \omega_H$  условие резонанса приближенно имеет вид  $v_z \approx |n| \omega_H / k_z$ , т. е.  $v_z \approx \omega_H / k_z$  при  $|n| = 1$ .

В случае продольных колебаний разреженной плазмы существует две ветви колебаний с  $\omega \ll \omega_H$  — ионно-звуковые и ленгмюровские. Для ленгмюровских колебаний  $k_z$  не может превышать обратного дебаевского радиуса по электронной температуре,  $k_z < \omega_0 / v_e$ , т. е. резонансное взаимодействие может иметь место лишь при  $v_z > v_m = \omega_H v_e / \omega_0$ . Ионно-звуковые волны могут распространяться и при несколько больших  $k_z$ , вплоть до

$$k_z \sim \frac{\omega_{0i}}{v_i} \sim \sqrt{\frac{T_e}{T_i}} \frac{\omega_0}{v_e},$$

однако, как будет показано ниже, в этой области амплитуда колебаний весьма мала из-за рассеяния на ионах. Таким образом, резонансное взаимодействие электронов на аномальном эффекте Доплера начинается, грубо говоря, при  $v_z > v_m$ .

С квантовомеханической точки зрения условие резонанса можно рассматривать как закон сохранения энергии при излучении

$$\hbar \omega = n \hbar \omega_H + \hbar k_z v_z,$$

где  $\hbar \omega$  — энергия плазмона,  $n$  — изменение (уменьшение) магнитного квантового числа электрона, а

$$\hbar k_z v_z \approx - \frac{(m_e v_z - \hbar k_z)^2 - m_e^2 v_z^2}{2m_e}$$

— уменьшение продольной энергии электрона за счет «отдачи» при излучении плазмона с продольным импульсом  $\hbar k_z$  (при переходе к классике

постоянную Планка  $\hbar$  следует устремить к нулю). Таким образом, при аномальном эффекте Доплера излучение плазмона ( $\omega > 0$ ) сопровождается уменьшением продольной энергии электрона ( $k_z > 0$ ) и увеличением его поперечной энергии ( $n < 0$ ), а в случае нормального эффекта Доплера часть поперечной энергии переходит в продольную (при этом  $n > 0$ , и при  $\omega < \omega_H$  имеем  $k_z < 0$ , т. е. излучается обратная волна с  $v_\phi = \omega/k_z < 0$ ). При  $\omega \ll \omega_H$  энергия плазмона значительно меньше величины приращения поперечной энергии электрона, т. е. переход происходит при почти постоянной энергии электрона. Другими словами, при таком взаимодействии функция распределения электронов изотропизируется. Вследствие этого набор продольной энергии электронами в области  $v_z > v_m$  должен несколько притормаживаться, так как приобретаемая от электрического поля энергия частично переходит в поперечную.

Ускоренные электроны практически не испытывают парных столкновений. Кроме того, в плазме отсутствуют достаточно интенсивные колебания, которые могли бы изменить знак продольной скорости убегающих электронов. Поэтому убегающие электроны должны распределяться более или менее изотропно в полусфере  $v_z > v_m$  пространства скоростей.

Обозначим через  $v'$  среднюю скорость, а через  $n'$  — плотность убегающих электронов. Их плотность тока  $j'$  имеет порядок величины  $en'v'$ . В стационарных условиях величина  $v'$  определяется балансом между ускорением частиц в поле  $E$  и их утечкой. Обозначим через  $\tau_E$  время жизни быстрых частиц (по порядку величины оно равно так называемому энергетическому времени жизни). Тогда приближенно  $v' \approx eE\tau_E/m_e$ . Отсюда для полной плотности электрического тока  $j$  получим

$$j = \sigma_e E + j' = \sigma_e(1 + \Gamma)E, \quad (1)$$

где

$$\sigma_e = \frac{e^2 n_0 \tau_e}{m_e}, \quad \Gamma \approx \frac{n' \tau_E}{n_0 \tau_e},$$

$\tau_e$  — среднее время столкновений тепловых электронов с ионами. Величина  $\Gamma$  показывает, какую долю от основного тока составляет ток убегающих электронов. При  $\tau_E \gg \tau_e$  вклад в ток от убегающих электронов может быть заметным даже при  $n' \ll n_0$ . При наличии убегающих электронов с  $v_\perp \sim v_\parallel \sim v'$  полное давление плазмы складывается из теплового  $nT_e$  (в предположении  $T_e \gg T_i$ ) и давления убегающих электронов  $\sim m_e n' v'^2$ . Вводя обозначения  $\alpha = E/E_c$ ,  $p = n_0 T_0$  и учитывая, что  $v' \approx eE\tau_E/m_e$ ,  $E_c \approx m_e v_e / (e\tau_e)$ , получаем приближенно

$$T_0 = T_e(1 + A\Gamma), \quad (2)$$

где  $A = \alpha^2 \tau_E / \tau_e$ .

Рассмотрим соотношения (1), (2). Так как величина  $\Gamma$  пропорциональна  $n'$ , то она экспоненциально зависит от  $E/E_c$ . Согласно [5] число убегающих в единицу времени электронов приближенно равно

$$n \approx \frac{n}{\tau_e} \exp\left(-\frac{E_c}{E}\right), \quad E_c = \frac{L}{8} \frac{e}{d^2} = 1,6 \cdot 10^{-15} \frac{n_0}{T_e}$$

( $L \approx 15$ ,  $T_e$  в эВ). Из условия баланса числа быстрых электронов  $n \approx n' / \tau_E$

находим

$$\alpha = \frac{E}{E_c} = \frac{1}{\ln[\tau_E n_0 / (\tau_e n')]}.$$

При  $\tau_E n_0 \gg \tau_e n'$  величину  $\alpha$  с логарифмической точностью можно считать постоянной. Другими словами, в широких пределах изменения числа быстрых электронов  $n'$  величину  $E/E_c$  можно считать «замороженной» при значении  $\alpha = \text{const} \ll 1$ .

При увеличении  $E/E_c$  величина  $\Gamma$  экспоненциально нарастает, так что становится заметным вклад быстрых электронов в плотность тока (1) и давление (2). В зависимости от величины  $A$  при этом должны наблюдаться следующие явления. Если  $A \ll 1$ , то, согласно (1), должна резко возрасти проводимость плазмы, а температура при этом может оставаться практически постоянной. Наоборот, при  $A \gg 1$  должно наблюдаться увеличение «температуры»  $T_0$  при «замороженной» проводимости  $\sigma$ , что внешне выглядит как «аномальное» сопротивление. Если ввести в рассмотрение «классическую» проводимость  $\sigma_0$ , рассчитанную по «температуре»  $T_0$ , как это делается при обработке экспериментальных данных, то с учетом того, что классическая проводимость пропорциональна  $T^{3/2}$ , получаем из (1)

$$\frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{1}{1 + \Gamma} \left( \frac{T_0}{T_e} \right)^{3/2}. \quad (3)$$

Для сравнения с экспериментом удобно ввести в рассмотрение критическое поле  $E_{c0}$  при «температуре»  $T_0$ . Учитывая, что  $E_{c0} \sim 1/T_0$ , а электрическое поле в плазме  $E$  «заморожено» при значении  $E = \alpha E_c \sim \alpha/T_e$ , получаем из (3)

$$\frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{\alpha^{-3/2}}{1 + \Gamma} \left( \frac{E}{E_{c0}} \right)^{3/2}. \quad (4)$$

Здесь при  $A\Gamma \gg 1$  величину  $\Gamma$  можно представить как

$$\Gamma = \frac{1}{A} \frac{T_0}{T_e} = \frac{\tau_e}{\tau_E \alpha^3} \frac{E}{E_{c0}}.$$

Таким образом, при увеличении  $E/E_{c0}$  отношение  $\sigma_0/\sigma$ , характеризующее эффект «аномальности сопротивления», должно расти сначала как  $(E/E_{c0})^{3/2}$ , а затем, когда  $\Gamma$  становится больше единицы, как  $(E/E_c)^{1/2}$ . Соотношение (4) качественно соответствует экспериментальным данным, полученным на токамаке ТМ-3.

Заметим еще, что поскольку изотропизация убегающих электронов по скоростям начинается при  $v' > \omega_H v_e / \omega_0$ , то эффект увеличения поперечного давления по сравнению с тепловым, а следовательно, и эффект «аномальной проводимости», может наблюдаться только при

$$\frac{T_0}{T_e} > \frac{n' \omega_H^2}{n_0 \omega_0^2}.$$

С другой стороны, при очень большой энергии «горячих» электронов в плазме тороидального шнура становится существенным следующий эффект. Как только поперечная скорость ускоренных электронов  $v'$  становится больше

$$\sqrt{\frac{R}{a}} v'_z \approx \sqrt{\frac{R}{a}} v_m,$$

где  $R$  — большой,  $a$  — малый радиусы плазменного витка, они захватываются магнитными пробками на внутреннем обводе тора и из пролетных превращаются в запертые. За счет отражения от магнитных пробок запертые электроны меняют скорость  $v_z$  на противоположную, а затем в результате взаимодействия с ленгмюровскими (или ионно-звуковыми) волнами при нормальном эффекте Доплера они могут терять поперечную энергию и превращаться в пролетные с  $v_z < 0$ . Вследствие этого должна происходить полная изотропизация электронов с энергией

$$W \sim m_e v^2 > \frac{R}{a} m_e v_m^2 \sim \frac{R}{a} \frac{\omega_H^2}{\omega_0^2} T_e.$$

Соответственно, набор энергии такими электронами от внешнего поля резко замедляется, так что естественно ожидать, что  $T_0/T_e$  не будет превышать значения

$$\frac{R}{a} \frac{n'}{n_0} \frac{\omega_H^2}{\omega_0^2} < \frac{R}{a} \frac{\omega_H^2}{\omega_0^2}.$$

В результате, можно ожидать, что  $T_0/T_e$  будет иметь порядок величины  $\omega_H^2/\omega_0^2$ , т. е.

$$\frac{\sigma_0}{\sigma} = c_1 \frac{\omega_H^3}{\omega_0^3}, \quad (5)$$

где  $c_1$  — некоторый числовой множитель порядка единицы.

Соотношение (5) также согласуется качественно с экспериментальными результатами на ТМ-3.

### 3. Случай слабого электрического поля

Рассмотрим теперь более подробно случай  $E \ll E_c$ , когда убегающих электронов нет, и к дополнительному сопротивлению может приводить лишь раскачка ионно-звуковых колебаний неизотермической плазмы.

Для количественного описания слабой турбулентности, развивающейся при протекании продольного тока, можно воспользоваться системой кинетических уравнений для волн и частиц [7]. Эта система имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{m_c} E \frac{\partial f}{\partial v_z} = \text{St}(f) + \text{St}_q(f) + \text{St}_s(f), \quad (6)$$

$$\frac{k^2}{8\pi} \frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega_{\mathbf{k}}} \left\{ \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \nabla I_{\mathbf{k}} - \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \right\} = -(\epsilon''_i + \epsilon''_e) \frac{k^2}{4\pi} I_{\mathbf{k}} + S. \quad (7)$$

Здесь  $f$  — электронная функция распределения,  $\text{St}(f)$  — кулоновский интеграл столкновений электронов с электронами и ионами,  $\text{St}_q(f)$  — квазилинейный член взаимодействия электронов с волнами. В сильном магнитном поле  $\omega_H \gg \omega_0$  он имеет вид

$$\text{St}_q(f) = \frac{\partial}{\partial v_z} D_q \frac{\partial f}{\partial v_z}, \quad D_q = \frac{\pi e^2}{m_e^2} \int k_z^2 I_{\mathbf{k}} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - k_z v_z) d\mathbf{k}. \quad (8)$$

Член  $\text{St}_s(f)$  учитывает рассеяние электронов на волнах,  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$  — действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости, причем  $\epsilon''$  связана с инкрементом  $\gamma_{\mathbf{k}}$  соотношением  $\gamma_{\mathbf{k}} = -\epsilon''(\partial \epsilon'/\partial \omega)^{-1}$ . Напомним,

что для ионно-звуковых колебаний в пренебрежении затуханием на ионах ( $T_i \ll T_e$ ) частота и инкремент определяются соотношениями

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \frac{k^2 c_s^2}{1 + k^2 d^2}, \quad \gamma_{\mathbf{k}} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^3 m_i}{k^2 m_e n_0} \int k_2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - k_z v_z) \frac{\partial f}{\partial v_z} d\mathbf{v}, \quad (9)$$

где

$$c_s^2 = \frac{T_e}{m_i}, \quad d^2 = \frac{T_e}{4\pi e^2 n_0}.$$

В уравнении (7) интегральный член  $S$  учитывает рассеяние волн на электронах и ионах.

Электронная функция распределения должна быть определена при помощи уравнений (6), (7). Что же касается ионов, то для них приближенно можно принять максвелловское распределение с температурой  $T_i$ .

Из выражения (9) видно, что колебания раскачиваются лишь в той области фазовых скоростей ( $\omega/k_z > 0$ ), где  $\partial f/\partial v_z > 0$ . Именно в этой области интенсивность шумов  $I_{\mathbf{k}} \neq 0$  (точнее, много больше теплового уровня), и, следовательно,  $D_q \neq 0$ .

В предположении  $E \ll E_c$  энергия, вкладываемая в плазму в единицу времени,  $eunE \ll n_0 T_e/\tau_e$ , так что функция распределения не сильно отличается от максвелловской и уравнение (6) можно усреднить по  $v_{\perp}$  в предположении, что  $T_{\perp} = T_{\parallel}$ . Сохраняя для интеграла от функции распределения по поперечным скоростям то же самое обозначение  $f$ , получим из (6) в квазилинейном приближении для стационарного случая

$$\frac{e}{m_e} E \frac{\partial f}{\partial v_z} = \frac{v_e^2}{\tau_e} \frac{\partial}{\partial v_z} \left( \frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{m_e v_z}{T_e} f \right) + \frac{\partial}{\partial v_z} D \frac{\partial f}{\partial v_z}, \quad (10)$$

где первое слагаемое справа аппроксимирует кулоновский член столкновений.

Согласно (9), (10) колебания быстро нарастают по амплитуде в области, где  $\partial f/\partial v_z > 0$ , и создают плато на функции распределения в этой области. После однократного интегрирования (10) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial v_z} = \frac{1}{\tau_e} f(u_0 - u_z) \left( D_q + \frac{v_e^2}{\tau_e} \right)^{-1}, \quad (11)$$

где  $u_0 = e\tau_e E/m_e$ . Отсюда видно, что производная  $\partial f/\partial v_z$  положительна при  $v_z < u_0$ , причем  $u_0$  определяется тем же соотношением, что и направленная скорость  $u = j/(en_0)$  в отсутствие колебаний. При  $E \ll E_c$  величина  $u_0 \ll v_e$ . Так как образование плато мало изменяет величину продольного тока (всего лишь на  $\sim u/v_e$ , то в квазилинейном приближении эффект аномального сопротивления невелик.

Допустим теперь, что амплитуда колебаний настолько велика, что начинает играть роль эффект рассеяния волн на электронах. При  $kd \sim 1$  в члене рассеяния достаточно учесть лишь томсоновское рассеяние на «голых» электронах, пренебрегая поляризационными поправками. Соответствующее выражение можно получить, например, из результатов работы [7], учитывая, что в сильном магнитном поле ( $\omega_H \rightarrow \infty$ ) операторы  $\mathbf{kg}_{\mathbf{k}\omega}$  заменяются на

$$\frac{e}{m_e} \frac{k_z}{\omega - k_z v_z + i\nu} \frac{\partial}{\partial v_z}.$$

Кроме того, достаточно учитывать рассеяние на электронах лишь в области вне плато, где  $\partial f / \partial v_z$  немало. (Учет рассеяния на электронах в области плато был бы превышением точности в рамках рассматриваемой нами теории слабой турбулентности.) С учетом рассеяния уравнение (10) сохраняет тот же самый вид и лишь  $D_q$  вне плато заменяется на

$$D_s = \frac{\pi e^4}{2m_e} \int \frac{(k_z - k'_z)^2 \delta(\omega - \omega' - k_z v_z + k'_z v_z) I_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}'}}{(v_z - \omega/k_z)^2 (v_z - \omega'/k'_z)^2} d\mathbf{k} d\mathbf{k}', \quad (12)$$

а соответствующий вклад в член рассеяния волн имеет вид

$$S = \frac{\pi e^4}{m_e^3} \int \frac{(k_z - k'_z) \delta(\omega - \omega' - k_z v_z + k'_z v_z) I_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}'}}{(v_z - \omega/k_z)^2 (v_z - \omega'/k'_z)^2} \frac{\partial f}{\partial v_z} dv_z d\mathbf{k}'. \quad (13)$$

Видно, что рассеяние фононов на электронах приводит к дополнительной диффузии электронов в пространстве скоростей. Так как  $D_s$  очень быстро спадает с  $v_z$ , то эта диффузия просто расширяет область плато: там, где  $D_s \gg v_e^2 / \tau_e$ , производная  $\partial f / \partial v_z$  близка к нулю, а вне этой области функция  $f$  близка к сдвинутой максвелловской (ср. с (11)). От того, насколько расширяется область плато, и зависит величина аномального сопротивления.

Для оценки ширины этой области можно воспользоваться соотношениями баланса энергии и импульса ионно-звуковых волн. Умножим (7) соответственно на  $\omega$  и  $k_z$  и проинтегрируем по  $\mathbf{k}$ . В левой части мы получим утечку энергии и импульса за счет переноса волн к периферии шнура, т. е. по порядку величины соответственно  $c_s \mathcal{E} / a$  и  $c_s P_z / a$ , где  $\mathcal{E}$  — энергия,  $P_z$  — импульс волн,  $a$  — радиус плазменного шнура.

Что касается правой части, то в пренебрежении затуханием и рассеянием на ионах она выражается через интегралы от  $\varepsilon_e'' k^2 I_{\mathbf{k}} / 4\pi$  и  $S_e$ . Величина  $\varepsilon_e''$  выражается через производную  $\partial f / \partial v_z$ , которая дается соотношением (11). В этом соотношении в области плато можно пренебречь  $v_e^2 / \tau_e$  по сравнению с  $D_q$ . В числителе интеграла от  $\varepsilon_e'' k^2 I_{\mathbf{k}} / 4\pi$ , как нетрудно проверить, содержится интеграл, пропорциональный  $D_q$ , так что на  $D_q$  можно пропустить сокращения. Точно так же при интегрировании  $S_e$  с последующей симметризацией по  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  происходит сокращение интеграла в числителе с  $D_s$  в знаменателе. В результате уравнения баланса энергии и импульса волн принимают вид

$$\frac{c_s}{a} \mathcal{E} = \int \frac{m_e v_z (u_0 - v_z)}{\tau_e} f dv_z, \quad (14)$$

$$\frac{c_s}{a} P_z = \int \frac{m_e (u_0 - v_z)}{\tau_e} f dv_z, \quad (15)$$

где интегрирование проводится по области плато:  $-v_1 < v_z < u_0 + v_2$ . При этом интеграл по области квазилинейного плато  $0 < v_z < u_0$  является положительным, в соответствии с чем электроны в этой области генерируют волны. Электроны вне области квазилинейного плато поглощают энергию при рассеянии и поэтому полное плато не может быть заметно шире квазилинейного, иначе интеграл в (14) станет отрицательным и амплитуда шумов начнет уменьшаться.

Таким образом, в отсутствие убегающих электронов развитие ионно-звуковой неустойчивости неизотермической плазмы при  $\omega_H > \omega_0$  приводит

лишь к небольшому искажению электронной функции распределения в виде образования плато шириной порядка  $u = e\tau_e E/m_e$ . Соответствующий эффект уменьшения проводимости за счет раскачки колебаний оказывается малым, порядка  $\delta\sigma \sim -\sigma u/v_e$ .

## Заключение

В работе показано, что в случае сильного магнитного поля, когда циклотронная частота электронов превышает ленгмюровскую, при протекании продольного тока с направленной скоростью  $u = j/en_0$ , меньшей тепловой  $v_e = \sqrt{T_e/m_e}$ , эффект аномального сопротивления, в прямом смысле этого слова оказывается малым: проводимость уменьшается лишь на величину порядка  $\delta\sigma \sim -\sigma u/v_e$ . Однако при наличии достаточно долго живущих ускоренных электронов может иметь место эффект, который внешне выглядит как появление аномального сопротивления. А именно, за счет взаимодействия с колебаниями при аномальном эффекте Доплера убегающие электроны в значительной мере изотропизируются по скоростям и могут дать заметный вклад в давление плазмы. При этом «температура»  $T_0 = p/n_0$ , определяемая по давлению  $p$ , может быть значительно больше температуры  $T_e$  основных электронов. Соответственно классическая проводимость, рассчитанная по  $T_0$ , будет больше истинной. Не исключено, что именно такого типа эффект наблюдается в тороидальных системах Токамак [4]. Прямой ответ на этот вопрос могли бы дать рентгеновские измерения, по которым можно было бы судить о наличии или отсутствии убегающих электронов.

## Список литературы

1. *Field E.C., Fried B.D.* // Phys. Fluids. 1964. V. 7. P. 1937.
2. *Кораблев Л.В., Рудаков Л.И.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 220.
3. *Коврижных Л.М.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 1795.
4. *Арцимович Л.А., Бобровский Г.А., Мирнов С.В., Разумова К.А., Стрелков В.С.* // Атомная энергия. 1967. Т. 22. Вып. 4. С. 259.
5. *Dreicer H.* // Phys. Rev. 1959. V. 115. P. 238; 1960. V. 117. P. 329.
6. *Шафранов В.Д.* // В сб.: Вопросы теории плазмы.—М.: Атомиздат, 1963. Вып. 3. С. 81.
7. *Кадомицев Б.Б.* // В сб.: Вопросы теории плазмы.—М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 254–264.



## ЦИКЛОТРОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И СБРОСЫ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ В АДИАБАТИЧЕСКИХ ЛОВУШКАХ \*)

В адиабатических ловушках с магнитными пробками часто наблюдаются вспышки циклотронных колебаний с выбросом некоторой доли плазмы из ловушки. Будучи довольно общим по своей природе, это явление в своих деталях сильно зависит от параметров и конкретных экспериментальных условий.

В данной работе, ставящей своей целью теоретическое исследование циклотронной неустойчивости, имеются в виду эксперименты Иоффе с сотрудниками, которые наблюдали циклотронные колебания желобкового типа. Эти колебания имеют достаточно большую длину волны поперек силовых линий, что не согласуется с теорией циклотронной неустойчивости для однородной плазмы. В работе с самого начала учитывается неоднородность плазмы. Показано, что в такой плазме могут распространяться поверхностные циклотронные волны, у которых разделение зарядов электронов и ионов происходит лишь вблизи границы плазменного сгустка. Эти волны бегут по азимуту в ионную сторону, как и наблюдается в экспериментах Иоффе с сотрудниками. Частота колебаний близка к верхней гибридной ионной частоте, а механизм раскачки колебаний аналогичен неустойчивости отрицательной массы. Обсуждается вопрос о сбросе плотности плазмы во время вспышки циклотронных колебаний. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными.

### 1. Введение

После того, как в адиабатических ловушках была преодолена желобковая неустойчивость, на первый план выдвинулись неустойчивости, связанные с анизотропией функции распределения удерживаемых в ловушке частиц. При не очень высокой плотности эти неустойчивости проявляются в виде вспышек циклотронных колебаний, сопровождающихся выбросом некоторой доли плазмы из ловушки. В ряде случаев наблюдаемые экспериментально вспышки колебаний можно связать с теоретически предсказываемыми неустойчивостями. Однако полного соответствия между теорией и экспериментом пока еще установить не удается. Частично это связано с тем, что теоретические исследования, как правило, проводятся в рамках целого ряда упрощающих допущений, таких, как однородность магнит-

\*) *Кадомыцев В.Б., Погуце О.П.* // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. International Atomic Energy Agency. Vienna, 1969. V. II. P. 125-140.

ного поля, малая неоднородность плазмы и т. д. Чтобы установить, какие из этих допущений являются наименее безобидными, следует, естественно, обратиться на те экспериментальные данные, которые не согласуются с упрощенной теорией.

В данном докладе обсуждаются эксперименты М.С. Иоффе с сотрудниками на установке ПР-5. В этих экспериментах [1–3] наблюдались резкие сбросы плотности плазмы во время вспышек циклотронного излучения. Подробное исследование характеристик ВЧ-колебаний [4] показало, что они представляют собой бегущие по азимуту в сторону вращения ионов возмущения плотности заряда вида  $\exp(-i\omega t - im\theta)$ , где  $m$  соответствует числу волн, укладывающихся по азимуту. Экспериментально было установлено, что сильные сбросы плазмы происходят при раскачке колебаний с  $m = 2$ . Кроме того, наблюдаются малые скачки, соответствующие модам  $m = 3, 4$ , а иногда возникают небольшие колебания с  $m = 1$ .

Для всех этих колебаний поперечная длина волны оказывается значительно больше среднего ларморовского радиуса ионов. Но согласно теоретическим представлениям в однородной плазме такие волны должны быть устойчивыми [5]. Грубо говоря, колебания с большой длиной волны не могут различить такие тонкие особенности функции распределения ионов, как анизотропия или наличие выеденного конуса.

В данной работе с самого начала учитывается неоднородность плазмы и магнитного поля. Как будет показано ниже, за счет продольной неоднородности магнитного поля появляется возможность развития неустойчивости типа отрицательной массы [6–8]. Эта неустойчивость должна проявляться в развитии поверхностных волн, бегущих в ионную сторону, как и наблюдается экспериментально.

## 2. Основные уравнения

В ловушке ПР-5 плазма представляет собой сгусток сравнительно небольших размеров, расположенный в центре ловушки. Его продольная длина  $l$  около 30 см, а распределение плотности по радиусу может быть аппроксимировано экспонентой  $n_0 = \text{const} \cdot \exp(-r/r_0)$ , где  $r_0 \approx 3$  см. В области, занятой плазмой, магнитное поле можно считать слабо неоднородным, так что его зависимость от продольной координаты  $z$  может быть аппроксимирована параболой

$$H = H_0 \left( 1 + \frac{z^2}{L^2} \right), \quad (2.1)$$

а зависимость  $H$  от поперечных координат  $r, \theta$  вообще можно пренебречь. Следует заметить, что в рассматриваемом здесь случае плазмы с малым средним ларморовским радиусом ионов поперечная неоднородность поля вообще является менее существенной, чем продольная.

Как известно, в магнитном поле пробочной конфигурации (2.1) частицы совершают продольные колебания за счет отражения от «магнитных зеркал». Мы учтем этот эффект в дрейфовом приближении и тогда для описания поведения ионов в ловушке получим следующее упрощенное кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} f + (\mathbf{v}_\perp \nabla) f + v_z \frac{\partial}{\partial z} f - \frac{\partial H}{H \partial z} \frac{v_\perp^2}{2} \frac{\partial}{\partial v_z} f + \frac{e}{M} \left( -\nabla \varphi + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f = 0 \quad (2.2)$$

В этом уравнении мы учли изменение продольной скорости за счет отражения от пробок, но пренебрегли изменением поперечной энергии частиц при движении вдоль силовых линий, предполагая, что  $v_z^2 \ll v_\perp^2$  и, следовательно,  $v_\perp^2 \approx v^2 = \text{const}$ , в отсутствие электрических полей. В ловушке ПР-5, например, поперечная энергия более чем на порядок превосходит продольную, так что это приближение вполне оправдано.

В уравнении (2.2) удобно перейти к новым переменным. Для описания продольных колебаний мы введем переменные  $\lambda$ ,  $\beta$  типа действие–угол, связанные соотношениями:

$$z = \lambda \sin \beta, \quad v_z = \Omega \lambda \cos \beta, \quad (2.3)$$

где  $\Omega = v_\perp/L$  — частота продольных колебаний, а  $\lambda$  имеет смысл положения точки поворота, где  $v_z \approx 0$ , т. е.  $\beta = \pi/2$ . Очевидно, что  $\lambda^2 = z^2 + v_z^2/\Omega^2$ . Кроме того, в пространстве скоростей введем полярные (точнее, цилиндрические) координаты, так что для радиальной  $v_r$ , и азимутальной  $v_\theta$  компонент в обычной цилиндрической системе координат  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  будем иметь  $v_r = v_\perp \cos \alpha$ ,  $v_\theta = v_\perp \sin \alpha$ .

В этих переменных с учетом того, что  $\frac{\partial H}{H \partial z} \approx \frac{2z}{L^2}$ , уравнение (2.2) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} f + (\mathbf{v}_\perp \nabla) f + \Omega \frac{\partial}{\partial \beta} f - \omega_H \frac{\partial}{\partial \alpha} f = \frac{e}{M} \nabla_\perp \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\perp} f, \quad (2.4)$$

где  $\Omega = \frac{v_\perp}{L}$ ,  $\omega_H = \frac{eH}{Mc} = \frac{eH_0}{Mc} \left(1 + \frac{\lambda^2}{L^2} \sin^2 \beta\right)$ .

Учитывая, что в дальнейшем мы будем рассматривать колебания только желобкового типа с потенциалом, не зависящим от  $z$ , мы опустили слагаемое  $\frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial v_z} f$  в правой части этого уравнения.

Из уравнения (2.4) явно видно, что в отсутствие электрического поля частицы совершают колебания с частотой  $\Omega$  вдоль силовых линий и вращаются по азимуту  $\alpha$  в пространстве скоростей с зависящей от продольной координаты  $z$  циклотронной частотой  $\omega_H$ .

Наличие двух угловых переменных  $\alpha$  и  $\beta$  несколько усложняет математическую сторону задачи. Чтобы это усложнение не затенило физическую картину, мы рассмотрим сначала некоторый предельный случай очень быстрых продольных колебаний, т. е. устремим  $\Omega$  к  $\infty$ . Это означает, во-первых, что частота  $\Omega$  должна быть много больше, чем изменение частоты  $\Delta \omega_H$  на длине  $l$  плазменного сгустка  $\Delta \omega_H \sim \omega_H l^2/L^2$ , т. е.

$\rho_i = \frac{v_\perp}{\omega_H} > \frac{l^2}{L}$ . Во-вторых,  $\Omega$  должна быть больше расстройки  $\Delta \omega$ , т. е.

отклонения частоты колебаний  $\omega$  от  $\omega_H$ , поскольку для рассматриваемых ниже колебаний вида  $f' \sim \exp(-i\omega t + i\alpha)$  именно эта величина характеризует порядок малости суммы первого и последнего членов в левой части уравнения (2.4). В установке ПР-5 как  $\Delta \omega_H$ , так и  $\Delta \omega$  имеют порядок величины  $\Omega$ , так что рассматриваемое приближение  $\Omega \rightarrow \infty$  является скорее модельным, чем соответствующим реальным условиям. Тем не менее, мы им воспользуемся, поскольку, не изменяя существенно физики явления, оно сильно упрощает все последующие выкладки. Более общий случай будет рассмотрен в разд. 5.

При  $\Omega \rightarrow \infty$  в нулевом приближении  $f$  не зависит от  $\beta$ . Из условия разрешимости следующего приближения, которое сводится к обращению в нуль усредненного по  $\beta$  уравнения (2.4) находим

$$\frac{\partial}{\partial t} f + (\mathbf{v}_\perp \nabla) f - \langle \omega_H \rangle \frac{\partial}{\partial \alpha} f = \frac{e}{M} \nabla_\perp \varphi \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\perp} f \right\rangle, \quad (2.5)$$

где  $f = f(v_\perp, \alpha, \mathbf{r}_\perp, \lambda, t)$ , а под  $\langle \omega_H \rangle$  следует понимать усредненную по  $\beta$  циклотронную частоту  $\langle \omega_H \rangle = \frac{eH_0}{Mc} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L^2} \right)$ . Что касается угловых скобок в правой части, то они введены в связи с тем, что  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\perp} f$ , кроме производной по явной переменной  $\mathbf{v}_\perp$ , содержит еще производную  $\frac{\partial}{\partial \lambda} f \times \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{v}_\perp} = -\frac{\mathbf{v}_\perp}{v_\perp^2} \lambda \cos^2 \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} f$ , среднее по  $\beta$  от которой равно  $-\frac{\mathbf{v}_\perp}{2v_\perp^2} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} f$ , так что  $\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\perp} f \right\rangle = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\perp} - \frac{\lambda \mathbf{v}_\perp}{2v_\perp^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) f$ .

Второй член в левой части уравнения (2.5) пропорционален малому параметру  $\rho_i/a$ , где  $\rho_i$  — средний ларморовский радиус,  $a$  — характерный поперечный размер плазмы или поперечная длина волны колебаний, однако при вычислении возмущенной плотности непосредственно из функции распределения его необходимо учитывать. Задачу можно существенно упростить, если вместо плотности вычислить с помощью функции распределения ток  $n\mathbf{v}$ , а затем найти возмущенную плотность из уравнения непрерывности. При таком подходе малые члены, связанные с пространственным градиентом функции распределения в уравнении (2.5), можно опустить. В результате мы приходим к совсем простому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} f - \langle \omega_H \rangle \frac{\partial}{\partial \alpha} f = \frac{e}{M} \left( \nabla_\perp \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\perp} f - \frac{1}{2} (\mathbf{v}_\perp \nabla_\perp \varphi) \frac{\lambda}{v_\perp^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} f \right), \quad (2.6)$$

в котором переменная  $\mathbf{r}$  в  $f$  может рассматриваться как некоторый параметр.

Для определения самосогласованного потенциала  $\varphi$  теперь удобно воспользоваться уравнением Пуассона, предварительно продифференцировав его по времени и выразив производные плотности  $dn/dt$  из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi = 4\pi e \operatorname{div} n(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \quad (2.7)$$

Как уже было сказано выше, правую часть (2.7) теперь можно вычислять с помощью функции (2.6). Другими словами, уравнения (2.6), (2.7) совместно с уравнениями движения для электронов вполне достаточны для описания желобковых колебаний с циклотронной частотой и с большой поперечной длиной волны.

Что касается электронов, то в ионногорячей плазме их можно считать холодными, и соответственно для их описания можно воспользоваться гидродинамическими уравнениями движения:

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = e \nabla \varphi - \frac{e}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}], \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{v}_e = 0. \quad (2.9)$$

Предположим, что в равновесном состоянии электрическое поле отсутствует, а плотность электронов  $n_e = n_0$  совпадает с плотностью ионов. В линейном приближении электронный ток  $\mathbf{j}_e = en_0\mathbf{v}_e$ , так что для его определения достаточно найти  $\mathbf{v}_e$ . Из продольной компоненты уравнения движения (2.8) для колебаний вида  $\exp(-i\omega t)$  находим  $v_{ze} = i \frac{e}{m_e \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , а для поперечного движения достаточно ограничиться дрейфовым приближением:

$$\mathbf{v}_{\perp e} = c \frac{[\mathbf{h}\nabla\varphi]}{H}, \quad (2.10)$$

где  $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{H}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ . Подставляя эти выражения в (2.7), получим

$$-i\omega\Delta\varphi = 4\pi e \operatorname{div} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} - \operatorname{div} \frac{4\pi n_0 c}{H} [\mathbf{h}\nabla\varphi] - i \frac{\partial}{\partial z} \frac{\omega_{0e}^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \varphi, \quad (2.11)$$

где  $\omega_{0e}^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}$  — квадрат ленгмюровской частоты.

В плотной плазме ленгмюровская частота значительно больше всех характерных частот. В ловушке ПР-5, например,  $\omega_{0e}^2$  более чем на три порядка превышает квадрат частоты колебаний  $\omega^2 \approx \omega_H^2$ . Следовательно, как видно из (2.11), внутри плазмы  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \approx 0$ , т. е. потенциал  $\varphi$  должен быть почти постоянным вдоль силовых линий, вплоть до таких значений  $z = l_0/2$ , где плазменная частота  $\omega_{0e}$  становится порядка  $\omega$  и происходит переход к вакууму (вне плазмы  $\Delta\varphi = 0$ , так что потенциал  $\varphi$  быстро спадает на расстояниях порядка  $k_{\perp}\Delta z \sim 1$ , где  $k_{\perp}$  — поперечное волновое число). Учитывая это обстоятельство, усредним уравнение (2.11) по  $z$  на длине  $l_0$ , где  $\varphi = \text{const}$  вдоль  $z$ .

Тогда мы получим из (2.11):

$$-i\omega\Delta_{\perp}\varphi = 4\pi e \operatorname{div} \int \frac{dz}{l_0} f' \mathbf{v}_{\perp} d\mathbf{v} - \operatorname{div} \frac{4\pi e \bar{n}_0 c}{H} [\mathbf{h}\nabla\varphi], \quad (2.12)$$

где  $\bar{n}_0 = \int \frac{dz}{l_0} n_0$ ,  $f'$  — возмущение функции распределения.

Так как  $l_0$  определяется областью, где имеется редкая плазма с плотностью, соответствующей соотношению  $\omega_{0e}^2 \geq \omega_{Hi}^2$ , где  $l_0$  может быть в несколько раз больше характерного размера плазмы  $l$ , что следует иметь в виду в дальнейшем.

Чтобы получить замкнутое уравнение для потенциала  $\varphi$  малых колебаний, необходимо в (2.12) выразить возмущение функции распределения  $f'$  через  $\varphi$ . Для этого обратимся к уравнению (2.6). В равновесии  $\varphi = 0$  и, следовательно,  $f = f_0$  не зависит от  $\alpha$ . В линейном приближении для возмущения потенциала вида  $\varphi(r) \exp(-i\omega t - im\vartheta)$  правая часть (2.6) будет содержать зависимость от  $\alpha$  только в виде  $\left(\cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \sin \alpha \frac{im}{r} \varphi\right)$ , поэтому  $f'$  можно искать в виде

$$f' = f_1 \cos \alpha + f_2 \sin \alpha. \quad (2.13)$$

Подставляя это выражение в линеаризованное уравнение (2.6), находим

$$f_1 = \frac{i}{\omega^2 - \langle \omega_H \rangle^2} \left\{ \omega \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \langle \omega_H \rangle \frac{m}{r} \varphi \right\} \frac{e}{M} \left( \frac{\partial}{\partial v_\perp} - \frac{\lambda}{2v_\perp} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) f_0, \quad (2.14)$$

$$f_2 = \frac{1}{\omega^2 - \langle \omega_H \rangle^2} \left\{ \omega \frac{m}{r} \varphi + \langle \omega_H \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\} \frac{e}{M} \left( \frac{\partial}{\partial v_\perp} - \frac{\lambda}{2v_\perp} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) f_0. \quad (2.15)$$

Мы ищем колебания с частотой, близкой к циклотронной, т. е.  $\omega \approx \langle \omega_H \rangle$ , либо  $\omega \approx -\langle \omega_H \rangle$ . Если считать  $m$  положительным, то частота  $\omega \approx -\langle \omega_H \rangle$  отвечает волнам, бегущим в положительную сторону по азимуту  $\theta$ , т. е. вращающимся в электронную сторону, а частота  $\omega \approx +\langle \omega_H \rangle$  соответствует волнам, бегущим в ионную сторону. При отрицательных  $m$ , положительные и отрицательные частоты меняются ролями. Как мы увидим ниже, и это соответствует экспериментальным данным, циклотронные волны бегут в сторону вращения ионов. Поэтому мы примем для определенности  $\omega \approx +\langle \omega_H \rangle$ , и тогда распространению волн в ионную сторону будут соответствовать положительные  $m$ , а в электронную — отрицательные. Как видно из формул (2.14), (2.15), возмущение функции распределения ионов при этом пропорционально  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{m}{r} \varphi \right)$ . Подставляя выражения (2.14), (2.15) в уравнение (2.12), мы получим уравнение для потенциала малых циклотронных колебаний плазмы. Так как выражения для  $f_1$  и  $f_2$  содержат малый знаменатель  $\omega^2 - \langle \omega_H \rangle^2$ , то при заданной величине вклад возмущения плотности ионов в (2.12) в  $\omega_H/\Delta\omega$  раз больше вклада электронов, и поэтому вторым слагаемым в правой части (2.12) можно пренебречь. Другими словами, колебания можно считать чисто ионными при неподвижных электронах. В этом приближении уравнение для  $\varphi$  имеет вид

$$\Delta_\perp \varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r N \left( \frac{d\varphi}{dr} + \frac{m}{r} \varphi \right) - N \frac{m}{r} \left( \frac{d\varphi}{dr} + \frac{m}{r} \varphi \right), \quad (2.16)$$

где

$$N = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{l_0} \int d\mathbf{v} \frac{\omega_{0i}^2 v_\perp}{\omega^2 - \langle \omega_H \rangle^2} \frac{d}{dv_\perp} \left( \frac{f_0}{n_0} \right). \quad (2.17)$$

В этом выражении  $\omega_{0i}^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{M}$ ,  $f_0$  — равновесная функция распределения ионов,  $\frac{d}{dv_\perp} = \frac{\partial}{\partial v_\perp} - \frac{\lambda}{2v_\perp} \frac{\partial}{\partial \lambda}$ ,  $l_0$  — длина области, где  $\omega_{0e}^2 > \omega_H^2$ . Для простоты мы считаем  $l_0$  не зависящей от  $\mathbf{r}_\perp$ .

Заметим, что поскольку  $f_0$  является функцией от  $v_\perp$  и  $\lambda$ , не зависящей от  $\beta$ , то в (2.17) можно произвести замену переменных с учетом  $dz dv_z = \Omega \lambda d\lambda d\beta$ . После интегрирования по  $\beta$  получим

$$N = -\frac{\pi}{l_0} \int \frac{4\pi e^2 \Omega}{M(\omega^2 - \langle \omega_H \rangle^2)} \frac{df_0}{dv_\perp} v_\perp d\mathbf{v}_\perp d\lambda, \quad (2.18)$$

где  $d\mathbf{v}_\perp = 2\pi v_\perp dv_\perp$ ,  $\Omega = v_\perp/L$ .

### 3. Циклотронные поверхностные волны

В уравнении (2.16)  $N$  является функцией  $r$ , так что его точное решение представляет определенные трудности. Поэтому мы рассмотрим сначала простейший пример однородного цилиндра радиуса  $a$  с  $N = \text{const}$  при  $r \leq a$  и  $N = 0$  при  $r > a$ . Кроме того, допустим, что плотность плазмы невелика, так что  $\overline{\omega_{0i}^2} = \frac{1}{l_0} \int \omega_{0i}^2 dz \ll \omega_H^2$ .

На этом примере мы увидим, что неоднородная плазма обладает новой ветвью поверхностных волн, которые могут заметно отличаться от объемных колебаний однородной плазмы.

Чтобы еще больше упростить задачу, допустим, что ионы холодные, а магнитное поле почти однородно. Тогда, считая в (2.17)  $\omega_H^2 = \text{const}$ , после интегрирования по частям получим

$$N = N_0 = \frac{\overline{\omega_{0i}^2}}{\omega^2 - \omega_H^2} \quad (3.1)$$

и уравнение (2.16) запишем в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r(1 - N_0) \left( \frac{d\varphi}{dr} + \frac{m}{r} \varphi \right) - \frac{m}{r} (1 - N_0) \left( \frac{d\varphi}{dr} + \frac{m}{r} \varphi \right) = 0. \quad (3.2)$$

Это уравнение, как нетрудно видеть, имеет решение внутри плазмы  $\varphi = r^{|m|}$ , а снаружи  $\varphi = r^{-|m|}$ . Интегрируя его по тонкому слою на границе плазмы, получаем условие сшивки производных на границе, которое приводит к дисперсионному соотношению:

$$-2 + \frac{\overline{\omega_{0i}^2}}{\omega^2 - \omega_H^2} = -\frac{m}{|m|} \frac{\overline{\omega_{0i}^2}}{\omega^2 - \omega_H^2}. \quad (3.3)$$

Отсюда видно, что при отрицательных  $m$  удовлетворить дисперсионному уравнению нельзя, а при  $m > 0$  получаем

$$\omega = \omega_H + \frac{1}{2} \frac{\overline{\omega_{0i}^2}}{\omega_H}. \quad (3.4)$$

Так как мы условились считать  $\omega$  близким к  $+\omega_H$ , то положительным  $m$  соответствует волна, распространяющаяся в ионную сторону. Другими словами, при учете границы остаются только волны, бегущие в ионную сторону. При  $\omega_{0i}^2 \ll \omega_H^2$  частота этой волны действительно близка к циклотронной.

Сама волна имеет вид поверхностной волны — ионный заряд в таких колебаниях выступает только на поверхности плазменного цилиндра.

Вернемся теперь к уравнению (2.16) для общего случая произвольной зависимости  $N$  от  $r$  и при этом  $m$  будем считать положительным. Уравнение (2.16) имеет решение  $\varphi = r^{-m}$ . Пользуясь этим, нетрудно найти с помощью подстановки  $\varphi = r^m u(r)$  второе решение:

$$\varphi = \frac{1}{r^m} \int \frac{r^{2m-1}}{N-1} dr. \quad (3.5)$$

Это решение ведет себя нужным образом при  $r \rightarrow 0$ , а именно,  $\varphi \sim r^m$ . Обозначим через  $r_0$  положение точки, дальше которой  $N$  становится заметно меньше единицы. Тогда снаружи от плазмы  $\varphi \approx \varphi(r_0) - \frac{r^{2m} - r_0^{2m}}{2mr^m}$ .

Пусть  $b$  есть радиус кожуха, где потенциал обращается в нуль. Если  $b^{2m} \gg r_0^{2m}$ , то приближенно значение потенциала  $\varphi$  в точке  $r_0$  должно быть равно

$$\varphi(r_0) \approx \frac{b^m}{2m}. \quad (3.6)$$

Сравнивая это значение с (3.5), мы видим, что  $N$  должно быть близко к единице на некотором участке  $\Delta r$  вблизи  $r_0$ , а именно, из условия  $\frac{r_0^{m-1} \Delta r}{\langle N-1 \rangle} = \varphi_0 \approx \frac{b^m}{2m}$  находим, что на участке  $\Delta r$  разность  $\langle N-1 \rangle$  должна быть порядка

$$\langle N-1 \rangle \approx 2m \left( \frac{r_0}{b} \right)^m \frac{\Delta r}{r_0}. \quad (3.7)$$

Так как  $r_0/b < 1$ , то разность  $\langle N-1 \rangle$  должна быть значительно меньше величины  $\Delta r/r_0$ , которую было бы естественно ожидать при линейной зависимости  $N$  от  $r$ .

Если условие (3.7) выполняется, то в плазме возможны колебания типа поверхностных волн, локализованные вблизи точки  $r = r_0$ , где  $N = 1$ . Условие  $N = 1$  мы будем рассматривать как приближенное дисперсионное соотношение для таких колебаний (для распределения в виде «столбика», как это следует из (3.3), условие  $N = 1$  является точным).

Это условие можно также получить из интегрального соотношения. Для этого умножим (2.16) на  $\varphi^* r dr$  и проинтегрируем по  $r$ . После интегрирования по частям с учетом  $\varphi(b) = 0$ , получим

$$\int_0^b (N-1) \left| \frac{d\varphi}{dr} + \frac{m}{r} \varphi \right|^2 r dr = 0. \quad (3.8)$$

Отсюда видно, что потенциал  $\varphi$  должен быть мал в области, где  $N$  значительно больше единицы, т. е. колебания должны иметь максимальную амплитуду вблизи  $N = 1$ .

#### 4. Неустойчивость отрицательной массы

Рассмотрим теперь более подробно дисперсионное соотношение  $N = 1$ , где  $N$  дается формулой (2.18). Учитывая, что  $\omega \approx \langle \omega_H \rangle$ , мы представим его в виде

$$1 + \frac{2\pi^2 e^2}{M\omega_H^0 L l_0} \int \left( \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} - \frac{\lambda}{2v_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial \lambda} \right) \frac{v_\perp^2 dv_\perp \lambda d\lambda}{\omega - \langle \omega_H \rangle} = 0, \quad (4.1)$$

где  $dv_\perp = 2\pi v_\perp dv_\perp$ ,  $\langle \omega_H \rangle = \omega_H^0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L^2} \right)$  — средняя циклотронная частота,  $\omega_H^0 = \frac{eH_0}{Mc}$ , а  $\lambda$  соответствует координате точки отражения от магнитной пробки. Проинтегрируем (4.1) по частям по  $v_\perp$ . Произведя некоторую перегруппировку членов, представим затем (4.1) в виде

$$1 - \frac{2\pi e^2}{M\omega_H^0} \int \left\{ F_0 + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\lambda F_0}{4} \right) \right\} \frac{d\lambda}{\omega - \langle \omega_H \rangle} = 0, \quad (4.2)$$



где  $F_0(\lambda) = \int f_0 \frac{2\pi\Omega\lambda}{l_0} d\mathbf{v}_\perp$  имеет смысл функции распределения частиц по  $\lambda$ , так что  $\int F_0 d\lambda = \bar{n}_0 = \int n_0 \frac{dz}{l_0}$ .

Заметим еще, что, поскольку  $v_z = \Omega\sqrt{\lambda^2 - z^2}$ , плотность  $n_0$  связана с  $F_0$  соотношением:

$$n_0(z) = 2 \int \int f_0 d\mathbf{v}_\perp \frac{\Omega\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}} = \frac{l_0}{\pi} \int_z^\infty \frac{F_0(\lambda) d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}}, \quad (4.3)$$

где множитель 2 перед первым интегралом учитывает вклад от области  $-\infty < \lambda < -z$ . Усреднение (4.3) по  $z$  на длине  $l_0$  снова приводит к соотношению  $\bar{n}_0 = \int F_0 d\lambda$ . Соотношение (4.3) можно рассматривать как интегральное уравнение для  $F_0$ , которое можно свести к уравнению Абеля. Его решение дается соотношением:

$$F_0(\lambda) = -2\lambda \frac{d}{d\lambda} \lambda \int_\lambda^\infty \frac{n_0(z) dz}{l_0 z \sqrt{z^2 - \lambda^2}}. \quad (4.3a)$$

Отсюда по известной экспериментально зависимости  $n_0(z)$  можно восстановить  $F_0(\lambda)$ .

Рассмотрим сначала простейший случай монохроматического по  $\lambda$  распределения:  $F_0 = \bar{n}_0 \delta(\lambda - l)$ , где  $l$  — длина плазменного сгустка. В этом случае уравнение (4.2) существенно упрощается, а именно, оно становится алгебраическим:

$$1 - \frac{2\pi e^2 \bar{n}_0}{M\omega_H^0} \left\{ \frac{1}{\omega - \langle \omega_H \rangle} - \frac{1}{(\omega - \langle \omega_H \rangle)^2} \frac{l}{4} \frac{d\langle \omega_H \rangle}{dl} \right\} = 0, \quad (4.4)$$

где  $\langle \omega_H \rangle = \omega_H^0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{L^2} \right)$ ,  $\frac{d\langle \omega_H \rangle}{dl} = \frac{l}{L^2} \omega_H^0$ .

Вводя обозначения  $\nu = (\omega - \langle \omega_H \rangle)/\omega_H^0$ ,  $\rho = \pi e^2 \bar{n}_0 / (M\omega_H^2)$ , мы запишем его в виде

$$\nu^2 - 2\rho\nu + \frac{\rho l}{2\omega_H^0} \frac{d\langle \omega_H \rangle}{dl} = 0. \quad (4.5)$$

Отсюда видно, что при  $\frac{d\langle \omega_H \rangle}{dl} > 0$ , как имеет место в рассматриваемом нами

случае, уравнение (4.5) имеет комплексные корни, если  $\rho < \frac{l}{2\omega_H^0} \frac{d\langle \omega_H \rangle}{dl} = \frac{l^2}{2L^2}$ ,

т. е.

$$\frac{\bar{\omega}_{0i}^2}{\omega_H^2} = \frac{4\pi\bar{n}_0 M c^2}{H_0^2} < 2 \frac{l^2}{L^2}. \quad (4.6)$$

Если вместо усредненной по длине  $l_0$  плотности холодной плазмы ввести в рассмотрение плотность горячей плазмы  $n_0$  и учесть, что  $\bar{n}_0 \approx ln_0/l_0$ , то условие неустойчивости (4.6) можно представить в виде

$$\frac{\omega_{0i}^2}{\omega_H^2} < \frac{2l_0 l}{L^2}. \quad (4.7)$$

Величина  $l_0$  может быть порядка  $L$ , так что согласно (4.7) неустойчивость может развиваться, если  $\omega_{0i}^2$  становится меньше или порядка  $\omega_H^2 l/L$ . При

этом на границе устойчивости частота колебаний равна

$$\omega = \langle \omega_H \rangle + \frac{1}{2} \frac{\overline{\omega_{0i}^2}}{\omega_H} \approx \langle \omega_H \rangle + \frac{l^2}{L^2} \omega_H^0.$$

При малой плотности частота колебаний близка к  $\langle \omega_H \rangle$ , так что в фигурных скобках (4.4) первое слагаемое много меньше второго, и дисперсионное уравнение принимает вид

$$1 + \frac{4\pi e^2 \bar{n}_0}{M(\omega - \langle \omega_H \rangle)^2} \frac{l}{8\omega_H^0} \frac{d\langle \omega_H \rangle}{dl} = 0. \quad (4.8)$$

Сравним это уравнение с дисперсионным соотношением для ленгмюровских колебаний холодной электронной плазмы:

$$1 - \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e \omega^2} = 0, \quad (4.9)$$

где  $m_e$  — масса электрона,  $\omega$  — частота колебаний.

Как видим, уравнение (4.8) сходно с (4.9). При  $\frac{d\langle \omega_H \rangle}{dl}$  они различаются знаком при втором слагаемом, т. е. в (4.8) масса частиц как бы отрицательна, и поэтому кулоновские силы отталкивания приводят не к колебаниям, а к образованию сгустков частиц. Эта неустойчивость называется неустойчивостью отрицательной массы [6–8]. Она связана со следующим физическим механизмом.

Пусть частота колебаний близка к циклотронной. Тогда ионы плазмы могут эффективно обмениваться энергией с волной, причем, в зависимости от фазы ионы могут либо отбирать, либо отдавать энергию волне. Те ионы, которые приобретают поперечную энергию, будут испытывать отражения в магнитных пробках при меньшей величине магнитного поля, и их средняя частота  $\langle \omega_H \rangle$  уменьшается. Наоборот, ионы, теряющие энергию, заходят дальше в пробки и увеличивают  $\langle \omega_H \rangle$ . Другими словами, производная  $\frac{d}{dw_\perp} \langle \omega_H \rangle < 0$ , где  $w_\perp = \frac{Mv_\perp^2}{2}$  — поперечная энергия. Этот эффект, эквивалентный отрицательности массы ионов, и приводит к неустойчивости.

Если рассмотреть движение ионов по фазе  $\alpha$ , то нетрудно установить, что при  $\frac{d}{dw_\perp} \langle \omega_H \rangle < 0$  кулоновские силы отталкивания приводят как бы к притяжению частиц в пространстве скоростей и их бунчировке по фазе  $\alpha$ . Внешне такие бунчированные по фазе ионы проявляют себя как циклотронные колебания.

Вернемся теперь к уравнению (4.2) и рассмотрим общий случай произвольной функции распределения  $F_0(\lambda)$ . В этом уравнении, как обычно, в знаменателе  $\omega - \langle \omega_H \rangle$  частоту  $\omega$  следует считать находящейся в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega$ , что эквивалентно либо учету малого затухания, либо решению задачи с начальными данными преобразованием Лапласа. Это значит, что интегрирование особенности в (4.2) следует проводить в смысле замены  $\frac{1}{\omega - \langle \omega_H \rangle}$  на  $\frac{p}{\omega - \langle \omega_H \rangle - i\pi\delta(\omega - \langle \omega_H \rangle)}$ , где  $p$  означает главное значение.

Рассмотрим, как будет изменяться частота  $\omega$  при изменении плотности  $\bar{n}_0$ . При достаточно большой плотности частота колебаний  $\omega$  велика и полюс  $\omega = \langle \omega_H \rangle$  будет приходиться на столь большие  $\lambda$ , где  $F_0$  мала. В этом случае при интегрировании  $\frac{p}{\omega - \langle \omega_H \rangle}$  можно приближенно вынести  $\omega - \langle \omega_H \rangle$  из под интеграла при некотором среднем значении  $\omega - \langle \bar{\omega}_H \rangle$ , т. е. получим

$$1 - \frac{\overline{\omega_{0i}^2}}{2\omega_H^0(\omega - \langle \bar{\omega}_H \rangle)} + i\pi \frac{2\pi e^2}{M\omega_H^0} \int \delta(\omega - \langle \omega_H \rangle) \left\{ F_0 + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\lambda F_0}{4} \right) \right\} d\lambda = 0. \quad (4.10)$$

Считая мнимую часть малой, находим приближенно

$$\omega = \langle \bar{\omega}_H \rangle + \frac{\overline{\omega_{0i}^2}}{2\omega_H^0} - i \frac{\pi^2 e^2 \overline{\omega_{0i}^2}}{M\omega_H^0} \int \delta(\omega - \langle \omega_H \rangle) \left\{ F_0 + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\lambda F_0}{4} \right) \right\} d\lambda. \quad (4.11)$$

Отсюда видно, что знак мнимой части  $\omega$ , т. е. инкремент  $\gamma = \text{Im } \omega$ , определяется знаком фигурной скобки под интегралом. Если эта скобка отрицательна, т. е.  $F_0$  убывает с  $\lambda$  быстрее, чем  $\lambda^{-5}$ , то при некоторой плотности  $\bar{n}_0$ , когда частота колебаний  $\omega$  совпадает с частотой  $\langle \omega_H \rangle$ , отвечающей соответствующим значениям  $\lambda$ , где  $\frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda^5 F_0) < 0$ , должна иметь место раскачка колебаний.

Другими словами, любое достаточно быстро спадающее с  $\lambda$  распределение  $F_0$  должно приводить к неустойчивости. При этом неустойчивость должна иметь место лишь в некотором интервале плотностей: при очень большой плотности частота  $\omega$  настолько велика, что не может осуществляться резонанс  $\omega = \langle \omega_H \rangle$ , а при достаточно малой плотности резонанс должен попадать в область, где  $F_0$  не очень сильно убывает с  $\lambda$ , т. е. колебания становятся затухающими. Область неустойчивых плотностей, как нетрудно видеть, соответствует условию  $\frac{\omega_{0i}^2}{\omega_H^2} \sim \frac{\Delta\omega_H}{\omega_H} \sim \frac{l^2}{L^2}$ , что согласуется с критическим значением плотности (4.6), полученным для монохроматического распределения по  $\lambda$ .

Таким образом, при  $\delta$ -образном распределении  $F_0(\lambda)$  неустойчивость должна иметь место при любой плотности  $\bar{n}_0$ , меньшей критической (4.6), при уширении  $F_0(\lambda)$  появляется еще нижняя предельная плотность, а если распределение  $F_0(\lambda)$  является настолько плавным, что всюду  $F_0$  убывает с  $\lambda$  медленнее, чем  $\lambda^{-5}$ , рассматриваемая неустойчивость полностью стабилизируется.

## 5. Учет продольного движения ионов

Всюду выше мы считали, что частота продольных колебаний  $\Omega$  значительно больше разброса по циклотронным частотам  $\Delta\omega_H$  за счет продольной неоднородности магнитного поля. В реальных условиях ловушки ПР-5 эти величины одного порядка, поэтому возникает вопрос, что будет, если  $\Omega$  не велико. Чтобы рассмотреть случай  $\Omega \sim \Delta\omega_H$ , следует вернуться к уравнению (2.4), в котором мы пренебрежем малым вторым членом, так

что в линейном приближении получим

$$\frac{d}{dt} f' = \frac{\partial}{\partial t} f' + \Omega \frac{\partial}{\partial \beta} f' - \omega_H \frac{\partial}{\partial \alpha} f' = \frac{e}{M} \nabla_{\perp} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{\perp}} f', \quad (5.1)$$

где  $d/dt$  означает полную производную вдоль траекторий невозмущенного движения:

$$\beta = \beta_0 + \Omega t, \quad \alpha = \alpha_0 - \int_0^t \omega_H dt, \quad (5.2)$$

где  $\omega_H = \omega_H^0 \left(1 + \frac{\lambda^2}{L^2} \sin^2 \beta\right)$ ,  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  — значения углов  $\alpha$  и  $\beta$  при  $t = 0$ .

Из (5.1) нетрудно найти возмущение функции  $f'$ . Считая, что потенциал имеет вид  $e^{-i\omega t} \varphi(\mathbf{r}_{\perp})$ , и аналогично возмущение функции есть  $e^{-i\omega t} f'$ , получаем

$$f' = \frac{e}{M} \nabla_{\perp} \varphi \int_{-\infty}^0 \mathbf{v}_{\perp}(t) e^{-i\omega t} \left\{ \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} - \frac{\cos^2 \beta(t)}{v_{\perp}^2} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right\} f_0 dt. \quad (5.3)$$

Если подставить это выражение в уравнение (2.12) и произвести некоторые несложные, но несколько громоздкие выкладки, то мы снова придем к уравнению вида (2.16), в котором лишь несколько изменяется  $N$ :

$$N = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{l_0} \int \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{0i}^2 J_n^2(\eta)}{\omega^2 - (\langle \omega_H \rangle + 2n\Omega)^2} \left\{ v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n}{\eta}\right) \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right\} f_0 \frac{dv}{n_0}, \quad (5.4)$$

где  $J_n$  — функция Бесселя индекса  $n$ ,  $\eta = \frac{\omega_H^0 \lambda^2}{4\Omega L^2} \sim \frac{\Delta \omega_H}{\Omega}$ . При  $\eta \rightarrow 0$  это выражение переходит в (2.17). Для колебаний, бегущих в ионную сторону, с частотой  $\omega \approx \langle \omega_H \rangle$  выражение (5.4) после замены переменных с учетом  $dz dv_z = \Omega \lambda d\lambda d\beta$  принимает вид

$$N = -\frac{2\pi^2 e^2}{M\omega_H^0 L l_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{J_n^2(\eta) v_{\perp} dv_{\perp} \lambda d\lambda}{\omega - \langle \omega_H \rangle - 2n\Omega} \left\{ v_{\perp} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n}{\eta}\right) \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right\} f_0. \quad (5.5)$$

Отсюда видно, что член с  $n = 0$  сохраняет свой вид, при нем появляется лишь дополнительный множитель  $J_0^2(\eta)$ , стремящийся к единице при больших  $v_{\perp}$ , т. е.  $\eta \rightarrow 0$ . Поэтому вплоть до  $\eta \sim 1$  для частиц со средней тепловой скоростью нулевое слагаемое качественно не изменяется. При  $\eta \sim 1$  вступают в игру высшие гармоники по  $\Omega$ , и, как видно из (5.5), при  $\omega > \langle \omega_H \rangle$  большой вклад дают гармоники с  $n > 0$ . Нетрудно видеть, что при этом раскачка колебаний может быть связана не только с производной  $\frac{\partial}{\partial \lambda} f_0 < 0$ , но и с  $\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} f_0$ , когда распределение имеет вид вырезанного конуса, т. е.  $\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} f_0 > 0$ .

Таким образом, при  $\eta \sim 1$  при функции распределения с вырезанным конусом область неустойчивости может несколько расшириться. Но чтобы не усложнять рассмотрения, мы ограничимся в дальнейшем только случаем  $\Omega \rightarrow \infty$ .

## 6. Квазилинейное приближение

Для описания эволюции функции распределения  $f_0$  мы воспользуемся квазилинейным приближением. Для этого усредним уравнение (2.6) по углу  $\alpha$ , считая, что  $f = f_0 + f_1 \cos \alpha + f_2 \sin \alpha$ . При этом слагаемое в правой части, пропорциональное  $f_0$ , выпадает и остаются только члены, пропорциональные функциям  $f_1$  и  $f_2$ , определяемым соотношениями (2.14), (2.16). При  $\omega \approx \langle \omega_H \rangle$  получим

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0 = \left( \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} - \frac{\lambda}{2v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) D \left( \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} - \frac{\lambda}{2v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) f_0, \quad (6.1)$$

где

$$D = -\frac{e^2}{4M^2} \left| \frac{d\varphi}{dr} + \frac{m}{r} \varphi \right|^2 \text{Im} \frac{\omega_H^0}{\omega^2 - \langle \omega_H \rangle^2}, \quad (6.2)$$

а  $\text{Im}$  означает мнимую часть. Для колебаний с инкрементом  $\gamma$  эффективный коэффициент диффузии  $D$  в пространстве скоростей при  $\omega \approx \langle \omega_H \rangle$  равен

$$D = \frac{e^2}{8M^2} \left| \frac{d\varphi}{dr} + \frac{m}{r} \varphi \right|^2 \frac{\gamma}{(\omega - \langle \omega_H \rangle)^2 + \gamma^2}. \quad (6.3)$$

Коэффициент  $D$  зависит только от  $\lambda$  и  $r$ , но не зависит от  $v_{\perp}$ . Как видно из (6.3), он существен только вблизи тех  $\lambda$ , для которых имеет место резонанс  $\omega = \langle \omega_H \rangle$ . Из (6.1) видно, что диффузия происходит вдоль линий  $\lambda^2 v_{\perp} = \text{const}$ , что соответствует, как и следовало ожидать, сохранению продольного адиабатического инварианта  $I_{\parallel} = \langle v_z^2 \rangle / \Omega = \lambda^2 \Omega / 2$ .

Так как неустойчивость имеет место только при достаточно резком спаде функции  $F_0$  с  $\lambda$ , то при раскачке колебаний диффузия в пространстве скоростей должна идти в сторону расплывания функции распределения по  $\lambda$ , и при этом в силу сохранения адиабатического инварианта должна уменьшаться средняя поперечная энергия частиц. Особенно хорошо это видно, если записать уравнение (6.1) в переменных  $\lambda, I_{\parallel}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0 = \lambda^5 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{D\lambda}{I_{\parallel}^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_0 \right). \quad (6.4)$$

Так как  $I_{\parallel} \sim v_{\perp}$ , то отсюда видно, что диффузия по  $\lambda$  холодных ионов идет гораздо быстрее, чем диффузия горячих.

## 7. Качественное обсуждение

Обсудим теперь качественно основные следствия из полученных выше соотношений, сопоставляя их с экспериментальными данными на ПР-5.

Прежде всего, колебания типа поверхностных желобковых волн, бегущих в сторону вращения ионов, которые следуют из теоретического рассмотрения, буквально напрашиваются и из экспериментальных данных. Из теории следует, что эти колебания могут приводить к неустойчивости лишь в некотором интервале плотностей — при очень малой плотности они стабилизируются за счет того, что резонанс  $\omega = \langle \omega_H \rangle$  попадает на «внутренние» ионы, где имеет место затухание, а при очень большой плотности частота  $\omega$  настолько велика, что резонанс  $\omega = \langle \omega_H \rangle$ , не может

осуществляться. Этот результат также соответствует экспериментальным данным.

Сама неустойчивость существует не всегда — если функция  $F_0(\lambda)$  является достаточно медленно спадающей с  $\lambda$ , то плазма устойчива. Если условия неустойчивости выполняются, то колебания должны развиваться на частоте  $\omega = \langle \omega_H \rangle$ , соответствующей точкам поворота  $\lambda$ , лежащим вблизи торцов плазмы, где  $F_0$  быстро спадает с  $\lambda$ , т. е.  $\omega$  может заметно превышать  $\omega_H^0$  циклотронную частоту в центре. Если допустить, что на периферии плазмы ее длина  $l$  меньше, чем вблизи оси, то можно понять, почему колебания с более высокими  $m$ , т. е. более сдвинутые к периферии, имеют меньшую частоту. Однако такое объяснение не позволяет понять, почему возможны частоты  $\omega$ , меньшие циклотронной частоты в центре  $\omega_H^0$ . По-видимому, в этом случае нельзя пренебрегать вкладом от высших гармоник по  $\Omega$  в дисперсионном уравнении.

Качественно согласуется с теорией и факт уменьшения частоты колебаний со временем. Как видно из выражения (3.4), частота колебаний уменьшается вместе с плотностью, и поэтому во время скачка плотности она должна убывать.

Обсудим, наконец, самый интересный вопрос — почему происходят сбросы плазмы? Другими словами, с чем связан тот факт, что, начав развиваться, неустойчивые колебания существуют до тех пор, пока не выбросят заметную долю плазмы.

Выброс плазмы представляет собой нелинейный эффект, и его нужно рассматривать с точки зрения нелинейных процессов в плазме. Одним из таких нелинейных процессов является диффузия в пространстве скоростей, описываемая в квазилинейном приближении уравнением (6.4). Микроскопически этой диффузии соответствует обмен энергией частиц с волной, так что резонансные частицы в зависимости от фазы то набирают, то теряют энергию. Так как при наборе поперечной энергии  $\lambda$  уменьшается и частица «прячется» внутрь плазмы, то через торцы будут выбрасываться только «отработавшие» частицы в фазе с малой поперечной энергией. Этот эффект должен приводить к раскачке колебаний и в нелинейном режиме.

Кроме того, существует еще один нелинейный эффект — появление положительного потенциала плазмы при наличии колебаний. Он связан со своеобразным детектированием ВЧ-сигнала: в полупериод с пониженным потенциалом избыточные электроны выбрасываются из плазмы, а обратно из стенок они не поступают. Поэтому потенциал должен колебаться между нулем и удвоенной амплитудой колебаний около некоторого среднего значения.

Появление положительного потенциала приводит к обрезанию плазмы с торцов — ионы с достаточно большими  $\lambda$  и не очень большими  $v_\perp$  будут выбрасываться вдоль силовых линий в пробки. Вследствие этого, функция распределения  $f_0$ , а стало быть и  $F_0$ , могут более круто спадать с  $\lambda$ , что усиливает неустойчивость. Возможно, что именно этот эффект приводит к длительному существованию колебаний, так что даже при сравнительно малом инкременте сброс плотности довольно велик. Заметим, что поскольку  $\varphi_0$  пропорционально  $|\varphi|$ , а коэффициент диффузии  $D$  пропорционален  $m^2 \varphi^2$ , при малых  $m$  должен преобладать дестабилизирующий эффект зарядки плазмы, а при больших  $m$  — стабилизирующий эффект диффузии

по  $\lambda$ . Это может приводить к увеличению глубины скачка по мере уменьшения  $m$ . Впрочем, по мере уменьшения  $m$  и колебания становятся более объемными, что также может способствовать увеличению глубины скачка при переходе к меньшим значениям.

Так как колебания имеют вид поверхностных волн, а раскачка связана с частицами с большими  $\lambda$ , то во время скачка должна как бы сбрасываться оболочка плазмы. Этот вывод качественно соответствует экспериментальному факту уменьшения продольного и поперечного размеров сгустка после скачка.

Резюмируя, можно сказать, что изложенные выше теоретические представления в целом ряде пунктов качественно соответствуют экспериментальным данным. Для более полного сопоставления теории с экспериментом было бы желательно получить сведения о том, какие именно параметры плазмы ответственны за появление или отсутствие неустойчивости.

#### Список литературы

1. Готт Ю.В., Иоффе М.С., Юшманов Е.Е. // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Vienna, 1966. V. 1. P. 35.
2. Байбородов Ю.Т., Готт Ю.В., Иоффе М.С., Юшманов Е.Е. // ЖЭТФ. Письма в редакцию. 1965. Т. 3. С. 92.
3. Байбородов Ю.Т., Иоффе М.С., Соболев Р.И., Юшманов Е.Е. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 513.
4. Канаев Б.И., Юшманов Е.Е. // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Vienna, 1969. V. 2. P. 319.
5. Пистунович В.И., Тимофеев А.В. // Вопросы теории плазмы. 1967. Вып. 5. С. 351.
6. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. // Атомная энергия. 1959. Т. 7. С. 549.
7. Postma H., Dunlap J.L., Dory R.A., Haste G.R., Young R.A. // Phys. Rev. Letters. 1966. V. 16. P. 265.
8. Landau R.W., Neil V.K. // Phys. Fluids. 1966. V. 9. P. 2412.

## О ДИФФУЗИИ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ \*)

Рассмотрена турбулентная диффузия плазмы, развивающаяся из-за гравитационной диссипативной неустойчивости в тороидальных системах. Получено выражение для коэффициентов диффузии и теплопроводности в случае малых и больших значений частот столкновений электронов. Оказывается, что величина коэффициентов диффузии и теплопроводности заметно превышает соответствующие классические значения. В работе обсуждается также вопрос о диффузии плазмы при слабом разрушении магнитных поверхностей.

### 1. Введение

Диффузия плазмы в тороидальных системах — довольно сложный процесс. Наряду с собственно поперечной диффузией, связанной с перескоком электронов при каждом столкновении на расстояние порядка их ларморовского радиуса, в тороидальных системах заметный вклад в поток частиц поперек магнитных поверхностей дает своеобразная конвекция [1–3]. Она возникает вследствие небольшого разделения зарядов из-за тороидального дрейфа. Хотя при наличии вращательного преобразования сильного разделения зарядов и не происходит — они компенсируются за счет перетекания тока вдоль силовых линий, вследствие конечной проводимости плазмы небольшое поперечное электрическое поле все же остается. Это поле приводит к движению шнура в сторону наружного обвода. Так как при этом на наружном обводе плазма выходит наружу, а на внутреннем — внутрь магнитных поверхностей, то в первом приближении по кривизне усредненный по магнитной поверхности поток обращается в нуль, и только в следующем порядке появляется отличный от нуля поперечный поток [1–3]. В разреженной плазме этот процесс усложняется тем, что основной вклад в конвекционный поток дают запертые частицы [4, 5].

Возникает вопрос, есть ли основания для того, чтобы эта теоретическая схема ламинарной конвекции действительно реализовалась в экспериментальных условиях, и не разовьется ли вместо этого турбулентная конвекция, как это имеет место в обычной жидкости при малой вязкости. Поскольку неоднородность магнитного поля, приводящая к ламинарной конвекции, является в то же самое время причиной сходной с ней по физической природе так называемой гравитационной диссипативной

\*) Кадомцев Б.В., Погуце О.П. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. Вып. 5. С. 1675–1682.



неустойчивости [6, 7] — тороидального аналога хорошо известной желобковой неустойчивости, то более вероятным представляется режим турбулентной конвекции. Рассмотрение этого вопроса и составляет предмет настоящей статьи.

## 2. Гравитационная неустойчивость

Как мы покажем ниже, в плотной плазме гравитационная неустойчивость приводит к локальному конвекционному потоку того же порядка величины, что и в ламинарной конвекции. Но поскольку этот поток имеет место только в области спадающего наружу поля, то соответствующий усредненный поток через магнитную поверхность не квадратичен, а линейен по кривизне, так что полный поток в  $R/a$  раз больше ламинарного ( $R$  — большой,  $a$  — малый радиус тора). В разреженной плазме эффект может быть еще больше.

Для простоты рассмотрим круглый осесимметричный тор типа Токамака. Магнитное поле в такой системе меняется вдоль силовой линии по закону

$$B_z = B(1 - \varepsilon \cos k_0 l), \quad (1)$$

где  $l$  — координата вдоль силовой линии,  $\varepsilon$  — глубина гофрировки поля, а  $2\pi/k_0$  — ее период, причем  $\varepsilon = r/R$ ,  $k_0 = 1/(qR)$ , где  $r$  — расстояние от магнитной оси,  $R$  — ее радиус кривизны,  $q = \frac{rB_z}{RB_\theta}$ ,  $B_\theta$  — азимутальное магнитное поле,  $l$  отсчитывается от наружного обвода. Уравнение для потенциала малых колебаний системы получим из условия квазинейтральности, приравнивая возмущенную плотность ионов и электронов,  $n'_i = n'_e$ . В дальнейшем будем рассматривать колебания с продольными фазовыми скоростями, большими тепловой скорости ионов. Тогда для  $n'_i$  можно воспользоваться следующим известным из теории дрейфовых волн [8] выражением:

$$n'_i = \left( \frac{\omega_*}{\omega} + \frac{\omega_* \omega_{mi}(l)}{\omega^2} - \frac{c_s^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial l^2} \right) \frac{en_0}{T_e} \varphi, \quad (2)$$

где  $\omega_* = -\frac{cT_e k_y}{eBn_0} \frac{dn_0}{dr}$  — дрейфовая частота,  $k_y = \frac{m}{r}$  — азимутальное волновое число,  $\omega_{mi} = \frac{k_y c T_i \cos k_0 l}{eBR}$  — частота магнитного дрейфа ионов,  $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ .

Электроны из-за своей большой продольной подвижности успевают в основном распределиться по Больцману вдоль силовых линий. Поэтому их возмущенная плотность может быть записана в виде

$$n'_e = \frac{en_0}{T_e} \varphi + \frac{en_0}{T_e} \widehat{K} \varphi, \quad (3)$$

где второй член учитывает малую «небольцмановскую» часть возмущенной плотности;  $\widehat{K}$  — некоторый интегральный оператор, конкретное выражение для которого для различных значений частоты столкновений  $\nu_e$  будет приведено ниже.

Приравнивая  $n'_i$  и  $n'_e$ , получаем уравнение для  $\varphi$ :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + A \cos s - E\right) \varphi = \widehat{K} \varphi, \\ s = k_0 l, \quad A = \varepsilon \left(\frac{\omega_*}{k_0 c_s}\right)^2, \quad E = \frac{\omega - \omega_*}{\omega_*} \left(\frac{\omega_*}{k_0 c_s}\right)^2. \quad (4)$$

Характер решения этого уравнения, как нетрудно убедиться, зависит от безразмерной величины  $A = \varepsilon [\omega_*/(k_0 c_s)]^2$ . Если  $A$  мало, т. е. за период колебаний ионы успевают сместиться на расстояние, большее чем период гофрировки, то уравнение описывает дрейфовые и ионнозвуковые волны, зацепленные друг с другом из-за зависимости от  $s$  частоты магнитного дрейфа. При учете диссипации, например, трения электронов об ионы, возможна раскачка этих колебаний. Это так называемый случай сильной связи по терминологии работы [9]. Колебания при этом характеризуются большой протяженностью вдоль силовых линий и на них может существенно влиять шир и средний минимум  $B$ .

Более интересным является случай слабой связи  $A > 1$ . При этом косинус в уравнении (4) можно разложить, ограничившись первыми двумя членами. В результате мы получим уравнение типа уравнения Шредингера для гармонического осциллятора (в пренебрежении малым членом, связанным с  $\widehat{K} \varphi$ ), решения которого локализованы в области минимумов магнитного поля. Вследствие этого они совершенно нечувствительны к шир и среднему минимуму  $B$ . Инкремент таких возмущений значительно больше, чем при малом  $A$ , и целиком определяется небольцмановской частью возмущенной плотности электронов

$$\omega = \omega_*(1 - \varepsilon); \quad \gamma = \omega_* \frac{\langle \varphi_0 \widehat{K} \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0 \varphi_0 \rangle}, \quad (5)$$

где угловые скобки означают усреднение по  $s$ , а  $\varphi_0$  представляет собой решение уравнения (4) без правой части (в случае  $A > 1$  это функции Эрмита).

Рассмотрим теперь конкретный вид оператора  $\widehat{K}$ . В случае плотной плазмы, когда длина пробега меньше длины системы и когда можно пользоваться гидродинамическим описанием плазмы,  $\widehat{K}$  имеет вид

$$\widehat{K} \varphi = - \int \frac{\omega - \omega_*}{\omega + i D k^2 - \omega_{me}} e^{ikl} \varphi_k dk, \quad (6)$$

где  $D = T_e/(m_e \nu_e)$  — продольный коэффициент диффузии,  $k$  — продольное волновое число,  $\omega_{me} = \omega_{mi} T_e/T_i$ . Для оценки инкремента (5) следует учесть, что характерные  $k$ , отвечающие решению  $\varphi_0$ , при  $A > 1$  оказываются порядка  $k \sim k_0 A^{1/4}$ , поэтому для случая, когда  $|\widehat{K}|$  мало, т. е. для  $D k^2 > \omega$ , находим

$$\gamma \sim \frac{\varepsilon \omega_*^2}{D k_0^2 A^{1/2}} \text{ при } \nu_e > \nu_2 = k_0 v_e. \quad (7)$$

Максимальный по  $A$  инкремент достигается при  $A \sim 1$ , чему соответствуют поперечные длины волн, определяемые соотношением  $k_{\perp} \rho_i \sim k_0 a / \sqrt{\varepsilon} \sim \sqrt{\varepsilon}/q$ .

С уменьшением частоты столкновений электронов инкремент (7) падает и при  $\nu_e = \nu_2 = k_0 v_e$  происходит переход к бесстолкновительному случаю. При меньших  $\nu_e$  частота столкновений выпадает из результата и ее учет важен лишь для правильного обхода полюса. В этой области ( $\nu_e < k_0 v_e$ ) отклонение электронов от бальмановского распределения связано с их резонансным взаимодействием с волной. При этом в случае  $dT/dr = 0$ , которым мы пока ограничимся,

$$\widehat{K}\varphi \sim i\sqrt{\pi}\varepsilon\varphi\frac{\omega_*}{k_0 v_e}, \quad (8)$$

а соответствующий инкремент оказывается порядка

$$\gamma \sim \frac{\varepsilon\omega_*^2}{k_0 v_e}. \quad (9)$$

Выражение (9) остается справедливым при уменьшении  $\nu_e$  вплоть до значения  $\nu_e = \nu_0 \equiv \varepsilon\omega_b$ , где  $\omega_b$  — частота колебаний запертых частиц между магнитными пробками поля (1). По порядку величины  $\omega_b \sim \sqrt{\varepsilon}k_0 v_e$ . При  $\nu_e < \nu_0$  основной вклад в небальмановскую часть возмущения плотности электронов дают запертые электроны [10]. Как показано в [10], при этом  $\widehat{K}$  равно:

$$\widehat{K}\varphi = -\frac{\sqrt{\varepsilon}(\omega - \omega_*)}{\omega - \omega_{me} + i\nu_{эф}} \widehat{K}_0\varphi, \quad (10)$$

где множитель  $\sqrt{\varepsilon}$  учитывает долю запертых частиц,  $\nu_{эф} = \nu_e/\varepsilon$  — эффективная частота столкновений для запертых частиц, а  $\widehat{K}_0$  — интегральный оператор порядка единицы, локализованный в области минимума магнитного поля, т. е. в той же области, где локализованы решения уравнения (4). С хорошей точностью его можно заменить на единицу. Используя (10) и выражение для частоты (5), находим инкремент нарастания колебаний с частотой  $\omega < \nu_{эф}$ :

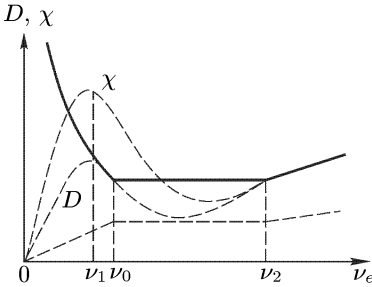
$$\gamma \approx \frac{\varepsilon^{5/2}\omega_*^2}{\nu_e} \text{ при } \nu_e < \nu_0. \quad (11)$$

При дальнейшем уменьшении частоты столкновений рассматриваемая неустойчивость постепенно переходит в неустойчивость на запертых ионах [11].

### 3. Диффузия и теплопроводность

Итак, в широкой области изменения частоты столкновений электронов имеет место неустойчивость, связанная с убыванием магнитного поля наружу от шнура в область наружного обвода. Поскольку инкремент возрастает с  $k_\perp$ , то мелкомасштабные возмущения нарастают быстрее крупномасштабных, так что естественно ожидать турбулентной конвекции. Соответствующий коэффициент диффузии можно оценить как  $D \sim \gamma/k_\perp^2$ . Его зависимость от  $\nu_e$  представлена на рисунке сплошной линией. В области  $\nu_e > \nu_0$  этот коэффициент в  $\varepsilon^{-1}$  раз больше классического [4], представленного на рисунке штриховой линией. Это связано как раз с тем, что турбулентный поток порядка ламинарного, он отличен от нуля только в

области спадающего поля, так что полный поток не содержит лишнего малого множителя  $\varepsilon$ , как в случае ламинарной конвекции. При  $\nu_e < \nu_0$  коэффициент  $D$  возрастает с уменьшением  $\nu_e$ , что связано с переносом запертых электронов в дрейфовых волнах.



Рассмотрим теперь вопрос о влиянии на конвекцию градиента температуры. В области частых столкновений  $\nu_e > \nu_2$  это влияние невелико, так что при наличии градиента температуры диффузия остается прежней, и, кроме того, появляется тепловой поток с коэффициентом температуропроводности  $\chi$  порядка  $D$ . Область редких столкновений более чувствительна к наличию градиента

температуры. При  $\nu_0 < \nu_e < \nu_2$  градиент температуры, совпадающий по знаку с градиентом плотности, играет стабилизирующую роль, так что при  $\eta = d \ln T / d \ln n > 1/2$  неустойчивость стабилизируется, и можно ожидать перехода к классической диффузии на запертых частицах. Эффект стабилизации колебаний имеет место и в области  $\nu_e > \nu_0$ , где он проявляется в нелинейном режиме и связан с электростатическим запиранием электронов в дрейфовых волнах [12]. Как показано в работе [12], этот эффект приводит к мелкомасштабной конвекции с коэффициентом температуропроводности  $\chi \approx \varepsilon^{3/2} a^2 \nu_e (1 + \nu_e^2 / \nu_1^2)^{-1}$ , где  $\nu_1 = cT / (cBa^2)$ . Коэффициент  $\chi$  в  $\varepsilon^{-1}$  раз превышает соответствующий коэффициент диффузии, который возникает за счет небольшого сдвига фаз, обусловленного магнитным дрейфом, между флуктуациями плотности  $n'$  и потенциала  $\varphi'$ . Таким образом, при наличии градиента температуры с  $\eta \sim 1$  зависимость  $\chi$  и  $D$  от  $\nu_e$  должна иметь вид, качественно представленный на рисунке штриховыми линиями.

Наличие продольного тока, наоборот, играет дестабилизирующую роль, в особенности, в плотной плазме [8]. В частности, если направленная скорость электронов  $u = j / (en)$  превышает звуковую  $c_s = \sqrt{T_e / m_i}$ , стабилизирующая роль градиента температуры в области  $\nu_0 < \nu_e < \nu_2$  отходит на второй план, и можно ожидать заметного увеличения  $D$  и  $\chi$  по сравнению со значениями, представленными на рисунке. В области  $\nu_e > \nu_2$  также должен иметь место эффект усиленной теплопроводности за счет токово-конвективной неустойчивости.

В гидродинамической области  $\nu_e > \nu_0$  рассмотренная неустойчивость является весьма коротковолновой  $\lambda_{\perp} \sim q\rho_i / \sqrt{\varepsilon}$ , поэтому на нее существенно влияет вязкость ионов. Можно показать, что при достаточно больших длинах пробега ионов  $\lambda_i$ , а именно, когда выполнено неравенство

$$\frac{\varepsilon}{q} > \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/4} \left( 1 + \frac{q^2}{\varepsilon} \left( \frac{\lambda_i}{qR} \right)^2 \right)^{-1/2},$$

вязкость приводит к стабилизации колебаний.

Итак, мы показали, что за счет неустойчивостей дрейфового типа в тороидальной плазме должна развиваться турбулентная конвекция, которая в случае разреженной плазмы ( $\nu_e \lesssim \nu_2$ ) приводит к диффузии и теплопроводности, которые не очень сильно превосходят классические ламинарные

значения. А именно, при  $\nu_1 \sim \nu_2$ , как это имеет место, например, в установках Токамак, и при  $u \sim c_s$  коэффициент турбулентной диффузии, грубо говоря, в  $R/a$  раз, а коэффициент электронной турбулентной теплопроводности в  $(R/a)^2$  раз превышают классические значения. В плотной плазме ( $\nu_e \gtrsim \nu_2$ ) эффекты увеличения  $D$  и  $\chi$  также имеют место, однако реальные утечки энергии из плазмы могут определяться ионной теплопроводностью, которая гораздо больше электронной. Эти выводы находятся в качественном соответствии с результатами, полученными на установках Токамак [13, 14].

#### 4. Диффузия при слабом разрушении магнитных поверхностей

При сопоставлении различных механизмов утечки плазмы (классическая диффузия, неустойчивости и т.д.) следует учитывать также возможность несовершенства реальных магнитных конфигураций, т. е. разрушения магнитных поверхностей внешними возмущениями. В работе одного из авторов [15] был рассмотрен вопрос об удержании плазмы в тороидальных ловушках при достаточно сильном возмущении поверхностей, когда они не замыкаются внутри плазмы. Было показано, что при этом должна развиваться центробежная неустойчивость, приводящая к утечке плазмы порядка бомовской.

Здесь мы проанализируем случай более слабого разрушения поверхностей, когда ширина «островков» и «волнистости» у искаженных магнитных поверхностей [16] не очень велика по сравнению с ларморовским радиусом ионов. При этом для ионов магнитные (или, точнее, дрейфовые) поверхности приближенно сохраняются. Что же касается электронов, то в силу их малого ларморовского радиуса и большой подвижности вдоль силовых линий они получают возможность довольно быстро перемещаться поперек магнитной ловушки. Мы предположим, что возмущенное магнитное поле является стохастическим [17], т. е. каждая силовая линия, «диффундируя», заполняет весь доступный объем ловушки. Допустим, кроме того, что возмущение поверхностей достаточно велико, так что электроны могут довольно свободно диффундировать поперек усредненного магнитного поля.

А именно, пусть  $\delta^2$  — средний квадрат смещения силовых линий на длине  $L$  (порядка длины тора), на которой теряется корреляция возмущений, так что коэффициент диффузии электронов  $D_{\perp} = \delta^2 v_e / L$ , где  $v_e = \sqrt{T/m_e}$  — тепловая скорость электронов. Мы будем считать, что  $D_{\perp} > \rho_e v_e$ , т. е.  $\delta > \sqrt{\rho_e L}$ , где  $\rho_e = v_e m_e c / (eB)$  — средний ларморовский радиус электронов, и, следовательно, их диффузия происходит быстрее, чем дрейф в электрическом поле. В этом в некотором смысле предельном случае электроны быстро приходят к равновесию и должны быть распределены по Больцману:

$$T \nabla n = en \nabla \varphi, \quad (12)$$

где  $T$  — температура электронов,  $n$  — их плотность,  $\varphi$  — потенциал электрического поля. Таким образом, задача сводится к исследованию удержания ионов в ловушке при наличии электрического поля, определяемого условием (12).

Для простоты мы допустим, что ионная температура значительно меньше электронной, так что для описания движения ионов можно воспользоваться гидродинамическим уравнением

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -T\nabla n + \frac{en}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] + m_i n \nu \nabla_{\parallel}^2 \mathbf{v}, \quad (13)$$

где  $\nu$  — коэффициент продольной вязкости. Совместно с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0 \quad (14)$$

уравнения (12) и (13) полностью определяют движение плазмы.

Рассмотрим осесимметричную тороидальную ловушку. Считая, что кривизна ее достаточно мала  $\varepsilon = r/R \ll 1$  ( $r$  — малый радиус,  $R$  — большой радиус тора), будем искать решение системы (1)–(3) путем разложения по параметру  $\varepsilon$ :  $n = n_0 + n' + \dots$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + \dots$ . В нулевом приближении по  $\varepsilon$  мы имеем прямой плазменный шнур, в котором все величины зависят только от радиуса. Предполагая, что инерционный и вязкий члены в (13) малы, находим скорость вращения  $v_0 = \frac{cT}{eBn_0} \frac{dn_0}{dr}$ .

Для определения следующего приближения подставим в уравнение непрерывности выражение для поперечной скорости

$$\mathbf{v}_{\perp} = \frac{cT}{eB^2 n} [\mathbf{B}\nabla n]$$

и, приравнявая члены порядка  $\varepsilon$ , находим

$$\frac{\partial n'}{\partial t} - \varepsilon \frac{\sin \theta}{r} \frac{cT}{eB} \frac{dn_0}{dr} + \frac{B_{\theta}}{B} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} n_0 v'_{\parallel} = 0, \quad (15)$$

где  $B_{\theta}$  — азимутальная компонента магнитного поля, которую мы будем считать малой. Второй член в этом выражении возник из-за тороидальной поправки к продольному полю  $B_z = B(1 - \varepsilon \cos \theta)$ .

Уравнение для продольной компоненты скорости  $v'_{\parallel}$  получим, умножая уравнение (13) на  $\mathbf{B}$  и линеаризуя его по  $\varepsilon$ :

$$n_0 m_i \frac{v_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v'_{\parallel} + \frac{B_{\theta}}{B} \frac{T}{r} \frac{\partial n'}{\partial \theta} = m_i n_0 \nu \frac{B_{\theta}^2}{B^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v'_{\parallel}. \quad (16)$$

Здесь  $\nu$  — продольная вязкость. Мы пренебрегли в (16) малым членом  $n_0 m_i \partial v'_{\parallel} / \partial t$ .

Усредненный поток плазмы поперек шнура определяется соотношением

$$q = \langle (n_0 + n') v'_r (1 + \varepsilon \cos \theta) \rangle = \varepsilon n_0 \langle v'_r \cos \theta \rangle, \quad (17)$$

$$v'_r = - \frac{cT}{eBn_0 r} \frac{\partial n'}{\partial \theta},$$

угловые скобки означают усреднение по  $\theta$ .

Мы учли в (17), что  $\langle v'_r n' \rangle$  обращается в нуль. Таким образом, для определения потока достаточно найти  $n'$  из системы (15), (16). Проще все-

го это сделать, представив  $n'$  и  $v'_{\parallel}$  в виде  $n' = n_1 \cos \theta + n_2 \sin \theta$ ,  $v'_{\parallel} = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta$ . Тогда для  $n_1$ ,  $n_2$  получается система двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка по времени. Эта система имеет устойчивое стационарное решение:

$$n_1 = \varepsilon \frac{B^2}{B_0^2} \frac{v_0^2 m_i}{T} n_0, \quad n_2 = \varepsilon \frac{\nu v_0 m_i}{rT} n_0. \quad (18)$$

Поток частиц при этом оказывается равным  $q = -D dn_0/dr$ , где  $D = 16\varepsilon^2 S D_B$ ,  $D_B = (1/16)cT/(eB)$  — бомовский коэффициент диффузии,  $S$  — параметр, определяемый соотношением  $S = \frac{\nu m_i c}{r^2 e B}$ .

Из выражений (18) видно, что продольная инерция ионов приводит к смещению шнура по большому радиусу ( $n_1 > 0$ ), а вязкость — вдоль оси симметрии тора ( $n_2 \neq 0$ ).

Следует иметь в виду, что выражения (18) справедливы лишь для малого смещения шнура, когда  $n_1, n_2 \ll n_0$ . Что касается  $n_2$ , то в рамках применимости гидродинамического приближения (длина пробега меньше  $R$  и  $\rho < r$ ) оно мало. Однако  $n_1$  может принимать достаточно большие значения при очень малых  $B_0/B$ . Это связано с тем, что ионный ток плохо замыкается вдоль силовых линий из-за продольной инерции. В частности, если продольная инерция очень велика, то уравнение (2) при  $\nu = 0$  будет описывать поперечное движение однокомпонентного идеального газа заряженных частиц.

Ясно, что в неоднородном магнитном поле эти частицы будут с дрейфовыми скоростями выбрасываться на стенку. Для начального интервала времени, когда смещение плазмы относительно магнитных поверхностей еще мало, поток плазмы оказывается пропорциональным времени, так что

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{1}{R^2} \frac{c^2 T^2}{e^2 B^2} \frac{dn_0}{dr}.$$

Отсюда следует, что плазма выбрасывается из ловушки за время  $t \sim \varepsilon^{-1} r^2 e B / (cT)$ , что при грубом наблюдении можно принять за диффузию с бомовским коэффициентом.

Проведенное рассмотрение показывает, что во всех случаях, когда наблюдаемая утечка плазмы оказывается порядка бомовской, следует сначала тщательно исследовать качество магнитных поверхностей и только затем переходить к изучению более тонких механизмов утечки.

#### Список литературы

1. Pfirsch D., Schlüter A. // Report of the Max-Planck Institute. Munich, 1962. MPI/PA. V. 7. P. 62.
2. Шафранов В.Д. // Атомная энергия. 1965. Т. 19. С. 120.
3. Кадомцев Б.Б., Шафранов В.Д. // ДАН СССР. 1966. Т. 167. С. 65.
4. Галеев А.А., Сагдеев Р.З. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 348.
5. Коврижных Л.М. // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 877.

6. *Furth H.P., Killeen I., Rosenbluth M.N.* // Phys. Fluids. 1963. V. 6. P. 459.
7. *Furth H.P. et al.* // Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna, 1966. V. 1. P. 103.
8. *Кадомцев Б.Б.* // В сб.: Вопросы теории плазмы. Атомиздат, 1964. Т. 4. С. 269–298.
9. *Corpi B., Laval G., Pellat R., Rosenbluth M.* // Plasma Phys. 1968. V. 10. P. 1.
10. *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* // ДАН СССР. 1969. Т. 186. С. 553.
11. *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 1734.
12. *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* // ДАН СССР. 1969. Т. 188. С. 311.
13. *Ариимович Л.А., Бобровский Г.А., Горбунов Е.П. и др.* // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA, Vienna, 1969. V. 1. P. 157.
14. *Бобровский Г.А., Разумова К.А.* // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9. С. 269.
15. *Кадомцев Б.Б.* // ЖЭТФ. 1967. Т. 52. С. 1039.
16. *Gibson A.* // Culham Laboratory, Preprint, CLM-P129, 1967.
17. *Rosenbluth M.N., Sagdeev R.Z., Taylor J.B., Zaslavsky G.M.* // Nuclear Fusion. 1966. V. 6. P. 297.



# ТЯЖЕЛЫЙ АТОМ В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ \*)

Рассмотрено приближение Хартри–Томаса–Ферми для тяжелого атома в сверхсильном магнитном поле, значительно превышающем  $10^{10}$  Э, когда происходит полная перестройка электронных оболочек. Показано, что сферическая симметрия сохраняется, а радиус атома убывает с магнитным полем в некотором интервале его изменения. Обсуждается вопрос об уровнях возбуждения такого атома.

## 1. Введение

Открытие квазаров и пульсаров поставило на повестку дня возможность наблюдения вещества при очень сильных магнитных полях, не достижимых пока в лабораторных условиях. Поля в  $10^9 - 10^{10}$  Э и даже в  $10^{12} - 10^{14}$  Э, которые фигурируют в современной астрофизике [1–3], делают если и не целесообразным, то, по крайней мере, не совсем беспочвенным рассмотрение вопроса о поведении обычного вещества (не плазмы) в полях выше  $10^{10}$  Э, начиная с которых взаимодействие атомных электронов с внешним магнитным полем становится больше их кулоновского взаимодействия. Прежде всего, представляет интерес проанализировать вопрос о поведении отдельных атомов в сверхсильных магнитных полях. Для атома водорода или, точнее, для водородоподобных систем типа экситонов в полупроводниках, для которых в силу малости эффективной массы и наличия диэлектрической среды соответствующие поля существенно меньше, этот вопрос изучен полностью [4–8]. Мы рассмотрим здесь задачу об основном состоянии очень тяжелого атома, когда могут быть использованы более простые приближения Хартри–Фока и Томаса–Ферми.

## 2. Приближение самосогласованного поля

Рассмотрим тяжелый атом с атомным номером  $Z \gg 1$  в сильном однородном магнитном поле. В приближении Хартри–Фока нам достаточно рассмотреть движение отдельных электронов в самосогласованном электрическом поле, а затем определить само поле. Уравнение Шредингера для электрона с волновой функцией  $\psi \sim e^{-im\vartheta}$  в цилиндрической системе координат  $\rho, \vartheta, z$  имеет вид

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \left( \frac{m^2}{2\rho^2} - \frac{mB}{2} + \frac{B^2}{8} \rho^2 + B\sigma \right) \psi - \varphi \psi = E\psi, \quad (1)$$

где  $\varphi$  — потенциал электрического поля,  $\sigma$  — спин. Все величины в (1) выражены в атомных единицах, в частности, магнитное поле выражается в единицах  $m^2 e^3 c \hbar^{-3} = 2,35 \cdot 10^9$  Э.

---

\*) ЖЭТФ. 1970. Т. 58. Вып. 5. С. 1765–1769.

При  $B \gg \varphi \sim Z$  можно воспользоваться приближением сильного магнитного поля [4–8]. Для этого выражение в круглых скобках третьего слагаемого в (1) разлагается вблизи минимума при

$$\rho = \rho_m = \sqrt{\frac{2m}{B}} \quad (2)$$

по малому отклонению от точки минимума  $\xi = \rho - \rho_m$  (мы считаем, что  $m > 0$ ). При значениях  $m \gg 1$ , которые потребуются нам в дальнейшем, достаточно ограничиться квадратичным по  $\xi$  членом, а в первом слагаемом (1) можно сохранить лишь старший член со второй производной по  $\xi$ . В этом приближении по отношению к переменной  $\rho$  мы получаем просто гармонический осциллятор и при  $B \rightarrow \infty$  нам следует выбрать основное состояние осциллятора с волновой функцией

$$\psi = \psi(z) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2B}\right), \quad (3)$$

т. е. самый нижний уровень Ландау. При этом следует также считать, что  $\sigma = -1/2$ , т. е. все магнитные моменты повернуты по полю. После отделения этих переменных получаем просто одномерное уравнение

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \varphi(\rho, z) \psi = E \psi, \quad (4)$$

в котором  $\rho = \rho_m$  следует рассматривать как параметр, нумерующий уровень по  $m$ .

Таким образом, мы пришли к естественной картине, что при  $B \rightarrow \infty$  каждый отдельный электрон движется в тонкой цилиндрической оболочке радиуса  $\rho_m$ , совершая колебания по  $z$ . Поскольку ширина оболочки при очень больших  $B$  может быть сколь угодно мала, то при  $B \rightarrow \infty$   $\psi$ -функции отдельных электронов не перекрываются, т. е. обменное взаимодействие отсутствует. Это значит, что в предельном случае  $B \rightarrow \infty$  можно использовать простое приближение Хартри, вместо более точного, но вместе с тем и более громоздкого приближения Хартри–Фока.

Пусть  $\psi$  есть нормированное к единице решение уравнения (4), зависящее от  $\rho$  как от параметра. Тогда плотность электронов можно представить в виде

$$n = n_\rho \psi^2, \quad (5)$$

где  $n_\rho$  означает число электронов, находящихся в столбике единичного сечения:  $n_\rho = \int n dz$ .

Потенциал  $\varphi$  самосогласованного поля определяется уравнением Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi n \quad (6)$$

с граничным условием  $r\varphi \rightarrow Z$  при  $r \rightarrow 0$ . Уравнения (4)–(6) и определяют стационарное состояние тяжелого атома в приближении самосогласованного поля при  $B \rightarrow \infty$ .

Функция  $n_\rho$  для основного состояния должна быть найдена из условия минимума энергии стационарного состояния. Прежде чем перейти к обсуждению этой довольно сложной задачи, рассмотрим более простой случай приближения Томаса–Ферми.

### 3. Модель Томаса–Ферми

Допустим, что  $B$  хотя и велико, но все же не может считаться бесконечным по сравнению с атомным номером  $Z$  в принятых нами единицах. Физически это означает, что ларморова частота не бесконечно велика по сравнению с  $I/\hbar$ , где  $I$  — ионизационный потенциал. Как видно из (3), ширина  $\psi$ -функции по  $\xi$ , т. е. по  $\rho$ , имеет порядок величины  $B^{-1/2}$ . Если эта величина не очень мала, то  $\psi$ -функции соседних по  $m$  уровней будут сильно перекрыты и при этом энергетически выгодным будет заполнение нескольких уровней по  $z$  с сравнительно небольшими  $m \ll Z$ . Таким образом, существует определенный интервал изменения  $B$  (мы его затем уточним), в котором по переменной  $z$  можно воспользоваться приближением Томаса–Ферми, и в то же время считать, что высшие уровни Ландау не заполнены. Так как  $\rho = \sqrt{2m/B}$ , то  $dm$  состояниям по  $m$  соответствует  $d\rho = \sqrt{2/(mB)} dm = (\rho B)^{-1} dm$ , а по переменной  $z$  в силу одномерности движения на интервал  $dz$  приходится  $dN = p_z dz/2\pi$  электронов с данным  $m$ , где  $p_z$  — максимальный импульс, равный  $\sqrt{2\varphi}$ . Отсюда находим

$$dm dN = \frac{1}{2\pi} p_z B \rho d\rho dz = n \cdot 2\pi \rho d\rho dz, \quad (7)$$

т. е. плотность электронов  $n$  равна

$$n = \frac{1}{4\pi^2} B \sqrt{2\varphi}. \quad (8)$$

Если подставить это выражение в (6), то получим уравнение

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\pi} B \sqrt{2\varphi}, \quad (9)$$

сходное с уравнением Томаса–Ферми.

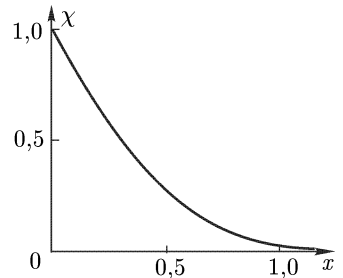
Уравнение (9) является сферически-симметричным, так что его решение зависит только от  $r$  — расстояния от ядра. Решение (9) должно переходить в  $Z/r$  при  $r \rightarrow 0$  и стремиться к нулю быстрее, чем  $r^{-1}$  при  $r \rightarrow \infty$ . В переменных  $\chi$ ,  $x$ , определяемых соотношениями  $\chi(x) = r\varphi/Z$ ,  $x = r[2B^2/(\pi^2 Z)]^{1/5}$ , оно принимает вид

$$\chi'' = \sqrt{x\chi} \quad (10)$$

с граничными условиями  $\chi = 1$  при  $x = 0$  и  $\chi = 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Результат численного решения уравнения (10) представлен на рисунке.

Плотность электронов (8) выражается через функцию  $\chi$  следующим образом:

$$n = \frac{1}{2^{7/5} \pi^{11/5}} (B^3 Z)^{2/5} \sqrt{\frac{\chi}{x}}. \quad (11)$$



Отсюда видно, что, как и в обычной модели Томаса–Ферми, распределение плотности при изменении  $Z$  и  $B$  остается подобным, причем характерный размер атома изменяется как  $Z^{1/5} B^{-2/5}$ . Другими словами, наложение поля уменьшает размеры атома.

Теперь мы можем найти условия применимости рассматриваемого приближения. В рамках приближения Томаса–Ферми электроны с  $\sigma = 1/2$  или на первом возбужденном уровне Ландау могут появиться лишь в области  $\varphi > B/2$  и  $\varphi > B$  соответственно. Поэтому для применимости рассматриваемого приближения необходимо, чтобы в основной области потенциал  $\varphi$  был значительно меньше  $B$ , т. е.  $B \gg Z^{4/3}$ . С другой стороны, из условия, что на каждом уровне  $m$  находится хотя бы несколько электронов, следует  $d\rho/dm \gg r_0/Z$ , где  $r_0 \sim (Z/B^2)^{1/5}$  — радиус атома. Учитывая, что  $d\rho/dm \sim 1/(r_0B)$ , находим отсюда  $B \ll Z/r_0^2$ , т. е.  $B \ll Z^3$ . Таким образом, область применимости рассматриваемого приближения довольно широкая:

$$Z^{4/3} \ll B \ll Z^3. \quad (12)$$

Вернемся теперь к рассмотрению случая  $B \rightarrow \infty$ , т. е.  $B > Z^3$ .

#### 4. Случай $B > Z^3$

При  $B > Z^3$  на каждом уровне  $m$  остается не более одного электрона, поэтому распределение электронной плотности по  $z$  должно определяться квадратом  $\psi$ -функции одиночного электрона, являющейся решением уравнения (1) для основного состояния. Соответственно, использование плотности модели Томаса–Ферми (7), (8) вместо (5), безусловно, должно привести к количественным расхождениям. Однако если не требовать большой точности, то приближенно можно воспользоваться аппроксимацией  $\psi^2 \sim p_z = \sqrt{2\varphi}$ , использованной в модели Томаса–Ферми. Тем самым мы учитываем, что  $\psi^2$  велико в области вблизи медианной плоскости и обращается в нуль, где  $\varphi = 0$ . Если распространить эту аппроксимацию для электронной плотности и в отношении переменной  $\rho$ , то мы придем к выражению типа (8):

$$n = \frac{1}{4\pi^2} B_0 \sqrt{2\varphi}, \quad (13)$$

с той лишь разницей, что теперь величина  $B_0$  есть просто некоторая произвольная константа, которую следует выбирать из условия минимума энергии основного состояния. Эта энергия складывается из кинетической энергии, которая в условиях, когда все электроны «сидят» на нижних  $z$ -уровнях, имеет порядок величины  $Z/r_0^2$  для всех электронов, и потенциальной  $\sim -Z^2/r_0$ . Минимум энергии имеет место при  $r_0 \sim Z^{-1}$ . Но значение  $r_0 \sim Z^{-1}$  достигается как раз на границе применимости (12) модели Томаса–Ферми  $B = Z^3$ . Это значит, что для основного состояния атома константа  $B_0$  в (13) должна быть порядка  $Z^3$ .

Таким образом, при  $B > Z^3$  существует целый набор сферически-симметричных состояний атома, из которых только одно с  $B_0 \sim Z^3$  соответствует основному состоянию. Радиус атома в основном состоянии  $r_0 \sim Z^{-1}$  перестает зависеть от  $B$  при  $B > Z^3$ . При этом средние числа заполнения  $m$ -уровней оказываются, как нетрудно видеть, меньше единицы. Это означает, что электроны вовсе не стремятся заполнить все нижние уровни — их кулоновское отталкивание приводит к «разбуханию» атома, так

что при  $B \gg Z^3$  много нижних уровней остаются незаполненными. По мере увеличения  $B$  ширина каждой оболочки по  $\rho$ ,  $\Delta\rho \sim 1/\sqrt{B}$ , продолжает убывать и при  $B > Z^4$  она становится меньше среднего расстояния между оболочками  $\sim r_0/Z \sim Z^{-2}$ . Таким образом, при  $B > Z^4$   $\psi$ -функции отдельных электронов перестают перекрываться, т. е. выполняются условия приближения Хартри.

Приведенные здесь качественные соображения фактически не зависят от аппроксимации (13), а опираются только на сам факт заполнения каждым электроном нижнего состояния. Используя аналогичные качественные соображения, можно прийти к выводу о том, что основное состояние не должно сильно отклоняться от сферически симметричного, поскольку при деформации электронных оболочек (или  $\psi^2(z)$ ) энергия кулоновского отталкивания электронов возрастает.

Эффект заполнения только части нижних  $m$ -уровней при  $B \gg Z^3$  приводит к тому, что вблизи основного уровня тяжелого атома должна иметься полоса слабо возбужденных состояний, которые соответствуют суперпозиции состояний с одним и тем же макроскопическим распределением электронной плотности, но с разными числами заполнения ближайших  $m$  уровней. Эта полоса отделяется заметной энергетической щелью от аналогичной полосы, где возбужден один из  $z$ -уровней продольного движения электронов. И, наконец, очень высоко лежат уровни возбуждения Ландау.

Поскольку возбуждение уровней Ландау для отдельных электронов очень мало влияет на распределение электронной плотности, то, как при  $B > Z^3$ , так и в области  $Z^{4/3} < B < Z^3$ , соответствующее состояние будет обладать  $Z$ -кратным вырождением. Можно сказать, что такое возбуждение аналогично экситону в кристалле — оно будет передаваться от электрона к электрону, и поэтому соответствующие  $z$ -уровни будут соответствовать различным интерференционным состояниям с возбуждением одного из электронов. Соответственно переворот одного из спинов будет соответствовать спиновой волне в ферромагнетике.

## 5. Заключение

Итак, мы показали, что при очень сильных магнитных полях  $B \gg \gg 10^9 Z^{4/3}$  Э происходит существенное изменение электронных состояний в тяжелом атоме с атомным номером  $Z \gg 1$ . Все электроны в этом случае совершают движение в сравнительно тонких цилиндрических оболочках с осью, направленной вдоль магнитного поля, осциллируя вдоль поля и прецессируя вокруг ядра. Если  $B \ll 10^9 Z^3$  Э, то на каждой оболочке  $m$  находится несколько электронов, и для определения распределения электронной плотности в атоме может быть использована соответствующим образом модифицированная модель Томаса–Ферми. Согласно этой модели атом в сильном магнитном поле сохраняет сферическую симметрию, а его радиус  $r_0$  изменяется как  $(Z/B^2)^{1/5}$ , т. е. атом сжимается с ростом  $B$ . При поле  $B > 10^9 Z^3$  Э сжатие атома прекращается и его радиус в основном состоянии перестает зависеть от поля. При этом  $m$ -оболочки в основном состоянии оказываются заполненными неполностью, а при  $B \gg 10^9 Z^4$  Э

$\psi$ -функции отдельных электронов даже не перекрываются. Спектр возбужденных состояний атома в сверхсильном поле состоит из эквидистантных уровней Ландау и уровней, соответствующих повороту спинов, с широкой полосой около каждого уровня возбуждений продольного движения. При  $B \gg 10^9 Z^3$  Э появляются еще слабые возбуждения, соответствующие изменению чисел заполнения по оболочкам со слабым возмущением усредненного распределения плотности.

### *Список литературы*

1. Гинзбург В.Л., Железняков В.В., Зайцев В.В. // УФН. 1969. Т. 98. С. 201.
2. Гинзбург В.Л. // ДАН СССР. 1964. Т. 156. С. 43.
3. Гинзбург В.Л., Озерной В.М. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1031.
4. Elliot R.J., London R. // J. Phys. Chem. Sol. 1960. V. 15. P. 196.
5. Hasegawa H., Howard R.E. // J. Phys. Chem. Sol. 1961. V. 21. P. 179.
6. Монозон Б.С., Жилич А.Г. // ФТТ. 1966. Т. 8. С. 3559; ФТП. 1967. Т. 1. С. 673.
7. Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 717.
8. Захарченя Б.П., Сейсян Р.П. // УФН. 1969. Т. 97. С. 193.

# ГЕЛИКОНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ \*)

Рассмотрены безынерционные колебания электронов проводника или плазмы в сильном магнитном поле с произвольной амплитудой, обладающие винтовой симметрией. Показано, что обычные геликоны представляют собой частный случай класса решений с частотой, не зависящей от амплитуды.

## 1. Введение

Как известно, в замагниченной плазме в интервале частот между циклотронной ионной и циклотронной электронной, а также в металлах и полупроводниках, помещенных в сильное магнитное поле, возможно распространение медленных электромагнитных волн — свистов или геликонов. Обычно эти волны имеют сравнительно малую амплитуду и могут быть описаны в линейном приближении. Однако более интересными с общей точки зрения нелинейных волновых процессов в сплошных средах кажутся волны конечной амплитуды. Они могут представлять и практический интерес. В настоящей работе мы рассмотрим волны конечной амплитуды с винтовой симметрией. Как мы увидим, задача определения всех возможных волн с винтовой симметрией типа геликонов сводится к решению одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка для скалярной функции. В работе получено это уравнение и приведены некоторые простейшие его решения.

## 2. Медленные электромагнитные волны с винтовой симметрией

Предположим, что в замагниченной плазме или в твердом проводящем теле, помещенном во внешнее магнитное поле, распространяется медленная электромагнитная установившаяся периодическая волна, обладающая винтовой симметрией. Последнее означает, что все величины в такой волне меняются в пространстве таким образом, что они зависят только от  $r$  и комбинации  $\zeta = kz - m\vartheta$  цилиндрических координат  $(r, \vartheta, z)$ . Здесь  $m$  — произвольное целое число, соответствующее числу заходов винта рассматриваемой нами волны.

Медленность волны позволяет нам пренебречь током смещения. Будем считать далее, что, с одной стороны, частота колебаний достаточно велика, так что можно пренебречь смещением ионов (или решетки) в волне, а с другой стороны, она значительно меньше циклотронной частоты электронов, т. е. инерция электронов незначительна. Для простоты мы пренебрежем также трением электронов о ионы или решетку, т. е. будем считать проводимость бесконечной. Это соответствует условию  $\Omega_e \tau_e \gg 1$ , где  $\Omega_e = eB/(m_e c)$  — циклотронная частота электронов,  $\tau_e$  — их среднее время

---

\*) *Игитханов Ю.Л., Кадомцев Б.Б. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. Вып. 6(6). С. 2147–2153.*

столкновений. В этих приближениях имеем следующую систему уравнений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{4\pi e}{c} n(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{B}] = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \mathbf{v}_e = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.3)$$

В этих уравнениях  $\mathbf{v}_e$  — скорость электронов,  $\mathbf{v}_i$  — скорость ионов, а остальные обозначения общепринятые. Плазму мы считаем квазинейтральной, так что плотности электронов и ионов равны  $n$ , температуру электронов считаем равной нулю.

Нам удобно перейти в систему координат, движущуюся с фазовой скоростью волны  $\mathbf{v}_0$ . В этой системе координат ионы движутся с постоянной скоростью  $\mathbf{v}_i = -\mathbf{v}_0$ , а производные по времени обращаются в нуль.

В силу винтовой симметрии уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \zeta} (m B_\vartheta - kr B_z) = 0. \quad (2.4)$$

Отсюда видно, что

$$r B_r = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \quad m B_\vartheta - kr B_z = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (2.5)$$

где  $\psi$  — произвольная функция от  $r$ ,  $\zeta$ . Введем еще обозначение

$$I = m B_z + kr B_\vartheta. \quad (2.6)$$

Тогда компоненты магнитного поля могут быть выражены через  $\psi$ ,  $I$ :

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, & B_\vartheta &= \frac{1}{m^2 + k^2 r^2} \left( m \frac{\partial \psi}{\partial r} + kr I \right), \\ B_z &= \frac{1}{m^2 + k^2 r^2} \left( -kr \frac{\partial \psi}{\partial r} + m I \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Аналогичным образом из уравнения  $\operatorname{div} n \mathbf{v}_e = 0$  следует

$$r n v_r = \frac{c}{4\pi e} \frac{\partial \chi_e}{\partial \zeta}, \quad m n v_\vartheta e - k r n v_{ze} = \frac{c}{4\pi e} \frac{\partial \chi_e}{\partial r}, \quad (2.8)$$

где  $\chi$  — произвольная функция от переменных  $r$ ,  $\zeta$ . Если снова ввести в рассмотрение величину типа (2.6),

$$\mu_e = \frac{4\pi e}{c} (m n v_{ze} + k r n v_\vartheta e), \quad (2.9)$$

то компоненты электронной плотности тока могут быть выражены через  $\chi_e$ ,  $\mu_e$  с помощью соотношений, аналогичных (2.7).

Для ионов нам достаточно рассмотреть частный случай  $\mathbf{v}_i = -\mathbf{v}_0$ . Однако проще, оказывается, рассмотреть более общий случай винтового течения ионов, которое также можно описать функциями  $\chi_i$ ,  $\mu_i$ , а затем перейти к частному случаю  $\partial \chi_i / \partial \zeta = 0$ ,  $\partial \mu_i / \partial \zeta = 0$ .

Перейдем теперь к уравнениям (2.2). Первое из них показывает, что в стационарном случае электрическое поле является безвихревым, т. е.  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ . Следовательно, второе уравнение принимает вид

$$[\mathbf{v}_e \mathbf{B}] = c \nabla \varphi, \quad (2.10)$$



откуда следует  $\mathbf{B}\nabla\varphi = 0$ ,  $en\mathbf{v}_e\nabla\varphi = 0$ , т. е. силовые линии и линии электронного тока лежат на эквипотенциалах  $\varphi = \text{const}$ . Записанные в компонентах эти условия приводят к соотношениям типа обращения в нуль якобианов, из которых следует

$$\varphi = \varphi(\psi), \quad \chi_e = \chi_e(\varphi), \quad (2.11)$$

т. е.  $\chi_e$  и  $\varphi$  являются функциями  $\psi$ . Другими словами,  $\chi_e$  и  $\varphi$  постоянны на магнитных поверхностях  $\psi = \text{const}$ . Третья компонента (2.10), в качестве которой удобно выбрать проекцию на  $\nabla\psi$ , приводит к соотношению

$$\mu_e = I \frac{\partial\chi_e}{\partial\psi} - 4\pi e(m^2 + k^2 r^2)n \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}. \quad (2.12)$$

Рассмотрим теперь уравнение (2.1). Его  $r$ -компонента и разность  $\vartheta$ -компоненты и  $z$ -компоненты, умноженной на  $kr/m$ , приводят к условию:

$$I = \chi_e - \chi_i, \quad (2.13)$$

а сумма  $\vartheta$ -компоненты уравнения (2.1) и  $z$ -компоненты, умноженной на  $m/kr$ , дает соотношение

$$\beta\Delta^*\psi + \frac{2mkI}{\beta} = \mu_i - \mu_e, \quad (2.14)$$

где

$$\Delta^*\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}, \quad \beta = m^2 + k^2 r^2. \quad (2.15)$$

Если теперь подставить сюда  $I$  из (2.13), а  $\mu_e$  из (2.12), то получим одно нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для  $\psi$ :

$$\Delta^*\psi + \frac{2mk}{\beta^2} (\chi_e - \chi_i) + \frac{1}{\beta} (\chi_e - \chi_i) \frac{d\chi_e}{d\psi} - 4\pi en \frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{\mu_i}{\beta}. \quad (2.16)$$

В этом уравнении  $\chi_e$  и  $\varphi$  являются произвольными функциями от  $\psi$ . Что же касается плотности  $n$  и ионных функций  $\chi_i$ ,  $\mu_i$ , то они являются некоторыми заданными функциями  $r$ ,  $\zeta$ .

Для наиболее интересного случая цилиндрического проводника или плазменного цилиндра их следует считать не зависящими от  $\zeta$ , и если ионы в лабораторной системе координат покоятся, то следует положить

$$\mu_i = -\frac{4\pi e}{c} mnv_0, \quad \chi_i = \frac{4\pi e}{c} kv_0 \int_0^r nr \, dr. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.16) описывает наиболее общие винтовые течения замагниченных электронов в пренебрежении их инерцией и столкновениями. Эти течения хотя и усложнены необычной конфигурацией винтовых магнитных полей, имеют точно такую же физическую природу, что и простые геликоны или свисты, и поэтому их также целесообразно называть геликонами в некотором обобщенном смысле.

Разумеется, в общем виде уравнение (2.16) совершенно недоступно для аналитического решения, поэтому представляет интерес рассмотреть некоторые более простые частные случаи. К ним относятся собственно геликоны в продольном магнитном поле, а также задачи о протекании тока в идеальном проводнике с учетом эффекта Холла.

Мы начнем с рассмотрения собственно геликонов.

### 3. Геликоны

Рассмотрим простой и, как мы увидим ниже, наиболее интересный случай, когда функции  $\chi_e$  и  $d\varphi/d\psi$  линейно зависят от  $\psi$ :

$$\chi_e = A + Ck\psi, \quad 4\pi e \frac{d\varphi}{d\psi} = D - L\psi, \quad (3.1)$$

где  $A, C, D, L$  — константы.

При этом уравнение (2.16) становится линейным, и его решение можно представить в виде  $\psi = \psi_0 + \psi'$ , где  $\psi_0$  зависит только от координаты  $r$ , а зависимость  $\psi'$  от  $\zeta$  для отдельной фурье-гармоники можно выбрать в виде  $e^{i\zeta}$ . Для  $\psi'$  мы получаем однородное уравнение второго порядка:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\beta} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \psi' + \frac{2mk^2 C}{\beta^2} \psi' + \frac{C^2 k^2}{\beta} \psi' + Ln\psi' = 0. \quad (3.2)$$

Отсюда видно, что при достаточно больших  $C$  и  $L$  решения имеют вид осциллирующих с  $r$  функций. В частном случае  $L = 0, C = 1$  уравнение (3.2) имеет решение  $\psi' = r$ , что соответствует обычным геликонам в неограниченной среде, распространяющимся вдоль магнитного поля.

Уравнение для  $\psi_0$ , которое мы не будем здесь приводить (оно легко получается из (2.16) подстановкой (3.1)) позволяет при заданных  $n, v_0$  и константах  $A, C, D, L$  найти  $\psi_0$ , а затем, согласно (3.1), и  $\chi_e$ , т. е.  $I_0$ . Тем самым определяется самый общий вид полей  $B_z^0(r), B_\vartheta^0(r)$ , обладающих той особенностью, что в них возможно распространение волн типа геликонов любой амплитуды, и при этом сами усредненные по азимуту значения  $B_r^0, B_\vartheta^0$  остаются прежними. Другими словами, частота геликонов в таких полях не зависит от их амплитуды. Таким свойством уравнение (2.16) обладает только при линейной зависимости (3.1). Соответственно, только в классе решений (3.1) частота волн не зависит от их амплитуды.

Рассмотрим теперь еще более частный случай, когда плотность, продольное магнитное поле и продольная плотность тока постоянны, т. е.  $n = \text{const}, B_z = B_0 = \text{const}, B_\vartheta^0/r = \text{const}$ . При этом

$$\psi_0 = -\frac{k_{\parallel} B_0}{2} r^2, \quad I_0 = mB_0 + kr^2 \left( \frac{B_\vartheta^0}{r} \right), \quad (3.3)$$

где  $k_{\parallel} = k \pm \frac{mB_\vartheta^0}{B_0 r}$ .

Если второе соотношение (3.3) подставить в (2.13) и учесть (2.17), (3.1), то после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $r^2$  получаем

$$v_0 = -\frac{k_{\parallel} c B_0}{4\pi e n} C - \frac{c}{2\pi e n} \frac{B_\vartheta^0}{r}, \quad (3.4)$$

$$A = mB_0. \quad (3.5)$$

Соотношение (3.4) есть не что иное, как дисперсионное уравнение для фазовой скорости геликонов, второе слагаемое в (3.4) соответствует просто сносу геликонов с дрейфовой скоростью электронов.

Если подставить выражения (3.1), (3.3) и (2.17) в уравнение (2.16), то путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $\beta$  нетрудно найти

$$L = 0, \quad D = \frac{CB_{\vartheta}^0}{rn}. \quad (3.6)$$

Нетрудно рассмотреть также случай  $B_{\vartheta} \sim 1/r$ , когда на оси шнура протекает внешний ток. При этом  $L = D = 0$ ,  $A = mB_0 - (1/2)CkmrB_{\vartheta}^0$ ,  $v_0 = -\frac{ckB_0}{4\pi en} C$ , т. е. частота геликона не зависит от  $B_{\vartheta}^0$ .

Таким образом, у нас остается только одна произвольная константа  $C$ . Уравнение (3.2) при  $L = 0$ , как нетрудно проверить, представляет собой обычное уравнение для геликонов, точнее, уравнение для  $B'_r$ -компоненты возмущенного поля  $\mathbf{B}'$ , удовлетворяющего уравнению [1]

$$\text{rot } \mathbf{B}' = Ck\mathbf{B}'. \quad (3.7)$$

Это уравнение в линейном приближении легко получается из (2.1), (2.2), причем собственная частота колебаний  $\omega = kv_0$  оказывается связанной с  $C$  соотношением (3.4).

Таким образом, мы показали, что в случае однородных плотности, магнитного поля  $B_z$  и плотности тока вдоль  $z$ , в среде могут распространяться геликоны произвольной амплитуды, и их частота и фазовая скорость не зависят от амплитуды. Этот вывод получен для цилиндрических волн, но, разумеется, он относится и к плоским волнам. Отметим в связи с этим, что полученный в работе [2] отличный от нашего результат о слабой зависимости частоты плоской волны типа геликона от ее амплитуды связан с учетом очень малых добавок от возмущения электронной плотности в косой волне.

Константа  $C$  определяется граничными условиями. Например, мы можем потребовать обращения в нуль  $B'_r$ -компоненты, а следовательно, и  $\psi'$  на границе цилиндрического проводника, скажем, при  $r = R$ . Условие  $\psi'_{r=R} = 0$  следует также из обращения в нуль радиальной компоненты электронного тока, вследствие чего при  $r = R$  функция  $\chi_e$ , а вместе с ней и  $\psi$  (согласно (3.1)) не должны зависеть от  $\zeta$ . Однако в таком решении на границе проводника  $B'_z$  и  $B'_\vartheta$  отличны от нуля, так что его следует интерпретировать как колебания в проводящем теле с учетом эффекта Холла, окруженного проводником с бесконечной проводимостью, по которому могли бы течь поверхностные токи. Если проводник граничит с вакуумом, то, как было показано в [1], наличие поверхностных токов приводит к конечному декременту затухания волн даже при  $\tau_e \rightarrow \infty$ . При этом условие  $\psi'_{r=R} = 0$  определяет волну с наименьшим декрементом затухания [3].

Освободиться от затухания, связанного с поверхностными токами можно было бы с помощью плавного убывания  $n$  от  $r$  [3]. В самом деле, для волны малой амплитуды в частном случае  $B_z = B_0 = \text{const}$ ,  $B_{\vartheta} = 0$ ,  $m \neq 0$ , из системы (2.1)–(2.3) нетрудно получить линеаризованное уравнение для возмущения  $\psi'$ :

$$\Delta^* \psi' + Q(r) \frac{2mk^2}{\beta^2} \psi' + Q^2(r) \frac{k^2}{\beta} \psi' = \frac{m}{\beta} Q(r) \frac{1}{r} \frac{d \ln n}{dr} \psi', \quad (3.8)$$

где  $Q = -\frac{4\pi e v_0}{c k B_0} n(r)$ . Допустим, что  $n \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Тогда, как легко видеть, при  $r \rightarrow \infty$   $Q \rightarrow 0$  и уравнение (3.8) имеет экспоненциально спадающие решения:  $\psi' \sim e^{-kr}$ . Эти решения практически не будут чувствовать границы проводника с вакуумом, если эта граница расположена при достаточно больших  $kr$ .

Покажем, что уравнение (3.8) действительно обладает такими решениями, удовлетворяющими граничному условию  $\psi' = 0$  при  $r = 0$ . В самом деле, выберем  $v_0$  такое, чтобы в основной области  $Q$  было много больше единицы. Тогда в этой области в уравнении (3.8) можно пренебречь линейными по  $Q$  членами и оставить только квадратичный. Но оставшееся уравнение, как нетрудно видеть, например, в квазиклассическом приближении, имеет осциллирующие с  $r$  решения. Подбором  $Q$  можно добиться чтобы один из нулей этого решения попал в точку  $r = 0$ , т. е. чтобы было удовлетворено граничное условие при  $r = 0$  и при этом  $\psi'$  убывало бы на бесконечности.

Таким образом, при спадающем с  $r$  профиле плотности в однородном магнитном поле существуют линейные по амплитуде локализованные по  $r$  геликоны. Однако, их нелинейный аналог не относится к рассмотренным нами выше классу нелинейных геликонов, хотя бы потому, что коэффициенты слагаемых в уравнении (3.8), имеющих ту же структуру, что и в (3.2), зависят от координат. Поэтому рассмотренные волны не входят в класс геликонов, частота и фазовая скорость которых не зависят от амплитуды. Это можно показать и более прямым образом.

Действительно, легко видеть, что в классе решений (3.1) в рассматриваемом случае, когда  $B_\vartheta = 0$  и  $\psi_0 = -k B_0 r^2 / 2$ , величина

$$I_0 = m B_0 = \chi_e - \chi_i = A - \frac{k^2 C B_0}{2} r^2 - \frac{4\pi e}{c} k \int_0^r n v_0 r dr = \text{const}, \quad (3.9)$$

где  $\chi_e$  подставлено из (3.1), а  $\chi_i$  выражено согласно (2.17). Дифференцируя (3.9) по  $r$ , получаем:  $n v_0 = -\frac{c k B_0}{4\pi e} C = \text{const}$ , что при  $v_0 = \text{const}$  приводит к однородности  $n = \text{const}$ . Если считать, что профиль ионных скоростей  $v_0$  не однороден по  $r$  и таков, что  $v_0 \sim 1/n(r)$ , то тогда, как легко видеть из уравнения для  $\psi_0$ , постоянная  $L = 0$ . Но тогда из уравнения (3.2) выпадет член с плотностью, и мы опять придем к нелокализованным по  $r$  геликонам.

#### 4. Протекание тока по проводнику с винтовой симметрией

Если в уравнении (2.16) положить  $v_0 = 0$ , т. е.  $\mu_i = \chi_i = 0$ , а  $n$  считать функцией  $r, \zeta$ , то мы приходим к задаче о протекании электрического тока с учетом эффекта Холла по покоящемуся идеальному проводнику с винтовой симметрией (при  $\Omega_e \tau_e \gg 1$ ). Само уравнение (2.16) при этом принимает вид

$$\Delta^* \psi + \frac{2mkI}{\beta^2} + \frac{I}{\beta} \frac{dI}{d\psi} = 4\pi e n \frac{d\varphi}{d\psi}, \quad (4.1)$$

где  $I = \chi_e$  и  $\varphi$  — произвольные функции  $\psi$ .

Уравнение (4.1) сходно с уравнением винтового равновесия в магнитной гидродинамике [4–6]:

$$\Delta^* \psi + \frac{2mkI}{\beta^2} + \frac{I}{\beta} \frac{dI}{d\psi} = -4\pi \frac{dp}{d\psi}, \quad (4.2)$$

где  $p$  — давление. Это, разумеется, не случайно. Дело в том, что уравнение (4.2) является, в каком-то смысле, частным случаем уравнения (4.1). В самом деле, в случае гидродинамического равновесия ионов при  $\mathbf{v}_i = 0$

$$\nabla p_i = en\mathbf{E}, \quad (4.3)$$

где  $p_i = nT_i$ ,  $T_i$  — ионная температура, а во второе уравнение (2.2) следует добавить дополнительное слагаемое  $e^{-1}n\nabla p_e$ , где  $p_e = nT_e$  — давление электронов. Это означает, что в стационарном уравнении равновесия для электронов (второе уравнение (2.2)) вместо  $\nabla\varphi$  следует подставить  $-(en)^{-1}\nabla p$ , что и приводит к замене (4.1) на (4.2).

Аналогия между (4.1) и (4.2) показывает, что при  $n = \text{const}$  или, в более общем случае  $n = n(\varphi)$ , уравнение для протекания электронного тока сводится к уравнению равновесия. Можно сказать, что электроны должны образовывать равновесную конфигурацию в магнитном и электрическом полях.

Соответственно, реализоваться могут лишь такие электронные токи, которые имеют аналог гидромагнитного равновесия [7].

При азимутальной симметрии ( $m = 0$ ) и  $B_z = 0$ , как известно из теории магнитогидродинического равновесия [8], равновесие возможно только при цилиндрической симметрии. Аналогичный вывод справедлив и в данном случае.

А именно, как видно из (4.1), при  $m = 0$  и  $B_z \rightarrow 0$ , т. е.  $\psi \rightarrow 0$ , должно выполняться условие  $dI^2/d\varphi = 8\pi enk^2 r^2$ , т. е.

$$I = krR_\vartheta = F(r^2n), \quad (4.4)$$

где  $F$  — произвольная функция.

При  $n = \text{const}$  отсюда следует, что  $I$  и  $B_\vartheta$  являются функциями только  $r$ , т. е. ток может течь только по цилиндрическим поверхностям. Этот вывод согласуется с результатами работ [7, 9], где было показано, что при  $\Omega_e \tau_e \gg 1$  электрический ток не затекает в выпуклости гофрированного проводника.

Как мы видим из (4.4), только в частном случае  $n \sim r^{-2}$  ток  $I$  может зависеть и притом произвольным образом от  $\zeta$ .

## 5. Заключение

Итак, мы показали, что задача отыскания всех возможных волн конечной амплитуды с винтовой симметрией сводится к решению одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Это уравнение обладает классом решений, формально имеющих вид линейных. Эти решения обладают той особенностью, что их частота не зависит от амплитуды (конечной). Обычные геликоны, в том числе распространяющиеся под углом к магнитному полю, входят именно в этот класс решений. К сожалению, в однородном образце геликоны обладают заметным затуханием, не

зависящим от частоты столкновений, за счет диссипации поверхностного тока. В случае убывающего с  $r$  профиля плотности  $n(r)$  можно добиться, чтобы геликоны малой амплитуды были локализованы по радиусу и не обладали сильным затуханием из-за поверхностных токов, однако такие решения не входят в класс волн с независимой от амплитуды частотой.

*Список литературы*

1. *Kloosenberg J.P., McNamara B., Thonemann P.C.* // J. Fluid Mech. 1965. V. 21. P. 545.
2. *Tam C.* // Phys. Fluids. 1969. V. 12. P. 1028.
3. *Sudan R.N., Cavaliere A., Rosenbluth M.N.* // Phys. Rev. 1967. V. 158. P. 387.
4. *Johnson J., Oberman C., Kulsrud R., Frieman E.* // Proc. of the II Intern. Conf. on the peaceful uses of Atomic Energy. Geneva, 1958. P/1875.
5. *Кадомыцев Б.Б.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 1353.
6. *Соловьев Л.С.* // Вопросы теории плазмы. Вып. 3. Атомиздат, 1963. С. 245.
7. *Морозов А.И., Шубин А.П.* // ЖЭТФ. 1964. Т. 46. С. 710.
8. *Шафранов В.Д.* // Вопросы теории плазмы. Вып. 2. Атомиздат, 1963. С. 104.
9. *Брызгалов В.И., Морозов А.И.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 1790.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В СЛАБО ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ \*)

Как известно [1–3], широкий класс одномерных нелинейных волн в средах со слабой дисперсией (например, волны на мелкой воде, ионно-звуковые и магнитозвуковые волны в плазме и т. п.) описывается уравнением Кортевега-де-Вриза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1)$$

Это уравнение описывает эволюцию нелинейной волны в системе координат, движущейся со скоростью распространения длинноволновых возмущений  $c$  (для определенности мы будем называть ее скоростью звука). Для волн на мелкой воде и для волн в плазме под  $u$  можно подразумевать возмущение скорости или давления (в простой волне они однозначно связаны между собой).

Уравнение (1) можно с равным успехом использовать как для сред с отрицательной дисперсией, когда фазовая скорость линейных волн уменьшается с увеличением волнового числа, так и для сред с положительной дисперсией, когда фазовая скорость возрастает с волновым числом. Вся разница состоит лишь в том, что в первом случае координата  $x$  отсчитывается в сторону распространения волны, а во втором — в обратную сторону [2].

Уравнение Кортевега-де-Вриза к настоящему времени хорошо изучено [1–4]. В частности, показано, что в эволюции произвольных начальных возмущений  $u(x, 0)$  важную роль играют специальные решения уравнения (1) типа уединенных волн или солитонов:

$$u = u_0(x, t) = af(\sqrt{a}(x - x_0)), \quad (2)$$

где  $a$  — амплитуда волны,  $x = at$  — ее фаза, а функция  $f(\xi)$ , удовлетворяющая следующим из (1) уравнениям,

$$-f' + ff' + f''' = 0, \quad -f + \frac{1}{2}f^2 + f'' = 0 \quad (3)$$

(штрих означает производную по  $\xi$ ), равна

$$f(\xi) = 3 \left( \frac{\text{ch } \xi}{2} \right)^{-2}. \quad (4)$$

Солитон представляет собой одномерную нелинейную волну, в предположении одномерности он является вполне устойчивым образованием. Однако остается открытым вопрос о том, сохраняется ли устойчивость

---

\*) Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 753–756.

солитона при слабом искривлении, когда его амплитуда  $a$  и фаза  $x_0$  являются медленно меняющимися функциями координаты  $y$ , отсчитываемой поперек распространения солитона. Возможность неустойчивости типа самофокусировки у периодических нелинейных волн указывает на необходимость исследования аналогичного эффекта и в случае уединенной волны.

При нарушении строгой одномерности уравнение (1) возмущается, и если зависимость от координаты  $y$  является медленной, то это возмущение можно учесть, добавляя в уравнение (1) малое слагаемое  $\partial\varphi/\partial y$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (5)$$

Вид возмущения легко установить, рассматривая предельный случай плоской волны малой амплитуды  $u = \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$  с малой длиной волны вдоль  $x$ ,  $k_x \ll 1$ , когда вторым и третьим слагаемыми в (5) можно пренебречь. Для такой волны при отрицательной дисперсии частота колебаний в используемой нами системе координат, движущейся вдоль оси  $x$  со скоростью  $c$ , равна  $\omega = kc - k_x c = c\left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} - k_x\right) \approx \frac{c}{2} \frac{k_y^2}{k_x}$ , а для волны с положительной дисперсией, поскольку в этом случае  $x$  отсчитывается против волны,  $\omega = -kc + k_x c \approx -\frac{c}{2} \frac{k_y^2}{k_x}$ . Отсюда видно, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mp \frac{c}{2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (6)$$

где верхний знак относится к отрицательной, а нижний — к положительной дисперсии.

Мы ограничимся далее линейным приближением, считая  $\partial x_0/\partial y \ll 1$  (при этом амплитуда колебаний фазы  $x_0$  может быть все же значительно больше ширины солитона  $\sim 1/\sqrt{a}$ ). Но даже в линейном приближении система уравнений (5), (6) достаточно сложна, и поэтому мы перейдем к предельному случаю очень больших длин волн вдоль  $y$ , когда  $\partial x_0/\partial y \ll \ll \sqrt{ac} < 1$ . В этом случае  $\varphi$  мало, и уравнения (5), (6) можно решать по методу Крылова–Боголюбова, т. е. введением медленно меняющихся переменных. Для этого в уравнении (5) вместо  $x$  введем переменную  $\xi = \sqrt{a}(x - x_0)$  и запишем его в виде

$$a^{3/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -u + \frac{u^2}{2a} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) = \sqrt{a} \frac{\partial u}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x_0}{\partial t} - a \right) - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial t} \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (7)$$

где правую часть можно считать малой.

В нулевом приближении правую часть полагаем равной нулю и получаем  $u = u_0 = af(\xi)$ . В следующем приближении полагаем  $u = u_0 + u_1$  и линеаризуем левую часть уравнения (7), а в правую часть подставляем  $u_0$ :

$$a^{3/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -u_1 + fu_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} \right) = a^{3/2} f' \left( \frac{\partial x_0}{\partial t} - a \right) - \frac{\partial a}{\partial t} z + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (8)$$

где  $f' = df/d\xi$ ,  $z = f + (1/2)\xi f'$ , а  $\varphi$  следует найти из (6) с подстановкой  $u = u_0$  в правую часть.



Будем считать  $\partial/\partial t$  и  $\partial/\partial y$  малыми порядка  $\varepsilon$ . Как мы увидим ниже, колебания фазы  $x_0(y)$  значительно больше колебаний амплитуды  $a$ , так что переменную часть амплитуды  $\tilde{a}$  следует считать малой порядка  $\varepsilon\tilde{x}_0$ . С точностью до членов порядка  $\varepsilon$  в правой части уравнения (8) следовало бы сохранить лишь первое слагаемое. При этом, как нетрудно проверить с помощью (3), из уравнения (8) мы нашли бы в качестве решения  $u_1 = (\partial x_0/\partial t - a)z$ , где  $z = f + (1/2)\xi f'$ . Но пропорциональная  $z$  добавка к основному решению  $u_0$  соответствует, как нетрудно видеть, небольшой вариации амплитуды солитона  $a$ . Без ограничения общности мы можем потребовать, чтобы эта добавка обращалась в нуль, — это будет соответствовать просто правильному выбору значения амплитуды. (Точно так же можно потребовать, чтобы обращалась в нуль часть возмущения  $u_1 = \text{const} \cdot f'$ , являющаяся решением однородного уравнения (8), что соответствует правильному выбору фазы  $x_0$ .) Таким образом, с точностью до малых второго порядка по  $\varepsilon$  имеем

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = a. \quad (9)$$

В следующем приближении по  $\varepsilon$  нам достаточно учесть в  $\varphi_1$  слагаемые лишь первого порядка малости  $\varphi_1$ , так что в линейном приближении  $\varphi_1 = \pm \frac{ca}{2} \frac{\partial x_0}{\partial y} f$ . Следовательно, для поправки второго порядка малости  $u_2$  имеем

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + a^{3/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -u_2 + f u_2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} \right) = -\frac{\partial a}{\partial t} z \pm \frac{ca}{2} \frac{\partial^2 x_0}{\partial y^2} f. \quad (10)$$

Умножим уравнение (10) на  $f$  и проинтегрируем по  $\xi$ . При этом, как нетрудно проверить с учетом (3), интеграл от второго слагаемого в левой части (10) после интегрирования по частям обратится в нуль, и из условия малости  $\partial u_2/\partial t \sim \varepsilon^3$  с точностью до членов третьего порядка малости следует

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \pm \frac{2ca}{3} \frac{\partial^2 x_0}{\partial y^2}, \quad (11)$$

где множитель  $2/3$  возник после усреднения по  $\xi$  (с учетом  $\langle z f \rangle = (3/4)\langle f^2 \rangle$ ). Из (11) видно, что колебания амплитуды действительно значительно меньше, чем колебания фазы  $\tilde{x}_0$ .

Функцию  $u_2$  можно приближенно найти, если положить  $u_2 = A(1-z)$  и считать  $A$  медленно меняющейся функцией  $\xi$ , т. е. пренебречь ее высшими производными по  $\xi$ . В этом приближении с учетом (11) уравнение (10) принимает вид

$$(1-z) \frac{\partial A}{\partial t} + a^{3/2} \frac{\partial A}{\partial \xi} = -\frac{1}{4} \frac{\partial a}{\partial t} (f + \xi f'). \quad (12)$$

Снаружи от солитона это уравнение описывает бегущую против  $\xi$  волну:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + a^{3/2} \frac{\partial A}{\partial \xi} = 0, \quad (13)$$

так что  $A = F(t - \xi a^{-3/2})$ , где  $F$  — произвольная функция. В области солитона в уравнении (12) можно пренебречь производной от  $A$  по времени, и если в набегающем на солитон потоке возмущение отсутствует, то  $A$

находится из (12) интегрированием по  $\xi$  с граничным условием  $A = 0$  при  $\xi = \infty$ . В частности, слева снаружи от солитона получаем

$$A(t) = F(t) \approx -\frac{1}{4} \frac{\partial a}{\partial t} \sim \varepsilon^2.$$

Таким образом, при колебаниях солитона от него отходит назад длинноволновое возмущение типа бегущей волны с амплитудой, пропорциональной  $\partial a / \partial t$ .

Из уравнений (9), (11) находим уравнение для колебаний фазы солитона  $x_0$ :

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} = \pm \frac{2ca}{3} \frac{\partial^2 x_0}{\partial y^2}, \quad (14)$$

где амплитуду  $a$  в рассматриваемом нами приближении можно считать постоянной.

Из уравнения (14) видно, что в среде с положительной дисперсией (знак минус) солитон неустойчив по отношению к искривлению, и его малые возмущения будут нарастать со временем. Инкремент нарастания таких возмущений пропорционален корню квадратному из амплитуды, т. е. он достаточно велик.

В случае отрицательной дисперсии (знак плюс) уравнение (14) приводит к гармоническим колебаниям, и для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости солитона следует учесть члены порядка  $\varepsilon^3$ . Для этого в уравнении (10) следует сохранить добавку второго порядка малости  $\varphi_2$ , удовлетворяющую соотношению

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = -\frac{c}{2\sqrt{a}} \frac{\partial a}{\partial y} z. \quad (15)$$

Учитывая, что в набегающем на солитон потоке возмущение отсутствует, имеем  $\varphi = 0$  при  $\xi = +\infty$ , и из (15) легко находим  $\varphi_2$ . Умножая снова (10) на  $f$  и интегрируя по  $\xi$  с сохранением малых членов  $\partial u_2 / \partial t$  и  $\partial \varphi_2 / \partial y$ , можно убедиться, что малые добавки  $\sim \varepsilon^3$  приводят к затуханию колебаний солитона.

Итак, мы показали, что в случае отрицательной дисперсии (например, для волн на мелкой воде) «изгиб» солитона приводит к упругим колебаниям со слабым затуханием. В случае положительной дисперсии солитон неустойчив по отношению к двумерным возмущениям типа его изгиба, и он вряд ли может существовать длительное время.

Если же в уравнении (1) нелинейный член имеет отрицательный знак, то ситуация обратная: солитоны в случае положительной дисперсии устойчивы, а в случае отрицательной — неустойчивы.

#### Список литературы

1. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 240.
2. *Березин Ю.А., Карпман В.И.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 1557.
3. *Карпман В.И.* // ЖЭТФ. 1967. Т. 52. С. 1657.
4. *Карпман В.И., Соколов В.П.* // ЖЭТФ. 1968. Т. 54. С. 1568.

## COLLISIONLESS RELAXATION IN SYSTEMS WITH COULOMB INTERACTIONS \*)

We give an analytical consideration of the relaxation of the distribution function for systems of particles with Coulomb interaction. It takes into account two-particle correlations which correspond to formation of some macroparticles, i.e., coherently moving regions. It is argued that such relaxation leads to the Lynden-Bell distribution with an additional high-energy tail.

Recently Lynden-Bell [1] has argued that relaxation of collisionless systems of charged particles or stellar systems should be some kind of chaotic interchange of elements in phase space. The elements in phase space cannot overlap and therefore follow an exclusion principle. This leads to statistics of the Fermi-Dirac type. For the special case where the initial distribution function  $f$  is equal to unity over certain regions of phase space and is zero outside these regions, the equilibrium distribution function is exactly equal to the Fermi-Dirac function.

To check the Lynden-Bell theory, numerical calculations were carried out [2] with a one-dimensional model. These calculations have shown that for simple initial conditions the quasiequilibrium state which is reached after several plasma periods is close to the Fermi distribution with an additional high-energy tail. For more complicated initial conditions the final distribution deviates from the Fermi distribution.

We shall discuss this problem analytically from the point of view suggested recently by Dupree's [3] and the authors' [4] idea on the formation of macroparticles in a plasma. The relationship between this approach and quasilinear theory will also be discussed.

For simplicity we consider an electron plasma which is homogeneous on the average except for some small initial perturbations. The evolution of these perturbations is described by the Vlasov equation

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \quad (1)$$

with self-consistent electric field  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi e \left( \int F d^3v - n_0 \right), \quad (2)$$

where  $n_0 = \text{const}$  is the density of heavy ions and  $F$  is the distribution function.

It is natural to suppose that after several plasma periods the evolution of electrons may be considered to be stochastic. We introduce the average value  $f_0 = \langle F \rangle$  so that  $F = f_0 + f$ , where  $\langle f \rangle = 0$ . We find by averaging Eq. (1)

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{m} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \equiv \text{St}(f_0), \quad (3)$$

where  $\text{St}(f_0)$  denotes the collision term.

---

\*) *Kadomtsev B.B., Pogutse O.P.* // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 25. № 17. P. 1155-1157.

Assuming that perturbation  $f$  is not very large, we use for  $f$  an equation of the quasilinear type:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (4)$$

In Fourier representation, neglecting slow variation of  $f_0$  with time, we can write (4) in the form

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})f = \frac{e}{m} \varphi \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \quad (5)$$

where  $\varphi$  is the potential. We find from (5)

$$f = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \varphi + f_2, \quad (6)$$

where  $f_2$  is an arbitrary solution of Eq. (5) with zero on the right-hand side. In fact,  $f_2$  corresponds to some initial perturbation of the electron distribution function.

The substitution of (6) into (2) gives us

$$\varepsilon \varphi = -\frac{4\pi e}{k^2} \int f_2 d^3v, \quad (7)$$

where  $\varepsilon$  is the well-known dielectric constant:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \frac{\mathbf{k}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} d^3v = \\ &= 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \left( \frac{P}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} d^3v. \end{aligned} \quad (8)$$

Now we can substitute the value  $\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\varphi$  from (7) in Eq. (3). It is convenient to separate the wave ( $k < \omega_0/v_{\text{th}}$ , where  $v_{\text{th}}$  is some average «thermal» velocity and  $\omega_0 = (4\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$ ) and nonwave ( $k > \omega_0/v_{\text{th}}$ ) regions. In the wave region, neglecting the small term  $f_2$ , we get the usual quasilinear approximation [5, 6]. In the nonwave region the electric-field fluctuations are produced by  $f_2$  only. Replacing approximately the real part of  $\varepsilon$  by unity we obtain the nonwave collision term in a form similar to the Balescu-Lenard type:

$$\begin{aligned} \text{St}_{\text{nw}} &= \pi \left( \frac{e}{m} \right)^2 \int \left( \frac{4\pi e}{k^2} \right)^2 \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\{ \langle f_2' f_2''^* \rangle_{\mathbf{k}\omega} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} - \right. \\ &\quad \left. - \langle f_2'' f_2^* \rangle_{\mathbf{k}\omega} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}'} \right\} d^3v' d^3v'' d^3k d\omega, \end{aligned} \quad (9)$$

where  $f_2' = f_2(\mathbf{v}')$ ,  $f_2'' = f_2(\mathbf{v}'')$  and  $\langle f_2' f_2''^* \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  is the Fourier component of the two-particle correlation function. We define the integral over  $\mathbf{k}$  and  $\omega$  so that

$$\int \langle f_2 f_2^* \rangle_{\mathbf{k}\omega} \exp(-i\omega\tau + i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) d^3k d\omega = \langle f_2(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, t + \tau) f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) \rangle. \quad (10)$$

We see that  $\langle f_2 f_2^* \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  corresponds to a two-time correlation function. Since the function  $f_2$  is a solution of the equation  $(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})f_2 = 0$ , the correlation

function  $\langle f_2 f_2'^* \rangle$  should be proportional to  $\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$ . It is natural to believe that correlations of particles with quite different velocities and positions should quickly decrease so that the correlation function is not zero only when particles are close together, say in the interval  $\Delta v \ll v_{\text{th}}$ ,  $\Delta x \ll v_{\text{th}}/\omega_0$ . This means that we can write

$$\langle f_2 f_2'^* \rangle_{\mathbf{k}\omega} = A\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'), \quad (11)$$

where  $A \approx \text{const}$  at  $k < 1/\Delta x$  and is equal to zero at  $k > 1/\Delta x$ . To find  $A$  we should solve the equation for the two-particle correlation function. But even without such a solution we can estimate the correlation function in the following way.

As we see from (10), the integral from (11) over  $\omega$  is proportional to the one-time correlation function

$$\langle f_2(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, t) f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) \rangle = (2\pi)^3 A \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\boldsymbol{\xi}). \quad (12)$$

Let us consider a special case when in the initial state the function  $F$  was equal to unity over certain regions of the phase space and was zero outside these regions. This condition is conserved in time so that

$$\langle F(\mathbf{v}, \mathbf{r}) F(\mathbf{v}, \mathbf{r}) \rangle = \langle 1 \times F(\mathbf{v}) \rangle = f_0,$$

i. e.

$$\langle f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \langle (F - f_0)(F - f_0) \rangle = f_0 - f_0^2.$$

If the points  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$  and  $\mathbf{r}', \mathbf{v}'$  do not coincide, the correlation function will decrease. We can approximate it by its value  $f_0 - f_0^2$  inside some regions  $(\Delta r)^3$ ,  $(\Delta v)^3$  and zero outside so that

$$(2\pi)^3 A = (\Delta r)^3 (\Delta v)^3 f_0(1 - f_0) \equiv q^2 f_0(1 - f_0), \quad (13)$$

where we have used the notation  $q^2$  for the region of correlation. The quantity  $qe$  plays the role of the effective charge of the macroparticles, i. e. correlated regions.

Substituting (11) and (13) into (9) we obtain the collision term for the nonwave thermal region:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = \text{St}_{\text{nw}} = & \frac{2e^4 q^2}{m^2} \int \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')}{k^4} \times \\ & \times \left\{ \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} f_0'(1 - f_0') - \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0'}{\partial \mathbf{v}'} f_0(1 - f_0) \right\} d^3 v' d^3 k, \end{aligned} \quad (14)$$

where  $f_0' = f_0(\mathbf{v}')$ . The integration over  $k$  should be carried out from  $k \approx \omega_0/v_{\text{th}}$ , to  $k \approx 1/\Delta x$  and gives, as usual,  $\ln(\omega_0 \Delta x/v_{\text{th}})$ .

We see that (14) has as the stationary solution a Fermi distribution

$$f_0 = \frac{1}{1 + \exp(mv^2/2T + \mu/T)}, \quad (15)$$

as was predicted by Lynden-Bell.

But for this final state to be reached the quantity  $q^2$  should not be very small. In fact  $q^2$  is a function of time,  $q^2 = q^2(t)$ , which decreases with time. For example, in the case of beam-plasma interaction considered in Ref. 4,

the quantity  $q^2$  decreases like  $t^{-1/2}$ . In the three-dimensional case it should decrease even more rapidly. As we see from (14), the possibility of reaching the final state is determined by  $\int q^2 dt$ . If the initial deviation from the final state is large enough, which corresponds to the «simple cases» of Ref. 2, then the final state will be reached. For small perturbations it probably cannot be reached. These arguments are in qualitative agreement with the data on the numerical calculations [2].

Now we can discuss the wave region. The arguments of Lynden-Bell are not applicable to this region because, in addition to the particles, the collective modes (Langmuir waves) are present. These waves lead, as is well known, to the formation of a high-energy tail. The particles of this tail interact with the thermal part rather weakly so that they represent their own subsystem.

We have considered here the three-dimensional case. Unfortunately, this consideration cannot be applied to the one-dimensional case since the collision term of Balescu-Lenard type goes to zero and the triple interactions have to be taken into account. Therefore we can have only qualitative correspondence between our consideration and the numerical results of the paper [2].

Our arguments can equally well be applied to stellar systems with some modification of «particle» trajectories. They show that the approach to equilibrium in such systems should be much faster than predicted by binary interactions.

The authors are grateful to Professor Abdus Salam, the International Atomic Energy Agency, and UNESCO for hospitality at the International Centre for Theoretical Physics.

### References

1. *Lynden-Bell D.* // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1967. V. 136. P. 101.
2. *Hohl F.* // Bull. Amer. Phys. Soc. 1968. V. 13. P. 1745.
3. *Dupree T.H.* // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 25. P. 789.
4. *Kadomtsev B.B., Pogutse O.P.* // International Centre for Theoretical Physics Report № IC/70/45 (to be published).
5. *Vedenov A.A., Velickov E.P., Sagdeev R.S.* // Nucl. Fusion. 1961. V. 1. P. 82; Nucl. Fusion: Suppl. 1962. Pt. 2. P. 465.
6. *Drummond W.E., Pines D.* // Nucl. Fusion: Suppl. 1962. Pt. 3. P. 1049.

## МОЛЕКУЛЫ В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ \*)

В очень сильном магнитном поле, значительно превышающем  $10^9$  Э (такие поля могут быть в нейтронных звездах), атомы с атомным номером  $Z$  принимают форму, сильно вытянутую вдоль магнитного поля  $B$  [1-3]. Такие атомы обладают большим электрическим квадрупольным моментом и должны связываться в устойчивые молекулы. При этом оказывается возможным образование молекул совершенно необычного вида, когда электронное облако полностью обобществляется, и все электроны образуют отрицательно заряженную «иглу», вдоль оси которой располагаются ядра. Мы приближенно определим энергию связи таких молекул, не рассматривая взаимодействия атомов на далеких расстояниях.

Рассмотрим сначала двухатомную молекулу с ядрами, расположенными на одной магнитной силовой линии на расстоянии  $R$  друг от друга и имеющими заряд  $Z$  каждое. В пренебрежении обменной поправкой энергия может быть приближенно записана в виде (ср. с формулой (2) работы [3]):

$$E = N \int \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{Z}{r} + \frac{Z}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \right) \tilde{\psi}^2 + \frac{N-1}{2} \left\langle \frac{1}{r_{12}} \right\rangle \tilde{\psi}^2 \right\} d\mathbf{r} + \frac{Z^2}{R}. \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{\psi}$  — средняя волновая функция, так что величина  $N\tilde{\psi}^2$  равна средней плотности электронов,  $N$  — число электронов,  $\left\langle \frac{1}{r_{12}} \right\rangle = \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \tilde{\psi}^2(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2$ ; всюду используются атомные единицы.

Энергия основного состояния определяется минимумом функционала (1) при дополнительном условии  $\int \tilde{\psi}^2 d\mathbf{r} = 1$ . При  $B \gg Z^3$  (магнитное поле измеряется в единицах  $m^2 e^3 c \hbar^{-3} = 2,35 \cdot 10^9$  Э) заполняются самые нижние уровни по продольному движению [1-3], и электронное облако принимает иглообразную форму с малым радиусом  $\rho_N = \sqrt{2N/B}$ . В этих условиях для определения минимума энергии (1) можно воспользоваться приближением тонкого линейного заряженного тела с погонной плотностью заряда  $\lambda(z) = \int \tilde{\psi}^2 \cdot 2\pi\rho dr$ . Выбираем для  $\lambda$  пробную функцию вида  $\lambda = \beta = \text{const}$  между ядрами, т. е. при  $0 < z < R$  и экспоненту снаружи от ядер:  $\lambda = \beta \exp(-2a|z|)$  при  $z < 0$ ,  $\lambda = \beta \exp[-2a(z-R)]$  при  $z > R$ . Из условия нормировки  $\tilde{\psi}$  следует, что  $\beta = (a^{-1} + R)^{-1}$ . С логарифмической точностью

\*) Кадомцев Б.Б., Кудрявцев В.С. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. Вып. 1. С. 15-19.

интегралы в (1) без труда вычисляются, и в приближении  $R \ll a^{-1}$ , когда ядра расположены вблизи центра электронного облака, приближенное выражение для  $E$  имеет вид

$$E \approx N \left\{ \frac{\beta^2}{2} - 4ZL\beta + \frac{N-1}{2} L(\beta + R\beta^2) \right\} + \frac{Z^2}{R}, \quad (2)$$

где  $L = \ln(1/\beta\rho_N) \gg 1$  при  $B \gg Z^3$ . Из условия минимума  $E$  по  $R$ , т. е. из  $\partial E/\partial R = 0$ , находим  $R^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{2Z^2}{N(N-1)} \frac{1}{L}$ . Для нейтральной двухатом-

ной молекулы  $N = 2Z$  и  $R\beta = (1/\sqrt{2L}) \ll 1$ , т. е. при  $L \gg 1$  расстояние между ядрами действительно оказывается малым по сравнению с характерной длиной электронного облака  $\beta^{-1} \approx a^{-1}$ , но велико по сравнению с его радиусом  $\rho_N$ . Из (2) видно, что при  $R\beta \ll 1$  член с  $R$  в фигурных скобках мал, следовательно минимум  $E$  по  $\beta$  определяется так же как и для изолированного атома с зарядом ядра  $2Z$  [3], так что получаем

$$\beta = \frac{1}{2} (8Z - N + 1), \quad E = -\frac{N}{8} (8Z - N + 1)^2 + \sqrt{\frac{N(N-1)}{2}} (8Z - N + 1) L_2^{3/2}, \quad (3)$$

$L_n = \ln[1/(\beta\rho_{nZ})] \approx (1/2) \ln[B/(nZ)^3]$  ( $n$  — целое число). Второе слагаемое в выражении (3) для  $E$  соответствует учету кулоновского отталкивания ядер. Для нейтральной молекулы ( $n = 2Z$ ) выражение (3) приближенно равно

$$E = -9Z^3 L_2^2 + 6\sqrt{2} Z^3 L_2^{3/2}. \quad (4)$$

Напомним, что энергия изолированного атома в сверхсильном магнитном поле  $B \gg Z^3$  равна  $E_a = -\frac{9}{8} Z^3 L_1^2$  [3]. Таким образом, из (4) следует, что энергия связи двухатомной молекулы в поле  $B \gg Z^3$  имеет колоссальное значение — она вшестеро превышает величину  $E_a$ .

Для трехатомной молекулы с ядрами, расположенными вдоль одной силовой линии с интервалом  $R$  друг от друга, можно опять воспользоваться прежней аппроксимацией:  $\lambda = \beta = \text{const}$  между ядрами, а снаружи от них — экспонентой. При  $R \ll \beta$  и  $N = 3Z \gg 1$  выражение для энергии  $E$  принимает вид

$$E = 3Z \left( \frac{\beta^2}{2} - 6ZL\beta + \frac{3Z}{2} L(\beta + 2R\beta^2) \right) + \frac{5Z^2}{2R}. \quad (5)$$

Повторяя выкладки, приведшие к (3), (4), находим

$$E = -\frac{9}{8} L^2 (3Z)^3 + \sqrt{\frac{5}{2}} L^{3/2} (3Z)^3. \quad (6)$$

Для трехатомной молекулы энергия связи, т. е. разность между энергией системы, состоящей из двухатомной молекулы и изолированного атома и энергий (6), положительна только при значении логарифма  $L > 6$ , т. е. при очень больших  $B$ . Это значит, что однородные атомы в сверхсильном магнитном поле должны образовывать двухатомные молекулы с большой энергией связи. Разумеется, при этом не исключена возможность слипания



таких молекул друг с другом в более сложные комплексы, но с меньшей энергией связи.

Рассмотрим теперь молекулу, образованную одним тяжелым атомом  $Z$  и двумя легкими атомами  $Z'$ , расположенными на одной и той же силовой линии по обе стороны от него на одинаковых расстояниях  $R$ . Для электронной погонной плотности естественно воспользоваться аппроксимацией  $\lambda = a \exp(-2a|z|)$ . Тогда при  $aR \ll 1$  получаем для  $E$

$$E = N \left\{ \frac{a^2}{2} - 2ZLa - 4Z'La(1 - 2aR) + \frac{N-1}{2} La \right\} + \frac{2ZZ'}{R}. \quad (7)$$

Аналогично прежнему находим минимальные значения для  $E$  при  $Z' \ll Z$  и  $N = Z + 2Z'$ :

$$E = E_a - \frac{27}{4} Z^2 Z' (L^2 - 16L^{3/2}) = E_a - \frac{27}{4} Z^2 L^2 Z'. \quad (8)$$

Из (8) видно, что при  $L > 1$  энергия связи положительна, она значительно больше энергии прилипания к атому  $2Z'$  электронов, равной  $2Z'E_I = (3/4)L^2 Z^2 Z'$ , где  $E_I$  — энергия ионизации [3]. Таким образом, при наличии наряду с тяжелыми атомами легких (скажем с  $Z' < 10$ ) энергетически выгодно образование разнородных молекул. Нетрудно убедиться, что легкие ядра при этом располагаются в точках минимума потенциала  $\phi(z)$  вдоль оси тяжелого атома. При дальнейшем добавлении новых легких атомов их ядра будут опять располагаться вблизи этих же точек, поскольку электростатическое расталкивание добавленных ядер меньше взаимодействия с основным полем. При этом под  $Z'$  можно понимать полусумму зарядов легких ядер в молекуле вида  $TJ_n$ , где  $T$  — тяжелый,  $J$  — легкий атом, а  $n$  — целое число. При приближении  $Z'$  к  $Z$  такая молекула, по-видимому, должна перестраиваться.

Эффект включения легких атомов в молекулу должен иметь место и для рассмотренной выше молекулы вида  $T_2$ . Для энергии связи такой молекулы вида  $T_2 J_n$  качественно можно пользоваться формулой (8), если вместо  $E_a$  подставить выражение для энергии молекулы (3) и заменить  $Z$  на  $2Z$ . Энергия такой молекулы минимальна.

Итак, мы показали, что в сверхсильном магнитном поле  $B \gg Z^3$  энергетически выгодно образование молекул. В чистом веществе должны образовываться двухатомные молекулы, а в смеси тяжелого и легкого вещества должны образовываться молекулы типа  $T_2 J_n$ , где  $n \sim Z_T/Z_L$ . Такие молекулы имеют очень большую энергию связи — гораздо большую, чем энергия ионизации. Поэтому при нагревании вещества должна образовываться плазма с молекулярными ионами.

### Список литературы

1. Кадомцев Б.Б. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 1766.
2. Cohen R., Lodenquai J., Ruderman M. // Phys. Rev. Lett. 1970. Т. 25. С. 467.
3. Кадомцев Б.Б., Кудрявцев В.С. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. Вып. 1. С. 298.

## АТОМЫ В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ \*)

Огромные магнитные поля порядка  $10^{12}$  Гс, которые по современным представлениям имеются в нейтронных звездах, могут существенно изменить физические свойства вещества, в частности, изолированных атомов [1, 2]. В работе одного из авторов [1] было показано, что в интервале магнитных полей  $Z^{4/3} < B < Z^3$  ( $Z$  — атомный номер,  $B$  — магнитное поле в атомных единицах  $m^2 e^3 c \hbar^{-3} = 2,35 \cdot 10^9$  Гс) основное состояние очень тяжелого атома может быть описано в рамках модифицированной модели Томаса–Ферми. При этом атом сохраняет сферическую симметрию, а его радиус изменяется как  $Z^{1/5} B^{-2/5}$ . В этой же статье были приведены качественные соображения о возможном сохранении сферической симметрии и при  $B > Z^3$ , когда на каждом уровне остается не более одного электрона. Однако это последнее утверждение оказывается неправильным — приводимое ниже более точное количественное рассмотрение для предельного случая  $B \gg Z^3$  показывает, что при этом основному состоянию с минимальной энергией соответствует не сферическое, как при  $B < Z^3$ , а сильно вытянутое вдоль магнитного поля распределение электронной плотности. В этом смысле случай  $B \gg Z^3$  соответствует атому водорода при  $B \gg 1$  [3–6].

При  $B \gg Z^3$  в основном состоянии происходит заполнение нижних по азимутальному квантовому числу  $m$  уровней с числом электронов не более одного на каждом уровне [1]. В приближении самосогласованного поля энергия атома или иона в сверхсильном поле определяется выражением (в атомных единицах):

$$E = \int \left[ \frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right)^2 - \sum_j \frac{Z}{r_j} \Psi^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{r_{ij}} \Psi^2 \right] \prod_j d\mathbf{r}_j, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}_j$  — координата  $j$ -го электрона,  $r_j$  — его расстояние от ядра,  $\mathbf{r}_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ , а волновая функция  $\Psi$  берется в виде антисимметризованного произведения одночастичных волновых функций вида  $e^{im\theta} R_m(\rho) \psi_{0m}(z)$ , причем радиальная часть  $R_m$  соответствует нижнему уровню Ландау ( $\rho, \theta, z$  — цилиндрические координаты), а  $\psi_{0m}$  — нижнему уровню продольного движения для данного  $m$ . В выражении (1), как мы видим, остается только кинетическая энергия продольного движения и потенциальная энергия. Пренебрежем обменной поправкой и заменим  $\Psi$  просто на произведение одночастичных волновых функций в самосогласованном электрическом поле. При этом выражение (1) перейдет в сумму интегралов по одночастичным волновым функциям, и  $E$  может быть выражена через

\*) Кадомцев Б.Б., Кудрявцев В.С. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. Вып. 1. С. 61–64.

среднюю плотность электронов  $n = \sum_j \Psi_j^2$ . Определим среднюю волновую функцию  $\tilde{\psi}$  соотношением  $\tilde{\psi}^2 = n/N$ ; из (1) получим

$$E = N \int \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \right)^2 - \frac{Z}{r} \tilde{\psi}^2 + \frac{N-1}{2} \left\langle \frac{1}{r_{12}} \right\rangle \tilde{\psi}^2 \right] d\mathbf{r}, \quad (2)$$

где

$$\left\langle \frac{1}{r_{12}} \right\rangle = \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \tilde{\psi}^2(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2.$$

Энергия основного состояния определяется из условия минимума функционала (2) при дополнительном условии  $\int \tilde{\psi}^2 d\mathbf{r} = 1$ , причем числа заполнения не превосходят единицы. Радиальная волновая функция  $R_m(\rho)$  сравнительно узко локализована при  $\rho_m = \sqrt{2m/B}$ , и при заполнении всех оболочек от  $m = 0$  до  $m = N$  электронная плотность ограничена цилиндром радиуса  $\rho_N \approx \sqrt{2N/B}$ , т. е.  $n(\rho, z)$  быстро спадает при  $\rho > \rho_N$ . Выберем пробную функцию в виде \*)

$$n = \tilde{\psi}^2 = \frac{a}{\pi \rho_N^2} \exp\left(-2a|z| - \frac{\rho^2}{\rho_N^2}\right), \quad (3)$$

где  $a$  — параметр, определяемый из условия минимума  $E$ .

При очень больших  $B$  величина  $a\rho_N \ll 1$ , т. е. электронное облако сильно вытянуто вдоль магнитного поля. Учитывая это, получаем после подстановки (3) в (2) с логарифмической точностью

$$E = \frac{Na^2}{2} - 2NZLa + \frac{1}{2} N(N-1)La, \quad \text{где } L = \ln \frac{1}{a\rho_N} \gg 1. \quad (4)$$

Выражение (4) может быть получено совсем просто из следующих соображений. Второе слагаемое в (4) соответствует усреднению величины  $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{z}$  с погонной плотностью  $\lambda = a \exp(-2a|z|)$  и обрезанием логарифмической расходимости при малых  $z$  на значении  $z_{\min} \sim \rho_N$ . В третьем слагаемом в (2), (4) величину  $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$  можно рассматривать как потенциал  $\phi$  в точке  $z$  тонкого линейного заряженного тела радиуса  $\rho_N$  с погонной плотностью  $\lambda$ . Но с логарифмической точностью потенциал  $\phi$  определяется локальным значением погонной плотности заряда  $\lambda$  и равен  $\phi = 2\lambda \ln \frac{1}{a\rho_N}$ , где  $\frac{1}{a}$  — характерная длина распределения заряда. Усреднение этого потенциала с весом  $\lambda$  и дает третье слагаемое в (4). Из условия минимума (4) по  $a$ , приближенно считая  $L = \text{const}$ , находим с логарифмической точностью

$$a = \frac{1}{2} (4Z - N + 1)L, \quad E = -\frac{N}{8} L^2 (4Z - N + 1)^2. \quad (5)$$

\*) Экспоненциальная зависимость  $\psi$  от  $z$  соответствует «глубоности» основного уровня.

По известному  $a$  находим с логарифмической точностью  $L$  при  $N = Z$

$$L \approx \frac{1}{2} \ln \frac{B}{Z^3}. \quad (6)$$

Оценка энергии связи по сферической модели [1] дала бы величину  $E \sim Z^3$ , что в  $L^2$  раз меньше, чем (5). Таким образом, при  $B \gg Z^3$  более низкой энергией обладает вытянутое вдоль магнитного поля электронное облако. Заметим, что при  $Z = N = 1$  выражение (5) с логарифмической точностью совпадает с энергией основного состояния атома водорода [6]:  $E = -\frac{1}{2} (\ln B)^2$ , так что формула (5) пригодна и для небольших  $z$ .

Из (5) находим энергию ионизации нейтрального атома  $E_I = -\frac{\partial E}{\partial N} \Big|_{N=Z}$ :

$$E_I = \frac{3}{8} L^2 Z^2. \quad (7)$$

Как видно из (7), в предельном случае  $B \gg Z^3$  энергия ионизации очень быстро возрастает с  $Z$ , в отличие от результатов работы [2], где энергия ионизации при  $B = 2 \cdot 10^{12}$  Гс примерно постоянна в интервале  $1 < Z < 10$ . Объясняется это тем, что параметры в работе [2], относятся к промежуточной области  $B \sim Z^3$ , и асимптотическая формула (7), возможно, еще не применима. Заметим, что поправка на обменное взаимодействие оказывается небольшой по сравнению с (7) при больших  $Z$  [2].

Из формулы (5) следует, что при  $N > Z$  энергия  $E$  убывает с  $N$ . Поэтому энергетически выгодно образование отрицательных ионов вплоть до  $N \approx \frac{4}{3} Z$ , где  $\frac{\partial E}{\partial N} = 0$ . Еще выгоднее при не слишком высоких температурах образование молекул с большой энергией связи. Кроме того, поскольку сильно вытянутые при  $B \gg Z^3$  атомы обладают большим квадрупольным моментом, и их энергия взаимодействия должна быть очень велика, то по-видимому, даже при температурах порядка  $10^6$  градусов тяжелое вещество в сверхсильном поле даже на поверхности пульсара может конденсироваться в твердую фазу. Это будет рассмотрено отдельно.

### Список литературы

1. Кадомцев Б.Б. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 1765.
2. Cohen R., Lodenquai J., Ruderman M. // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 25. P. 467.
3. Elliott R.J., Loudon R. // J. Phys. Chem. Sol. 1960. V. 15. P. 196.
4. Hasegawa H., Howard R.E. // J. Phys. Chem. Sol. 1961. V. 21. P. 179.
5. Монозон Б.С., Жилуч А.Г. // ФТТ. 1966. Т. 8. С. 3559; ФТТ. 1967. Т. 1. С. 673.
6. Haines L.K., Roberts D.H. // Amer. J. Phys. 1969. Т. 37. С. 1145.

# THEORY OF BEAM-PLASMA INTERACTION\*)

A new approach to the theoretical treatment of the cooperative phenomena at beam-plasma interaction is proposed. It takes into account the bunching effect related to trapping of the beam electrons in waves.

## I. Introduction

It is well known that the interaction of a beam with a plasma is determined by cooperative phenomena related to beam-plasma instabilities. At an early stage in these investigations this interaction was considered qualitatively in terms of bunching of beam electrons, but later this argument was replaced by a more formal quantitative theory, the so-called quasilinear approximation [1, 2]. In quasilinear theory the beam-plasma interaction is described as some sort of diffusion in velocity space which leads to plateau formation on the beam distribution function. This fact and many other features of beam-plasma interaction predicted by quasilinear theory are in qualitative agreement with many experiments dealing with very tiny beams. But when the density of the beam increases, a discrepancy occurs in favor of high-energy tail generation.

Under experimental conditions, however, it is always hard to distinguish the main process from some additional complications. In particular, the high-energy tail generation may be produced by small plasma inhomogeneities [3].

In this context the results of many numerical calculations are the more striking. As a rule, they show, the formation of a two-Maxwellian distribution under the same conditions as when the quasilinear theory predicts a plateau [4, 5]. We shall show that this discrepancy can be overcome if we take into account the beam space charge fluctuations which are analogous to the bunching effect.

## II. General Equations

We consider the simplest case of the electron beam interaction with Langmuir waves. The ions are supposed to be at rest and the wave spectrum to be one-dimensional. Let  $F = F(x, v, t)$  be the distribution function of the beam and plasma electrons. In the initial state it consists of the Maxwellian part of thermal electrons with density  $n_0$  and the beam part  $F_b = n'\delta(v - u)$ , where  $n' \ll n_0$  is the density of the beam and  $u$  is the velocity of the beam. Due to instability,  $F$  begins to change with time, and its temporal behavior is determined by the Vlasov equation

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{e}{m} E \frac{\partial F}{\partial v}, \quad (1)$$

---

\*) *Kadomtsev B.B., Pogutse O.P.* // The Physics of Fluids. 1971. V. 14. №. 11. P. 2470–2475.

where the electric field  $E$  is given by the equation

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi e \left( \int F dv - n_0 \right). \quad (2)$$

Here,  $n_0$  is the density of ions, which is approximately equal to the thermal electron density.

The function  $F$  may be represented in the form

$$F = f_0 + f, \quad (3)$$

where  $f_0 = \langle F \rangle$  is the average over  $x$  of  $F$ , and  $f$  corresponds to fluctuations.

Supposing that  $\langle E \rangle = 0$ , by averaging we find from (1)

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial v} \langle E f \rangle, \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial v} (E f_0 + E f - \langle E f \rangle), \quad (5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi e \int f dv. \quad (6)$$

In quasilinear approximation the last two terms on the right-hand side of Eq. (5) are neglected and (5) becomes linear. But this procedure is definitely not correct at the final stage, when the quasilinear theory predicts a plateau  $\partial f_0 / \partial v = 0$ .

To take into account the nonlinear terms in Eq. (5) we should clearly imagine the general features of the  $F = f_0 + f$  function. This function is equal to zero everywhere excluding some line in phase space  $v = v(x, t)$  which corresponds to the position of beam electrons in phase space  $x, v$ . On this line  $F$  is of the order of  $n' / \Delta v$ , where  $n'$  is the density of beam electrons and  $\Delta v$  is its spread over velocities. The function  $f_0$  corresponds only to the average value of  $F$ . If we take into account the quasilinear part of  $f$  which will be designated by  $f_1$ , then, in addition to the averaged over  $x$  part of  $F$ , we shall take into account some oscillating part of the distribution function. It is in phase with the electrical field  $E$  as predicted by the linearized equation (5). But again,  $f_1$  is a smooth function which does not include sharp fluctuations in phase space corresponding to the step character of the  $F$  function. This means that we can represent  $f$  in the form

$$f = f_1 + f_2, \quad (7)$$

where  $f_1$  corresponds to a quasilinear approximation and  $f_2$  takes into account the fluctuations which are related to the beam character of  $F$ , i.e., to  $\delta$ -function dependence of  $F$  from the  $(x, v)$  position in the phase space. The function  $f_2$  corresponds to the very complicated chaotic motion of beam electrons in phase space including trapping of particles by the electric field wells and in the first approximation may be considered as very weakly correlated with electric fields  $E$ . This approximation suggests the following procedure. Let us substitute the solution of the linear equation for  $f_1$ :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad (8)$$

in Eq. (6) for electric fields, considering  $f_0$  as weakly depending on time. Then, Eq. (6) will take the form

$$\frac{\partial}{\partial x} \widehat{\varepsilon} E = -4\pi e \int f_2 dv, \quad (9)$$

where  $\hat{\varepsilon}$  is the usual dielectric operator. In this equation the right-hand side may be considered as some external random source which explicitly does not correlate with the fields  $E$ . This source leads to additional generation of plasma waves.

To simplify the following equations we shall use Fourier transformation. Namely, we define for each function  $\psi(x, t)$  the Fourier series

$$\psi(x, t) = \sum_{\omega k} \exp(-i\omega t + ikx) \psi_{k\omega}, \quad \psi_{k\omega} = \psi_{-k, -\omega}^* \quad (10)$$

in such a way that the averaged over  $x$  and  $t$  production

$$\langle \psi(x, t) \psi(x + \xi, t + \tau) \rangle_{x, t} = \sum_{k\omega} \exp(-i\omega\tau + ik\xi) |\psi_{k\omega}|^2 \quad (11)$$

would be equal to

$$\int \exp(-i\omega\tau + ik\xi) |\psi_{k\omega}|^2 dk d\omega.$$

In Fourier representation, Eq. (9) is equal to

$$\varepsilon E_{k\omega} = + \frac{4\pi e i}{k} \int f_{2k\omega} dv, \quad (12)$$

where  $\varepsilon$  is the dielectric constant

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk} \int \frac{(\partial f_0 / \partial v) dv}{\omega - kv} = \varepsilon' + i\varepsilon'' \approx 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} i\pi \int \frac{4\pi e^2}{mk} \delta(\omega - kv) \frac{\partial f_0}{\partial v} dv. \quad (13)$$

Here,  $\varepsilon''$  is the small imaginary part of  $\varepsilon$ , which is positive in the case of damping.

Now we multiply Eq. (12) by  $E_{k\omega}^*$  and in the first approximation get  $|E_{k\omega}|^2 = E_k^2 \delta(\omega - \omega_0)$ , where for simplicity we have designated  $|E_k|^2$  as  $E_k^2$ . In the next approximation we take into account the small imaginary part in the frequency  $\gamma = \text{Im } \omega$ , small  $\varepsilon''$  and the term on the right-hand side in Eq. (12):

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial(\omega\varepsilon')}{\partial\omega} \frac{\partial E_k^2}{\partial t} = -\frac{\omega\varepsilon''}{4\pi} E_k^2 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \frac{1}{2} (\pi\omega_0^2) \int \langle f_{2k\omega_0}(v) f_{2k\omega_0}^*(v') \rangle dv dv'. \quad (14)$$

In the last term we substituted  $E_{k\omega}^*$  from (12) and took into account only the resonant term  $1/\varepsilon^* = \pi\delta(\varepsilon')$ , choosing the positive imaginary part in  $\varepsilon$ . Equation (14) contains the correlation function  $\langle f_{2k\omega}(v) f_{2k\omega}^*(v') \rangle$  which corresponds to the two-time correlation function

$$\langle f_2(x + \xi, v, t + \tau) f_2(x, v', t) \rangle_{x, t} = \int \exp(-i\omega\tau + ik\xi) \langle f_{2k\omega}(v) f_{2k\omega}^*(v') \rangle dk d\omega. \quad (15)$$

It is clear, that correlation takes place only when the velocities  $v$  and  $v'$  are very close to each other, so that in integrals over  $v'$  we could consider  $\langle f_2(v) f_1(v') \rangle$  as proportional to  $\delta(v - v')$ . Let us introduce the one-time correlation function

$$G(\xi, v, v', t) = \langle f_2(x + \xi, v, t) f_2(x, v', t) \rangle.$$

The two-time correlation function can be considered as a result of time evolution from the one-time correlation function as an initial state. If the diffusion in velocity space is a weak process, as it usually is, then the bunching electrons described by the correlation function will propagate, as free particles, many wavelengths and their propagation may be taken into account in (15) simply by substituting  $\xi + v\tau$  for  $\xi$  into the one-time correlation function. This means that (15) should be a function of  $(\xi + vr)$  only, i.e., the correlation function  $\langle f_{2k\omega}(v)f_{2k\omega}^*(v') \rangle$  should be proportional to  $\delta(\omega - kv)$ . Supposing, in addition, that this correlation function is proportional to  $f_0$ ; we introduce the following notation:

$$\langle f_{2k\omega}(v)f_{2k\omega}^*(v') \rangle = Qf_0\delta(v - v')\delta(\omega - kv). \quad (16)$$

Thus, Eq. (14) may be written in the form

$$\frac{\partial E_k^2}{\partial t} = \int \left( \frac{\pi\omega_0^2}{n_0k} E_k^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{8\pi^3 e^2 \omega_0^2}{k^2} Qf_0 \right) \delta(\omega_0 - kv) dv. \quad (17)$$

Now we substitute  $f = f_1 + f_2$  in Eq. (4) and express  $f_1$  in terms of  $E$  and substitute  $E_{k\omega}$  from (12) in the term  $\langle E f_2 \rangle$ . After short calculations we get the following equation for  $f_0$ :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \int \left( \frac{\pi e^2}{m^2} E_k^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{2\pi^2 \omega_0 e^2}{mk} Qf_0 \right) \delta(\omega_0 - kv) dk. \quad (18)$$

It is easy to verify, that Eqs. (17) and (18) are consistent with energy

$$\varepsilon = \int \frac{1}{2}(mv^2)f_0 dv + \int \frac{E_k^2}{4\pi} dk$$

and momentum

$$P = \int mvf_0 dv + \int \frac{k}{\omega_0} \frac{E_k^2}{4\pi} dk$$

conservation laws,  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $P = \text{const}$ .

We see that the term additional to the usual quasilinear approximation terms in Eqs. (17) and (18) leads to wave generation and slowing down of electrons. Now, we must find the two-particle correlation function and the function  $Q(t)$ , slowly depending on time.

### III. Two-Particle Correlation Function

Let us consider Eq. (5) for a random function  $f$ . On the right-hand side of this equation it is enough to keep only the second term because the function  $f$  is very great at the beam position in phase space and these regions give the main input in the two-particle correlation function. Multiplying Eq. (5) by  $f' \equiv f(x', v', t)$  and adding the analogous equation for  $f'$  multiplied by  $f$ , after averaging, we get

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f f' \rangle + (v - v') \frac{\partial}{\partial x} \langle f f' \rangle = \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial v} \langle E f f' \rangle + \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial v'} \langle E' f f' \rangle, \quad (19)$$

where  $E' = E(x', t)$ . We have taken into account that, due to the homogeneity in  $x$  space, the averaged  $\langle f f' \rangle$  is a function of  $x - x'$  only. Now let us consider



the case  $v = v'$ ,  $x = x'$ , where Eq. (19) gives

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f^2 \rangle = \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial v} \langle E f^2 \rangle. \quad (20)$$

As follows from the Liouville theorem, function  $f$  is equal to its initial value  $n'/\Delta v$  at the position of the beam in phase space and is equal to zero outside it. Hence,  $\langle f^2 \rangle = (n'/\Delta v)\langle f \rangle = (n'/\Delta v)f_0$  and the same result follows from (20) when after this substitution it is considered together with (4). Thus, we can put  $\langle f f' \rangle = f_0(v)g(x - x', v, v', t)$ , where  $g = \text{const} = n'/\Delta v$  at  $x = x'$ ,  $v = v'$ . Since  $g$  is a very sharp function of  $v - v'$ , we can consider it as a function  $v - v'$  only. Using notations  $\nu = v - v'$ ,  $\xi = x - x'$ , we write Eq. (19) in the form

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \nu \frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{e}{f_0 m} \langle (E - E') f f' \rangle. \quad (21)$$

Now, we use a very rough and therefore not correct approximation which can, however, reveal some important features of the temporal behavior of the correlation function  $g$ . Namely, let us introduce the frame of reference moving with the velocity  $v$ . In this frame of reference the function  $f f'$  has its main component slowly varying with time, so that we can put  $f f' = f_0(g + \tilde{g})$ , where  $\tilde{g}$  is some small oscillating part. At small  $\xi$  we therefore have a couple of equations for  $g$  and  $\tilde{g}$ :

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \nu \frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{e}{m} \xi \frac{\partial}{\partial \nu} \left\langle \frac{\partial E}{\partial x} \tilde{g} \right\rangle, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} + \nu \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi} = \frac{e}{m} \xi \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial \nu}. \quad (23)$$

The last equation was obtained with the help of Eq. (5). Equations (22) and (23) are of the quasilinear type, so that we can find the solution (23) for  $\tilde{g}$  and substitute it in (22) using Fourier representation. Taking into account that Eqs. (22) and (23) are in the moving system, and neglecting the small second term on the left-hand side of Eq. (23), we obtain

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \nu \frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \int \frac{k^2 e^2}{m^2} E_k^2 \pi \delta(\omega_0 - kv) dk \right) \xi^2 \frac{\partial g}{\partial \nu}. \quad (24)$$

Thus for  $g$  we obtain the equation of the quasilinear type but with the additional factor  $\xi^2 k^2 = \xi^2 \omega_0^2 / v^2$  in the diffusion coefficient. Therefore, the diffusion over  $\nu$  will be slow until some time  $t$ , and after this very sharp. We can estimate  $t$  by the relations following from (24):  $t^{-1} \sim \nu / \xi \sim t_0^{-1} (\xi^2 \omega_0^2 / \nu^2)$ , where  $t_0 \sim (n_0 / n') \omega_0^{-1}$  is the characteristic time of the quasilinear evolution of the beam. We see that  $t \sim (t_0 / \omega_0^2)^{1/3} \ll t_0$ . This means that Eq. (24) describes very strong randomization of the correlation function  $g$ . This randomization is much faster than that which follows from simple physical considerations.

Indeed  $F(x, v, t)$  is a step function which has the value  $n'/\Delta v$  on the random curved band corresponding to the position of the beam particles and is equal to zero outside it. Due to conservation of the phase volume, the width of this band  $\Delta v_t$  is proportional to  $1/L$ , where  $L$  is the length of the band. If the length  $L$  increases with time proportional to  $t$ , the width decreases like  $1/t$ . The correlation along the line takes place on the distance proportional to

$(\Delta v_t/\kappa_t)^{1/2}$  where  $\kappa_t$  is the curvature of the line. So that the phase volume for correlations decreases on average not faster than  $\Delta v_t(\Delta v_t\kappa)^{1/2} \sim t^{-3/2}$  at  $\kappa = \text{const}$  or  $\sim t^{-2}$  if the curvature increases like  $t$ . In fact, in some regions corresponding to the electron trapping, it decreases even slower.

This consideration shows that Eq. (24) gives the wrong result. It can, however, point to the proper way. As seen from Eqs. (22) and (23), we have made an essential assumption that  $g$  does not correlate with  $E$  or, in other words, that correlation function  $\langle EE'ff' \rangle$  may be replaced by  $\langle EE' \rangle \langle ff' \rangle$ . But the result we obtained from (24) on the fast decay of  $g$  shows that this assumption is too rough. In fact, in the correlation function  $\langle EE'ff' \rangle$  we should retain the input only from such regions where correlations decay slowly and we can neglect all other regions. As we shall see, this corresponds to retaining the trapped particles only.

Let us return to Eq. (5) with the second term on the right side only. To calculate  $\langle ff' \rangle$  we can act in the following way. Let  $x_0, v_0$  be coordinates of some beam particle which moves in accordance with Newton's equations:

$$\frac{dx_0}{dt} = v_0, \quad \frac{dv_0}{dt} = -\frac{e}{m} E(x_0, t). \quad (25)$$

The function  $f$  at this point is equal to  $n'/\Delta v$ . Now, we consider the function  $f$  at some point  $x, v$  close to  $x_0, v_0$  and introduce new variables  $\xi = x - x_0, \nu = v - v_0$ . Then Eq. (5) in new variables will have the form

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nu \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{e}{m} [E(x, t) - E(x - \xi, t)] \frac{\partial f}{\partial \nu}. \quad (26)$$

As the  $\langle ff' \rangle$  does not depend on  $x_0$  we can obtain  $\langle ff' \rangle$  simply by averaging the solution (26) over  $x, \xi$  and multiplying the average value  $\langle f \rangle$  by the constant number  $n'/\Delta v$ . The whole problem is to find the solution of Eq. (26). If  $\xi$  is small compared with the wavelength, we can evaluate  $E - E'$  into series and in the first approximation we obtain

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{e}{m} \frac{\partial E}{\partial x} \xi \frac{\partial f}{\partial \nu}. \quad (27)$$

The random electric field  $E$  can be divided into two parts  $E = E_0 + \tilde{E}$  where  $E_0$  is a resonant part slowly varying with time and  $\tilde{E}$  is an oscillating part. If we retain  $E_0$  only, Eq. (27) describes the motion of particles with force  $F = -(e/m)(\partial E/\partial x)\xi$  acting on them. If  $\partial E_0/\partial x > 0$ , this motion is oscillating and hence stable. In the opposite case,  $\partial E_0/\partial x < 0$ , it is unstable. Only stable motion can conserve correlation. Therefore, we should restrict ourselves to the stable regions only,  $\partial E_0/\partial x = -\partial^2\varphi/\partial x^2 > 0$ , where the electrons are trapped. (In fact, the region  $\partial^2\varphi/\partial x^2 < 0$  is narrower than the trapping region.)

To solve the equation for  $f$  we introduce angle-action variables  $\alpha = \arctan(\Omega\xi/\nu)$ ,  $I = I = \nu^2/2\Omega + \Omega\xi^2/2$ ,  $\Omega^2 = (e/m)(\partial E_0/\partial x)$ . We suppose that  $\Omega$  slowly changes with time so that it is possible to neglect the terms proportional to  $\partial\Omega/\partial t$  which are zero on the average. Equation (27) in the new variables is as follows:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Omega \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{e}{m\Omega} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} \sin \alpha \left( 2I \frac{\partial f}{\partial I} \cos \alpha - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \sin \alpha \right). \quad (28)$$

We consider the right-hand side of this equation as small so that  $f$  depends on  $\Omega$  approximately as  $f(\alpha - \Omega t)$ . We suppose that at the initial state  $f$  is localized and only within a small interval  $\Delta\alpha$  near  $\alpha' = \alpha - \Omega t \approx 0$  it is not zero. Substituting  $\alpha \approx \Omega t$  in the right-hand side of Eq. (28) we see that it can give resonant input only on the second harmonic  $\pm 2\Omega$  on  $\tilde{E}$  (we suppose that the zero harmonic of  $\tilde{E}$  is included in  $E_0$ ). Adding a small random quantity to  $\Omega$  we can compensate this input in the term  $\partial f / \partial \alpha'$  at  $\alpha' = 0$ , so that Eq. (28) may be rewritten in the form

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{e}{m\Omega} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \sin(2\Omega t) \left( I \frac{\partial f}{\partial I} - \alpha' \frac{\partial f}{\partial \alpha'} \right). \quad (29)$$

Now, we can use the averaging procedure. We divide  $f$  into slowly varying  $f_0$  and oscillating parts  $\tilde{f}$  and, remembering that our frame of reference moves with the average velocity  $v$ , we find

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = D \left( I \frac{\partial}{\partial I} - \alpha' \frac{\partial}{\partial \alpha'} \right)^2 f_0, \quad (30)$$

where

$$D = \frac{\pi e^2}{m^2 \Omega^2} \int k^2 E_k^2 [\delta(\omega_0 - kv + 2\Omega) + \delta(\omega_0 + kv - 2\Omega)] dk. \quad (31)$$

In fact  $\Omega$  is a slowly varying function of time so that the value  $D$  should be averaged over  $\Omega$ .

Now we see that the slowly varying part of the electric field  $E_0$  includes harmonics in the interval  $\Delta k \sim \Omega/v$ , i. e.,  $E_0 = \sum_{\Delta k} E_k \exp(ikx)$ . Therefore,

$$\langle \Omega^4 \rangle \approx \frac{e^2}{m^2} \int_{\Delta k} k^2 E_k^2 dk = \frac{e^2}{m^2} \frac{k^2 \Omega}{v} E_k^2, \quad k = \frac{\omega_0}{v}. \quad (32)$$

We find from this relation

$$\Omega \approx \left( \frac{e^2}{m^2} \frac{\omega_0^2}{v^3} E_k^2 \right)^{1/3}. \quad (33)$$

If  $k^2 E_k^2 / 4\pi \sim mn'v^2/2$ , then  $\Omega \sim (n'/n_0)^{1/3} \omega_0$ .

Now we can estimate  $D$  as  $D \sim (n_0/n')^{2/3} (D_0/v^2) \sim (n_0/n')^{2/3} (1/t_0)$  where  $D_0$  is the quasilinear coefficient of diffusion in the  $v$  space [see Eq. (18)].

To simplify Eq. (30) we use new variables  $x = \alpha' I$ ,  $I$ ,  $\phi = f/I$ . In the last relation the factor  $1/I$  takes into account the Jacobian of the transformation to the new variables so that  $\phi$  is simply the distribution function in new variables. Equation (30) takes the form

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} I \phi. \quad (34)$$

From this equation it follows that the function  $\phi$  tends to constrict itself:  $\phi$  at  $I = 0$  increases exponentially with time and  $\phi$  tends to drop with  $I$  more steeply than  $1/I$ . As a result, for a rather arbitrary initial state with

$\phi(I = 0) \neq 0$  and the boundary condition  $\phi = 0$  for the untrapped particles region, the net density  $N = \int \phi dI dx$  begins to decrease with time only at

$$t > \frac{(\ln \Delta v/u)^2}{D}$$

(see the appendix) so that  $N(t) = N_0 \left(\frac{n'}{n_0}\right)^{1/3} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2}$  at  $t \gg \left(\frac{n'}{n_0}\right)^{2/3} t_0 \left(\frac{\ln \Delta v}{u}\right)^2$ . Here,  $N_0$  is the initial value of  $N$ ,  $t_0$  is the quasilinear scale,  $\Delta v$  is the initial width of the beam with the velocity  $u$ . At  $\Delta v \rightarrow 0$ , we can consider  $N$  and hence  $Q$  as constants.

#### IV. Beam Evolution

Now we can consider the beam evolution. In the most interesting case  $(n'/n)^{2/3} (\ln \Delta v/u)^2 > 1$ , when the quasilinear theory is not applicable the function  $Q(t)$  may be considered as a constant,  $Q = Q_0 = \text{const}$ . It is quite difficult to calculate  $Q_0$ , but we can estimate it fairly well.

Our consideration cannot apply to the initial stage when only one resonant harmonic with  $k = k_0 = \omega_0/u$  grows up to finite amplitude [6]. We should begin with the next stage when many harmonics develop and the process becomes random. At this stage the line in phase space corresponding to the beam has a radius of curvature of the order of the wavelength so that we can estimate the length of the correlation as  $l \sim 1/k = \lambda_0/2\pi$  (this quite low value corresponds to the bottom of the potential well where the trapping of particles takes place). This corresponds to the normalization factor  $1/k = v/\omega_0$  if we approximate the two-particle correlation function as  $\delta(x - x')$ :

$$\langle f(x, v, t) f(x', v', t) \rangle = f_0 g \approx f_0 (n'/k) \delta(v - v') \delta(x - x'). \quad (35)$$

This correlation function gives us  $Q_0 = n'/(2\pi k) = n'v/(2\pi\omega_0)$ . Now, we can substitute this value in Eqs. (17) and (18) and get

$$\frac{\partial E_k^2}{\partial t} = \frac{4\pi^2 e^2 \omega_0}{mk^3} \left( v^{-1} \frac{\partial f_0}{\partial v} E_k^2 + \frac{mn'v}{\omega_0} f_0 \right), \quad (36)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\pi e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_k^2}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{mn'v}{\omega_0} f_0 \right). \quad (37)$$

Here,  $k \equiv \omega_0/v$ . These equations have as a formal steady-state solution  $E_k^2 = \text{const}$ ,  $f_0 = \text{const} \cdot \exp(-v^3/v_0^3)$  with  $E_k^2 = mn'v_0^3/(3\omega_0)$ . But this solution cannot be reached with the natural evolution of the beam. We see that Eqs. (36) and (37) have the integral of motion

$$f_0 - \frac{1}{4\pi m \omega_0^2} \frac{\partial}{\partial v} (k^3 E_k^2) = \text{const} \quad (38)$$

so that the real solution of Eqs. (36) and (37) is far from the mentioned one. But we should take into account the fact that the  $\delta$  functions  $\delta(\omega_0 - kv)$  in Eqs. (17) and (18) should be spread over the interval  $\Delta\omega \sim \Omega$  due to the

trapping of electrons. This means that Eqs. (36) and (37) should be written in the form

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial E_k^2}{\partial t} = \frac{\pi e^2 \omega_0^2}{mk^3} \left( \left\langle v^{-1} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right\rangle E_k^2 + \frac{mn'}{\omega_0} \langle v f_0 \rangle \right), \quad (39)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\pi e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\langle E_k^2 \rangle}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{mn'v}{\omega_0} f_0 \right), \quad (40)$$

where averaging is made over intervals  $\Delta k \sim \Omega/v$ ,  $\Delta v \sim \Omega/k$ . If the  $\Omega$  is large enough, i. e.,  $(n'/n_0)^{1/3}$  is not very small, the average value  $\langle E_k^2 \rangle \approx \text{const}$ , and hence from Eq. (40) it follows that  $f_0$  tends to the exponential distribution

$$f_0 = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{v^3}{v_0^3}\right), \quad (41)$$

with  $v_0^3 = 3\langle E_k^2 \rangle \omega_0 / (mn')$ . Now we see that Eq. (39) takes the form

$$\frac{\partial E_k^2}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} (E_k^2 - \langle E_k^2 \rangle), \quad (42)$$

where

$$\tau^{-1} = 4\pi^2 \frac{\omega_0 n' \langle v f_0 \rangle}{k^3 \langle E_k^2 \rangle}.$$

Hence,  $E_k^2$  tends to the Raleigh-Jeans distribution,  $E_k^2 = \langle E_k^2 \rangle \approx \text{const}$ . Thus if the parameter  $(n'/n_0)^{1/3}$  is not very small, the distribution function for beam electrons tends to exponential and  $E_k^2$  to the equipartition distribution.

## V. Discussion

Thus, we have shown that the two-particle correlation function for beam electrons is conserved for a very long time. This means that the pieces of the initial beam which play the role of some macroparticles or clumps exist for a long time in the plasma [7]. These macroparticles are conserved and not destroyed only in the regions of particle trapping. In phase space these particles correspond to some rotating «sticks» and in the usual space they represent some vibrating entities so that it is better to call them «vibrons». Probably the conservation of two-particle correlations is the main physical result of the trapping regions in the turbulent plasma.

In our case the macroparticles appeared as some sort of residue of the initial beam. But of course they can be generated by the turbulent plasma itself so that the problem arises of considering the generation and destruction of vibrons in the turbulent plasma and of clarifying their role in turbulent processes.

The idea of generation of clumps in the turbulent plasma was also suggested by Dupree [7] to explore the anomalous resistivity of plasma at very high electrical fields. Probably some sort of macroscopic particle generation which corresponds to the high-order correlations in the fields-particles interactions should be important even at low electric fields.

## Acknowledgments

The authors are grateful to Professor Abdus Salam, the International Atomic Energy Agency, and UNESCO for hospitality at the International Centre for Theoretical Physics, Trieste.

## Appendix

To find the solution of the equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} x f \quad (\text{A1})$$

with the boundary conditions  $\partial f / \partial x |_{x_0} = 0$ ,  $f(I) = 0$  and initial value  $f = 1$  at  $t = 0$ , we introduce new variables  $y = \ln x$ ,  $F = xf$ . Then, Eq. (A1) becomes

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (\text{A2})$$

with  $F = \exp(y)$  at  $t = 0$ ,  $y < 0$ . To fulfil the boundary condition  $F(y = 0) = 0$  we continue  $F$  antisymmetrically  $F = -\exp(-y)$  at  $t = 0$ ,  $y > 0$ . The solution of (A2) can be found by Fourier transformation:

$$F = \frac{i}{2\pi} \int \exp(-k^2 t + ik y) \frac{k dk}{1 + k^2}. \quad (\text{A3})$$

Now we find

$$n(t) = \int_0^\infty f dx = \int_{-\infty}^0 F(+y) dy = \frac{i}{2\pi} \int \frac{\exp(-k^2 t) dk}{1 + k^2}. \quad (\text{A4})$$

For  $t \gg 1$ ,  $n(t) = (\pi/2t)^{1/2}$ .

With the initial value  $f = 1/\Delta$  at  $0 \leq x \leq \Delta$  and  $f = 0$  outside this interval the solution is

$$F = \frac{i}{2\pi} \int \exp(-k^2 t + ik y) \frac{\exp(ik \ln \Delta) k dk}{1 + k^2}. \quad (\text{A5})$$

Again  $n(t) \approx [\pi/(2t)]^{1/2}$  but now it is valid for greater  $t \gg (\ln \Delta)^2$ .

## References

1. Vedenov A.A., Velikhov E.P., Sagdeev R.Z. // Nucl. Fusion. 1961. V. 1. P. 82; Nucl. Fusion Suppl. Pt. 1962. V. 2. P. 465.
2. Drummond W.E., Pines D. // Nucl. Fusion Suppl. Pt. 1962. V. 3. P. 1049.
3. Ryutov D.D. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1969. V. 57. P. 232 [Sov. Phys. JETP. 1970. V. 30. P. 131.]
4. Dawson J.M., Hsi G.G. // In Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. International Atomic Energy Agency, Vienna, 1969. V. I, P. 735.
5. Dawson J.M., Shanny R. // Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 1506.
6. O'Neil J.M., Winfrey J.H., Malmberg J.H. // Phys. Fluids. 1971. V. 14. P. 1204.
7. Dupree T.H. // Phys. Rev. Letters. 1970. V. 26. P. 789.

## TURBULENT LAYER IN AN IDEAL TWO-DIMENSIONAL FLUID \*)

The problem of the turbulent layer arising in the two-dimensional ideal fluid is considered. The sharp initial velocity discontinuity was replaced by a row of 100 point vortices whose evolution in time was found by numerical methods. The average velocity profile and velocity fluctuations are given. The picture is very similar to the ordinary turbulent layer in spite of the potential character of the ideal fluid motion outside the discontinuity.

### 1. Introduction

In this paper we study the turbulent layer development in the two-dimensional flow of an ideal fluid. More precisely, the following problem is considered: Two nonviscous, noncompressible fluids are separated by the rigid half-plane  $y = 0$ ,  $x < 0$ . If  $x \rightarrow -\infty$ , then one of these fluids is at rest; another moves along  $x$  with the velocity  $v_0 = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{v}(t, x, y) = \begin{cases} \mathbf{i}, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases} \quad (1)$$

In this case the free boundary between these fluids at  $x > 0$  corresponds to a discontinuity of the tangential velocity. This discontinuity is unstable. Thus, the steady-state flow is impossible. The flow is disturbed and becomes nonstationary.

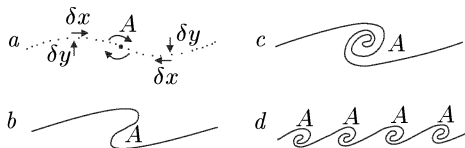
The free boundary becomes so complicated that it can be considered as random, so that in spite of the potential character of the motion outside the boundary the flow has features of the turbulent layer. The study of this turbulence is the subject of our paper.

### II. Qualitative Considerations

The qualitative picture of the tangential velocity discontinuity evolution is easy to consider if we replace it by a system of many-point vortices and pass to the coordinate system which moves in  $x$  direction with velocity  $1/2$ . In this coordinate system  $v = 1/2$  in the upper half-plane and  $v = -1/2$  in the lower half-plane and the vortices are at rest. At a small perturbation of such a system (see Fig. 1 a) the vortices on both sides of point  $A$  approach point  $A$  [1].

\*) *Kadomtsev B.B., Kostomarov D.P.* // The Physics of Fluids. 1972. V. 15. № 1. P. 1-3.

The velocity of this motion  $\delta\dot{x}$  at a small perturbation  $\delta y$  is proportional to  $\delta y$ ;  $\delta\dot{x} \sim \delta y$ . The accumulation of the vortices at point  $A$  leads to the appearance



of the rotation which displaces the vortices in the  $y$  direction with the velocity  $\delta\dot{y} \sim \delta x$ , where  $\delta x$  is the displacement of vortices along  $x$  (see Fig. 1 *a*) so that  $\delta\dot{x} \sim \delta x$ , and we have an instability with the growth rate  $\gamma \sim 1$ .

Fig. 1. The development of the tangential velocity discontinuity instability

The evolution in the nonlinear stage leads to the following [2]. A new larger system of point vortices is formed (see Figs. 1 *b*, 1 *c*, and 1 *d*). This system is again unstable with respect to the longer wave perturbations, so that the evolution of the tangential discontinuity leads to the formation of larger and larger vortices. This conclusion is in good agreement with the computer results.

### III. Mathematical formulation

Let us discuss the mathematical description of this problem. We suppose that the fluid is noncompressible:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

and its motion is potential. But the free boundary between two fluids is the line of the tangential velocity discontinuity. Thus, the vortex density  $\Gamma(t, x, y)$  is of the  $\delta$  function type with the singularity on this line.

If we take into account (2), we can introduce the stream function  $\psi(l, x, y)$  and write the velocity field in the form

$$\mathbf{v} = (\mathbf{k} \times \nabla \psi) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{j}. \quad (3)$$

The stream function satisfies Poisson's equation

$$\Delta \psi = \Gamma. \quad (4)$$

The rigid plane which separates the fluids in the region  $x < 0$  is a streamline

$$\psi(t, x, 0) = 0, \quad x < 0. \quad (5)$$

The vortices move together with the flow. Thus, the vortex density  $\Gamma$  would satisfy the transport equation

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma \mathbf{v}) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0. \quad (6)$$

So the problem is to solve Eqs. (4) and (5) for the stream function  $\psi$  with some initial condition for the function  $\psi$ .

### IV. Computer Model

This problem was solved by computer. We considered the following model. The free boundary between two fluids was replaced by a set of point vortices. These vortices were subsequently emitted from the edge of the rigid plane



with time interval  $\tau$  and moved together with the flow. We also supposed that there was an absorbing wall at the distance 1 from the edge of the rigid plane which was placed perpendicular to the stream. The corresponding scheme and the coordinate system which we used are shown in Fig. 2 *a*. We supposed that the stream goes to the wall normally and is absorbed on it together with the vortices. So we have

$$v_y(t, 0, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, 0, y) = 0. \quad (7)$$

The absorbing wall makes it possible to consider the vortex motion in the limited region.

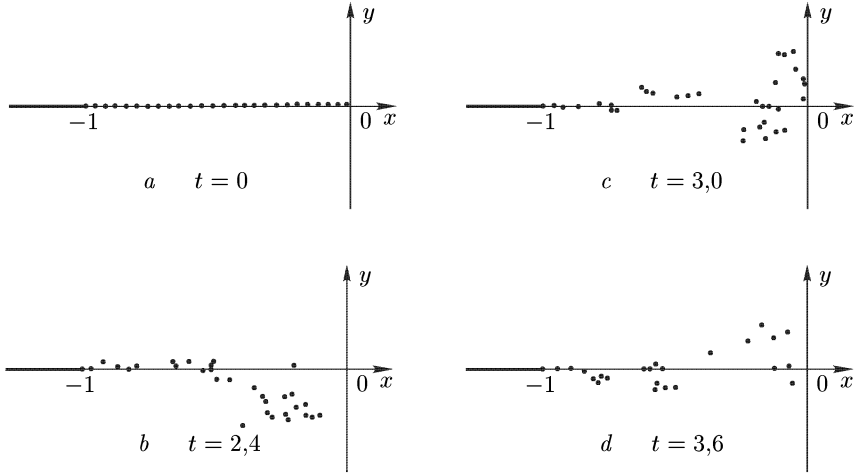


Fig. 2. The initial vortex distribution and the vortex distributions at different fixed moments of time after the development of the instability

In this model the rigid plane was considered as a plane of the tangential velocity discontinuity with constant value 1. In this case the vortex density  $\Gamma$  in the region considered  $x < 0$  had the form

$$\Gamma(t, x, y) = -\{\delta(y)\sigma[-(x+1)] + \frac{1}{2}\tau \sum_n \delta[x-x_n(t)]\delta[y-y_n(t)]\}, \quad (8)$$

where  $x_n(t)$  and  $y_n(t)$  were the coordinates of the point vortices, and  $\sigma(x)$  was a shear function

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

The stream function  $\psi$  was found from Poisson's equation (4) with boundary conditions (1) and (7). The equations of the vortex motion had the form

$$\begin{aligned} \frac{dx_n}{dt} &= v_x(t, x_n, y_n) = -\frac{\partial \psi}{\partial y}(t, x_n, y_n), \\ \frac{dy_n}{dt} &= v_y(t, x_n, y_n) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x_n, y_n). \end{aligned} \quad (9)$$

If we find the solution of Poisson's equation and calculate the derivatives of the stream function  $\psi$ , we obtain the following expressions for the velocity of the vortices:

$$v_x(t, x_n, y_n) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} y_n) - \frac{1}{2\pi} \left( \arctan \frac{1-x_n}{y_n} + \arctan \frac{1+x_n}{y_n} \right) + \frac{\tau}{4\pi} \sum_{m \neq n} \left( \frac{y_n - y_m}{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} + \frac{y_n - y_m}{(x_n + x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \right), \quad (10)$$

$$v_y(t, x_n, y_n) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(1+x_n)^2 + y_n^2}{(1-x_n)^2 + y_n^2} - \frac{\tau}{4\pi} \sum_{m \neq n} \left( \frac{x_n - x_m}{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} + \frac{x_n + x_m}{(x_n + x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \right). \quad (11)$$

The term with  $m = n$  which corresponds to the self-action of the vortex is omitted from these sums. Thus, the problem is to solve the system of the ordinary differential equations (9) with the right-hand sides of (10) and (11).

## V. Results of Calculations

Let us discuss the results. In our calculations we took  $\tau = 0,02$ . The average vortex velocity should be equal to  $1/2$ , so the average lifetime of the vortices in the system  $t_0$  is equal to 2. Thus, our  $\tau$  is equal to  $0,01t_0$ .

At the initial moment 100 vortices were distributed quasiuniformly near the  $x$  axis, for example, in the following way:

$$x_n = -0,01 \left( n - \frac{1}{2} \right),$$

$$y_n = 0,01 \sin \frac{\pi}{2} (1 + x_n).$$

Then, the system behavior was defined by integration of Eqs. (9). Subsequently, with time interval  $\tau$  new vortices were emitted at the edge of the rigid plane. The vortices which went to the absorbing wall were excluded.

Owing to the instability and random features of the motion, the system very soon forgot its regular initial state. We can see this in Figs. 2 a-2 d. In these four pictures we compare the vortex distribution at the initial moment  $t = 0$  with the vortex distribution at the moments  $t = 2,4$ ,  $t = 3$ ,  $t = 3,6$  when the stream is already turbulent. The points mark the position of every fourth vortex. These pictures show, in particular, that the number of vortices in the system is not constant but varies in time.

In Fig. 3 the trajectories of two vortices are shown. The first was emitted into the system at  $t = 0,4$ , the second at  $t = 2$ . The first vortex moved in the

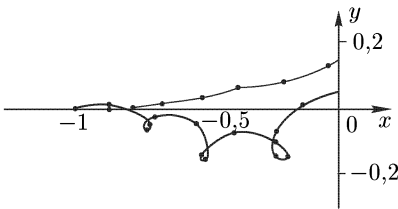


Fig. 3. The trajectory of the vortices

region  $y < 0$  where  $v_x$  is rather small and it has a very complex trajectory. Its lifetime is equal to 2,6, which is more than the average lifetime. The second vortex drifted into the region  $y > 0$  and was brought out of the system for the rather short time 1,4.

In Figs. 4 and 5 we show the  $y$  dependence of  $\bar{v}_x$  and  $\mathcal{D}_x = \overline{(v_x - \bar{v}_x)^2}$  for fixed  $x = -0,5$ . Here, the bar means the time average

$$\bar{v}_x = t^{-1} \int_0^t v_x(\tau) d\tau,$$

$$\mathcal{D}_x(t) = t^{-1} \int_0^t [v_x(\tau) - \bar{v}_x(t)]^2 d\tau.$$

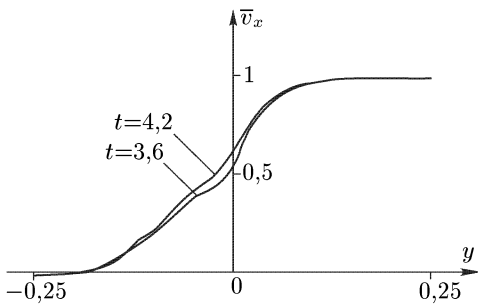


Fig. 4 The dependence of the average velocity  $\bar{v}_x$  on  $y$  for  $x = -1/2$

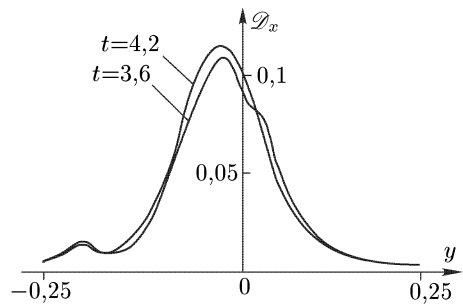


Fig. 5. The dependence of the dispersion  $\mathcal{D}_x = \overline{(v_x - \bar{v}_x)^2}$  on  $y$  for  $x = -1/2$

## VI. Conclusion

We have shown by numerical calculations that even in the case of an ideal fluid the layer between the flowing fluid and fluid at rest has all the features of turbulence. Of course, the small-scale motion is different from the turbulent motion in the three-dimensional case, as was discussed by Kraichnan [3], but macroscopically this flow looks like the usual turbulent layer. In particular, the average velocity profile shown in Fig. 4 is quite similar to the profile in the usual turbulent layer. A slight asymmetry in  $y$  shown in Figs. 4 and 5 seems to correspond to the real asymmetry of the flow. Indeed, the vortices in the upper half-plane are displaced on the right-hand side by the flow so that the average thickness of the layer is less in the upper half of the layer. It is interesting to point out that the random turbulent character of the two-dimensional layer shown by our numerical calculations was not evident *a priori*. It is known, for example, that for the case of a two-dimensional jet such a turbulence does not develop and the regular chain of vortices arises [4]. We hope that the results of this numerical experiment will help to develop an analytical theory of two-dimensional turbulence.

## Acknowledgments

The authors are grateful to Professor Abdus Salam, the International Atomic Energy Agency and United Nations Educational Scientific and Cultural Organization for hospitality at the International Centre for Theoretical Physics in Trieste.

## References

1. *Lamb H.* Hydrodynamics. — London: Cambridge University Press, 1932. P. 225.
2. *Rosenhead L.* // Proc. Roy. Soc. (London) 1931. V. 134. P. 170.
3. *Kraichnan R.H.* // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 1417.
4. *Abernathy F.H., Kronauer R.E.* // J. Fluid. Mech. 1962. V. 13. P. 1.

# A STATIONARY TOKAMAK \*)

## Abstract

### A STATIONARY TOKAMAK.

The basis for plasma confinement in a Tokamak is the longitudinal current induced by the eddy electric field. The lifetime of the eddy electric field is virtually always limited. This is usually considered a disadvantage of the Tokamak system from the point of view of constructing a thermonuclear reactor. The authors discuss the possibilities of non-inductive maintenance of a longitudinal current, which would in principle make it possible to construct a stationary thermonuclear reactor on the basis of the Tokamak system. To maintain a longitudinal current it is necessary to move the field lines of the poloidal magnetic field out towards the periphery of the plasma column. The possibility of doing this is easily demonstrated in principle by taking as example a cylindrical plasma column without longitudinal magnetic field and inducing artificially a flow of matter and energy along the radius. However, it is impossible to induce such a flow in a straight system when there is a strong longitudinal magnetic field. In a toroidal plasma column it is possible to establish a process whereby the current is maintained by the plasma flow. The authors explain the conditions under which this is possible.

## 1. Introduction

Tokamak systems have a number of advantages over other toroidal systems. They are axially symmetrical, which appreciably simplifies their design; owing to the presence of a strong axial magnetic field and a conducting sheath, and also because of the considerable shear, the minimum  $B$  and short coupling length in the magnetic field configuration, many plasma instabilities are stabilized in Tokamaks. There is also a permanent source of heat, namely the Joule heating.

They also have a disadvantage, however, which arises from the fact that the axial electric current in Tokamaks is generated by a vortical electric field, which cannot be maintained for an indefinite time. The operating periods therefore have to alternate with intervals of zero axial current during which the plasma is not confined and moves to the walls of the vessel. The pulsed operation of Tokamaks is certainly a very serious drawback with regard to the possibility of using them as a basis for constructing a thermonuclear reactor. This has already been mentioned previously, and the possible maintenance of the current by some means other than vortical electric fields has been discussed in the literature, e. g. in Ref. [1] the maintenance of the current by a travelling variable field («peristaltic Tokamak»), in Ref. [2] by injection of beams into the plasma. These methods call for extensive additional equipment which seems very difficult to provide under the constraints of future thermonuclear reactors. It is therefore desirable to consider whether there is some other simpler and more straightforward means of maintaining the current in Tokamaks.

---

\*) *Kadomtsev B.B., Shafranov V.D.* // Nuclear Fusion. Supplement. 1972. P. 209–214.

There is an important point to be noted here. As has been remarked by many authors, in a hypothetical self-sustaining reactor based on Tokamak the plasma parameters are such that the rate of energy generation by thermonuclear reactions is at least an order of magnitude greater than the Joule heating rate. From this it is commonly concluded that the thermonuclear reaction ignition temperature will be difficult to reach by Joule heating alone. On the other hand, the smallness of the Joule heating implies that the plasma resistance is almost zero and that the corresponding dissipation of magnetic field energy is very small compared with the energy flux in the plasma due to thermonuclear reactions. Under these conditions it is possible to use a small part of the large fluxes of energy and particles in the plasma to maintain the poloidal magnetic field, i.e. the axial current in the plasma. In other words, the question arises whether, when a Tokamak is operating as a reactor, there can occur a plasma flow which under certain conditions would make the effective resistance of the plasma zero and allow the current to be maintained indefinitely. This paper deals with the question just stated.

## 2. The Pinch Effect

Let us first consider a simple column of plasma with no axial magnetic field, confined by the magnetic field of the current flowing along it. In equilibrium, the gradient of the plasma pressure  $p$  is balanced by the Ampère force

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{c} j_z B_\theta = -\frac{B_\theta}{4\pi r} \frac{d}{dr} (rB_\theta), \quad (1)$$

where  $j_z$  is the axial current density,  $B_\theta$  the azimuthal component of the magnetic field. The current density is related to the electric field by the generalization of Ohm's law, for which we can take the equation of motion of the ion component of the plasma. The  $z$  component of this equation is

$$enE_z + \frac{en}{c} v_r B_\theta - \frac{en}{\sigma} j_z = 0, \quad (2)$$

where  $E_z$  is the axial electric field,  $n$  the electron density,  $\sigma$  the transverse conductivity, and the other symbols have the usual meaning.

It is seen from equation (2) that the axial current can be maintained not only by an axial electric field but also by a radial flow of the plasma. If we have a source of energy which provides any desired radial distribution of the pressure, and if it is possible to place in the plasma a neutral substance which is then ionized and moves to the walls, the quantities  $v_r$  and  $p$  can be varied as required, simply by appropriate choice of the sources of energy and matter. As a simple example, let us take the case  $j_z = \text{const}$ ,  $T = \text{const}$ , where  $T$  is the plasma temperature and  $p = 2nT$ . Then  $B_\theta = 2\pi j_z r/c$  and, when  $E_z = 0$ , equation (2) gives

$$v_r = \frac{c^2}{2\pi\sigma r}, \quad (3)$$

i. e. the plasma expansion velocity is of the order of the diffusion velocity. According to (3),  $v_r \rightarrow \infty$  when  $r \rightarrow 0$ , corresponding to the injection of neutral matter near the axis of the pinch.

From (1), when  $j_z = \text{const}$ , we have

$$p = 2nT = p_0 - \frac{\pi}{c^2} j_z^2 r^2, \quad (4)$$

where  $p_0$  is the pressure near the axis. Hence we can easily determine the required strength of distributed injection of neutral matter:

$$Q = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r n v_r) = \frac{c^2}{2\pi\sigma r} \frac{dn}{dr} = \frac{j_z^2}{2\sigma T}. \quad (5)$$

With this distributed source and an axial source of strength  $Q_0 = (2\pi r n v_r)_{r=0} = c^2 n_0 / \sigma$ , it would seem possible to maintain the current in the plasma without an external electric field. However, in this discussion one point has been omitted, which is more easily discovered by means of the magnetic field «diffusion» equation

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = -c(\text{curl } \mathbf{E})_\theta = -\frac{\partial}{\partial r} (v_r B_\theta) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) \right], \quad (6)$$

where the value of  $E_z$  in  $(\text{curl } \mathbf{E})_\theta$  has been taken from (2). From equation (6) we see that the magnetic field moves together with the plasma at velocity  $v_r$  and diffuses relative to the plasma with coefficient  $c^2/(4\pi\sigma)$ . In a stationary state, the diffusion of the lines of force to the axis of the discharge must be balanced by the opposite flow of the expanding plasma.

From equation (6) we see that the stationary magnetic field near the axis can vary as  $r^\nu$ , with

$$v_r = \frac{c^2(\nu + 1)}{4\pi\sigma} \cdot \frac{1}{r}. \quad (7)$$

When  $\nu = 1$ , i.e. with the velocity (3), the field  $B_\theta$  increases linearly with the radius  $r$ ; when  $\nu > 1$ , i.e. at somewhat larger velocities, the increase with  $r$  is more rapid.

Let us now assume, as a more realistic situation, that the axial source  $Q_0$  is not only on the axis itself but has an extent  $r_0$ . An even simpler assumption is that  $Q \sim Q_0 \delta(r - r_0)$ . Then the velocity  $v_r$  has a discontinuity at  $r = r_0$ :  $v_r = 0$  for  $r = r_0 - 0$ , and  $v_r = c^2(\nu + 1)/(4\pi\sigma r_0)$  for  $r = r_0 + 0$ . Let us also suppose that the field  $B_\theta \equiv 0$  for  $r < r_0$ . Then integration of (6) across the discontinuity gives

$$(\nu + 1)[B_\theta]_{r=r_0+0} = \left[ \frac{d}{dr} (r B_\theta) \right]_{r=r_0+0}. \quad (8)$$

This relation acts as a boundary condition for  $B_\theta$ . It shows that when  $r \rightarrow r_0$ , the magnetic field varies as  $r^\nu$ ,  $\nu$  being given by the source strength on the axis, and certainly the magnetic field cannot be made zero at  $r = r_0$ . This means that we do not have a generation of a magnetic field but only a decrease of the diffusion of the magnetic field towards the axis when a radial expansion of the plasma occurs. For a completely stationary situation there must be along the pinch axis some other source of current to generate a small magnetic field near the axis:  $B_\theta = (r_0/a)^\nu B_a$ , where  $B_a$  is the field at the plasma boundary  $r = a$ . But even in the absence of such a force on the axis, the magnetic field is almost stationary when  $\nu \gg 1$  and the current moves entirely to the plasma boundary.

### 3. A Plasma in a Torus

Let us now turn to the Tokamak geometry, where a strong axial magnetic field  $B_z$  is produced in a torus of radius  $R$ , and an axial current is passed through the plasma to give a poloidal magnetic field  $B_\theta$ . In Tokamak condi-

tions  $B_z \gg B_\theta$ , and so the screw instability safety factor  $q = rB_z/(RB_\theta)$  is several times greater than unity ( $r$  being the distance from the magnetic axis). We shall take first the case of a dense plasma having  $\nu_e \gg v_{Te}/(aR)$ , where  $\nu_e$  is the electron collision frequency and  $v_{Te}$  the electron thermal velocity. In such a plasma the simple magnetohydrodynamic approximation can be applied. For simplicity, it will be assumed throughout that the electron and ion temperatures are equal and constant over the discharge cross-section.

It is easily shown that in a dense plasma with a strong axial field the previous picture of displacement of the magnetic field by the flow of plasma completely disappears. The reason is that with the strong axial field there is a considerable reduction of the rate of transverse expansion of the plasma, which becomes insufficient to balance the diffusion of the poloidal field towards the magnetic axis. To show this explicitly, we use the ion equation of motion as Ohm's law

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] - \frac{1}{en} \nabla p_i = \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \quad (9)$$

where  $\mathbf{j}$  is the current density,  $\sigma$  the electrical conductivity (for simplicity, no distinction is made between  $\sigma_{\parallel}$  and  $\sigma_{\perp}$ ),  $p_i = nT$  the ion pressure,  $n$  the ion density and  $\mathbf{v}$  the ion velocity.

The  $z$  component of (9) (along the column, i.e. along the magnetic axis) is

$$E_z + \frac{1}{c} v_r B_\theta = \frac{j_z}{\sigma}. \quad (10)$$

Here the mean rate of radial diffusion  $v_r^0$  is given by the Pfirsch-Schlüter formula, and when  $q^2 \gg 1$  its value in order of magnitude is

$$v_r^0 \approx -\frac{c^2}{4\pi\sigma B^2} q^2 \frac{dp}{dr} \sim \frac{j_z}{B_\theta} \frac{a^2}{R^2} \beta_\theta, \quad \beta_\theta = \frac{8\pi p}{B_\theta^2}, \quad (11)$$

where  $a$  is the minor radius of the torus. Hence we see that the second term on the left of (10) is less than  $j_z/\sigma$  by a factor  $R^2/(a^2\beta_\theta)$ , so that the diffusion velocity of the plasma is insufficient to maintain the current even in the limiting case  $\beta_\theta \sim a/R$ , when the equilibrium condition is already violated.

It is true that, as well as the mean diffusion velocity, a toroidal plasma is known to exhibit a convective flow with a velocity greater by a factor  $R/a$ . The plasma flows out of the magnetic surface on the outer periphery of the torus, and returns on the inner periphery. But this convection worsens, not improves, the «compression» of the magnetic field. To see this, we need only substitute in (10) the total radial velocity given by the  $\theta$  component of (9):

$$v_r = -c \frac{E_\theta}{B_z} + c \frac{j_z}{\sigma B_z}. \quad (12)$$

The Pfirsch-Schlüter diffusion results from the average drift in fields  $B_z$ ,  $E_\theta = -\nabla_\theta \varphi$ , described by the first term. On substituting the velocity  $v_r = c\nabla_\theta \varphi/B_z$  in equation (10) and averaging over the annular area of cross-section  $dS_z$  between adjacent magnetic surfaces, using the equation

$$B_z = B_0 \left(1 + \frac{r}{R} \cos \theta\right)^{-1}$$

we get

$$\int (\mathbf{B}\nabla\varphi/B_z) dS_z = \frac{1}{2\pi RB_0} \int (\mathbf{B}\nabla\varphi) dv = 0,$$



i. e. the Pfirsch–Schlüter diffusion does not maintain the axial current. Elimination of the velocity  $v_r$  from (10) corresponds to using instead of (10) the component of the generalized Ohm’s law (9) along the magnetic field

$$\frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{B}. \tag{13}$$

Integration of this relation over the volume between two adjacent magnetic surfaces gives the averaged Ohm’s law for toroidal systems:

$$dJ = -\frac{c\varepsilon_0}{4\pi I} d\Phi + J \frac{dI}{I}. \tag{14}$$

Here  $dJ$  is the axial and  $dI$  the transverse current,  $d\Phi$  the axial magnetic flux between the magnetic surfaces, and  $\varepsilon_0$  the potential difference at the periphery of the magnetic surface. The axial field in a Tokamak is related to  $\bar{I}$  by  $B_z = -2I/[c(R + r \cos \theta)]$ . The last term in (14) is small in Tokamak conditions, and we see that an external emf applied along the magnetic lines of force is necessary in order to maintain an axial current.

#### 4. A Dilute Plasma in a Torus

In a very dilute plasma the diffusion flux is much increased, as was first shown by Galeev and Sagdeev [3] and later studied by various authors [4–6]. There is also a considerable change in the behaviour of the plasma in a toroidal magnetic field. It will be seen below that in such a plasma the displacement of the poloidal field by the plasma flow becomes similar to that described above for a simple pinch with no axial field.

We shall first consider the «banana» situation, where the collision frequency  $\nu_e \ll \varepsilon^{3/2} v_{Te}/qR$ ,  $\varepsilon = r/R$  being the inverse aspect ratio. Then the main contribution to the diffusion comes from trapped particles having longitudinal velocities  $v_{\parallel} < \sqrt{\varepsilon} v_{Te}$ . The proportion of such particles  $\sqrt{\varepsilon}$ , is small when  $\varepsilon \ll 1$ , but these particles still determine the magnitude of the diffusion flux because of the increased effective collision frequency and their considerably greater departure from the magnetic surfaces in their drift motion. The order of magnitude of the diffusion flux in the banana region is

$$nv_r = -D \frac{\partial n}{\partial r} \approx -\varepsilon^{3/2} q^2 \rho_e^2 \nu_e \frac{\partial n}{\partial r}, \tag{15}$$

where  $\rho_e = v_{Te} m_e c / (eB)$  is the mean Larmor radius of electrons.

In addition to the diffusion, it has been noted by Galeev and Sagdeev [3] that the trapped particles cause a kind of «indirect» thermo-emf which induces a current of passing particles along the magnetic field. They explained the origin of this emf in the following way. The trapped particles traverse banana-type drift orbits whose width in the  $r$  direction is  $\Delta r \sim q\rho/\sqrt{\varepsilon}$ , where  $\rho = v_T/w_B$  is the mean Larmor radius,  $w_B = eB/(mc)$ . These particles are at the outside of the banana when moving along  $\mathbf{B}$  in the direction of the current for ions and in the opposite direction for electrons, and at the inside when moving in the contrary sense. When there is a transverse gradient, this causes a gradient  $\partial f/\partial v_{\parallel}$  for the trapped particles, so that in the «trapping» range  $\Delta v_{\parallel} \sim \sqrt{\varepsilon} v_T$  the longitudinal velocity distribution function changes by

an amount  $\Delta f \sim (\partial f / \partial r) q \rho / \sqrt{\varepsilon}$ . Because the Coulomb collision term is of the diffusion type, this «step»  $\Delta f$  spreads to the passing particles, for which a current  $j \sim e \Delta f v_T^2 \sim -(c/B_\theta) \sqrt{\varepsilon} (\partial p / \partial r)$  is thus induced (here we have used the formula  $q = \varepsilon B_z / B_\theta$ ). This current exceeds the longitudinal current of trapped particles by a factor  $\varepsilon^{-1/2}$ . In order to take account of this effect, in Ohm's law for the axial current component, we must add a further term of the thermo-emf type

$$\frac{j_{\parallel}}{\sigma} = E_{\parallel} + R_{GS}, \quad (16)$$

where  $R_{GS} \approx -[c/(\sigma B_\theta)] \sqrt{\varepsilon} (\partial p / \partial r)$ . This relation represents the balance of forces along  $\mathbf{B}$ , acting on the passing particles;  $j_{\parallel} / \sigma$  is the friction between the electrons and the ions,  $R_{GS}$  the friction between the passing particles and the trapped particles.

When  $B_z \gg B_\theta$ , the force  $R_{GS}$  is almost in the  $z$  direction, and  $j_{\parallel} \approx j_z$ . The passing particles in turn exert an opposite force on the trapped particles, and so the  $z$  component of the equation of motion of the trapped particle is

$$E_z + \frac{v_{rt}}{c} B_\theta = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} R_{GS} + A \frac{j_z}{\sigma}, \quad (17)$$

where  $v_{rt}$  is the mean radial velocity of the trapped particles. In this relation the factor  $(1 - \sqrt{\varepsilon}) / \sqrt{\varepsilon}$  is the ratio of the passing and trapped particle densities, and takes account of the fact that the force exerted by the passing particles acts on a much smaller number of trapped particles, and hence the force per trapped particle is much greater than  $R_{GS}$ . The last term in (17) represents the friction between the trapped electrons and the ions. As has been mentioned above, the passing particle current is  $\varepsilon^{-1/2}$  times the trapped particle current, but their mean directed velocities in the  $z$  direction are approximately equal, so that the numerical factor is of the order of unity.

Knowing the trapped particle radial drift velocity  $v_{rt}$  and using the fact that the radial diffusion of passing particles is very small, we can determine the mean radial velocity of the whole plasma:  $v_r = (n_t/n) v_{rt} = \sqrt{\varepsilon} v_{rt}$ , where  $n_t$  is the trapped particle density and  $n$  the plasma density. From (17)

$$v_r = -\sqrt{\varepsilon} \frac{cE_z}{B_\theta} + \frac{c}{B_z} R_{GS} (1 - \sqrt{\varepsilon}) + \frac{cA}{B_\theta \sigma} \sqrt{\varepsilon} j_z \quad (18)$$

or, substituting  $j_z$  from (16),

$$v_r = \frac{c}{B_\theta} R_{GS} - \sqrt{\varepsilon} (1 - A) \frac{cE_z}{B_\theta}, \quad (19)$$

where the coefficient  $(1 - \sqrt{\varepsilon} + A\sqrt{\varepsilon})$  before  $R_{GS}$  has been replaced, for simplicity, by unity.

From (19) we see that the thermo-emf  $R_{GS}$  is closely related to the diffusion coefficient, since  $v_r$  is just the diffusion velocity:

$$R_{GS} = -\frac{B_\theta D}{cn} \frac{\partial n}{\partial r}. \quad (20)$$

The second term in (19) represents the increased pinching of a dilute plasma, predicted in qualitative terms by Ware [6] and calculated in detail

in [7, 8]. It can be seen from (19) that the sign of this term depends on  $A$ . The exact calculation [7, 8] has shown that  $A < 1$ , i. e. the field  $E_z$  compresses the plasma. When  $\beta_\theta$  is sufficiently large, this compression is much less than the diffusion expansion, and may be neglected,  $v_r \approx cR_{GS}/B_\theta$ , and the relation (16) may be written

$$\frac{j_z}{\sigma} \approx E_z + \frac{1}{c} v_r B_\theta, \quad (21)$$

where  $j_{||}$  and  $E_{||}$  have been approximately replaced by  $j_z$  and  $E_z$  respectively. This relation is in exactly the same form as for a simple pinch with no axial magnetic field. Hence all the results given in Section 2 can be applied immediately to the dynamics of a poloidal magnetic field in a toroidal dilute plasma. The radial expansion of the plasma displaces the lines of force of the poloidal field toward the periphery, and when  $v_r \gg c^2/(4\pi\sigma a)$ , the axial current is kept almost constant. Since the velocity  $v_r$ , which in this case is equal to the diffusion velocity and is given by (15), is in order of magnitude

$$v_r \sim \frac{c^2}{4\pi\sigma} \beta_\theta \sqrt{\varepsilon}, \quad (22)$$

to maintain the current it is necessary that  $\beta_\theta$  should considerably exceed  $\sqrt{(R/a)}$ . On the other hand,  $\beta_\theta$  has an upper limit  $\sim R/a$ , since, when  $\beta_\theta$  is large, the plasma is no longer in equilibrium. Thus it is impossible to make  $\beta_\theta$  much larger than  $\sqrt{(R/a)}$ , and so one should think of the current not as being exactly stationary but as having a damping time considerably greater than the skin time.

We shall return to this topic, but first wish to determine the reason for the «exclusion» of the axial magnetic field  $B_z$  from the dynamics in a dilute plasma, even though it is large, the poloidal field  $B_\theta$  alone being significant. First of all, the equation (21) is the same as the  $z$  component of Ohm's law (10), but for the axial component of Ohm's law in a dilute plasma (16) we have an equation which differs from (12) by the addition of the thermo-emf  $R_{GS}$ . It is the change in the axial component of Ohm's law which makes it possible for the expanding plasma to generate a poloidal field. Since the axial component of Ohm's law is obtained by projecting the vector equation on  $\mathbf{B}$  it follows from (16) that the azimuthal component of Ohm's law must be

$$\frac{j_\theta}{\sigma} = E_\theta - \frac{1}{c} v_r B_z + R_\theta, \quad (23)$$

where  $R_\theta = BR_{GS}/B_\theta$ .

Thus the principal result of the «banana» condition of the dilute plasma is an additional azimuthal force  $R_\theta$  in the  $\theta$  component of Ohm's law, which balances the large term  $-(1/c)v_r B_z$ . It is easily seen that the occurrence of this term is directly related to the azimuthal non-uniformity of the field  $B$ . In such a field the trapped particles cannot move freely in the  $\theta$  direction: when a force in this direction is applied to them, they run into the magnetic mirrors. The force  $R_\theta$  represents this. A force having the same origin causes the increased pinching of the trapped particles: when an axial field  $E_z$  is applied, the trapped particles run into the mirrors and so do not move along  $\mathbf{B}$ , i. e. for the particles  $E_{||} + R_{||} = 0$ , but  $R_{||} = B_\theta R_\theta/B$ , and from the  $\theta$ -component of the equation of motion  $-(1/c)v_{r\theta} B_z + R_\theta = 0$  we have  $v_{r\theta} \approx cE_z/B_\theta$ .

The interaction with a non-uniform magnetic field exists for passing particles also, and moreover it appears slightly even in the magnetohydrodynamic range  $\nu_e > v_{Te}/qR$ , as a result of the axial viscosity when a current flows along a nonuniform magnetic field.

In the plateau and Pfirsch–Schlüter diffusion regions, however, the diffusion expansion velocity of the plasma is smaller, and so the corresponding effect of field displacement by the diffusion flux is less significant in such a plasma.

## 5. Discussion

Thus this semi-quantitative analysis shows that in a stable toroidal plasma whose behaviour is described by the classical transport mechanisms, it is possible to maintain the current by radial expansion of the plasma in «banana» diffusion. The current maintenance can be described in terms of the Galeev–Sagdeev thermo-emf which arises from friction between passing and trapped particles. In a recent paper [9], Galeev and Sagdeev have shown that this emf can act as an external force to amplify the axial current, considering the force from the aspect of the limiting plasma pressure. The discussion given above shows that, when the dynamics of the process is taken into account, the establishment of the axial current in the plasma is more complicated. In reality there is not a generation of a field but a displacement of the poloidal magnetic field towards the periphery of the plasma column. When  $\beta_\theta \sim \sqrt{R/a}$ , the rate of displacement becomes comparable with the rate of diffusion of the magnetic field into the plasma because of the finite conductivity. When the local  $\beta_\theta > \sqrt{R/a}$ , the rate of displacement exceeds the rate of field diffusion. Accordingly, when  $\beta_\theta$  exceeds  $\sqrt{R/a}$  by a sufficient amount, the whole of the original poloidal magnetic flux is driven out of the plasma, and the current flows in a thin skin layer\*). If the external self-induction is large, the transfer of the internal magnetic flux into the external circuit has almost no effect on the total axial current, and the excess of  $\beta_\theta$  over  $\sqrt{R/a}$  is simply a measure of the skin effect. When the latter is sufficiently great and the current flows in a thin layer at the periphery, the magnetohydrodynamic stability of the plasma column is adversely affected, and from this aspect it is probably undesirable in the banana condition to have  $\beta_\theta$  much greater than  $\sqrt{R/a}$ . When the plateau region is reached, the displacement of the lines of force to the periphery is reduced, and larger values of  $\beta_\theta$  are admissible.

In the stationary state, a continuous outward flux of matter has to be maintained, since this is the only way to maintain the current. For this purpose, neutral material has to be injected into the plasma, for example in the form of ice pellets, which thereupon evaporate and are ionized within the plasma. If the substance is placed exactly on the magnetic axis,  $\beta_\theta$  need only slightly exceed  $\sqrt{R/a}$  in order to maintain a constant current, since all the «rings of force» of the poloidal field will be displaced to the periphery and the field near the axis will decrease more rapidly than  $r$  (see formula (8)). If the injection is

---

\*) It can be shown that in this case  $\beta_j = 8\pi p(0)/B_\theta^2(a)$  remains practically constant, of the order  $\sqrt{R/a}$ .

into some finite region within the discharge, there will be an almost but not completely stationary state, and  $\beta_\theta$  must exceed  $\sqrt{R/a}$  by a larger amount in order to maintain the current and eject the magnetic field from the injection region almost completely.

The outward flux of matter necessarily causes a flux of energy from the plasma. Since  $nT$  exceeds  $B_\theta^2/8\pi$  by a factor  $\beta_\theta$ , and the velocity  $v_r$  exceeds  $c^2/(4\pi\sigma a)$  by a factor  $\beta_\theta\sqrt{R/a}$ , the energy flux to the walls exceeds the Joule energy generation by a factor  $\beta_\theta^2\sqrt{R/a}$ . When thermal conduction is included, the losses are even greater, and so, in order to maintain the current, there must be not only injection of fuel but also a sufficient generation of energy in the plasma, considerably exceeding the Joule heating. Hence, for an experimental study of the possibilities of maintaining a current in a dilute plasma, it is necessary to supply a fairly large amount of energy to the plasma.

Thus it is in principle possible to maintain a stationary current in a Tokamak by diffusion expansion of the plasma, but it is necessary to provide for injection of neutral material near the magnetic axis, and to generate a fairly large amount of energy in the plasma. After this paper had already been submitted, we became familiar with a work by Bickerton, Connor, Taylor [10]; they also put forward an idea of sustaining the current in a Tokamak by the diffusion-driven plasma.

### References

1. Wort D.J.H. // CLM-P. 1970. P. 236.
2. Ohkawa T. // Nucl. Fusion. 1970. V. 10. P. 185.
3. Galeev A.A., Sagdeev R.Z. // Soviet Physics JETP. 1968. V. 26. P. 233.
4. Kovrizhnykh L.M. // Soviet Physics JETP. 1969. V. 29. P. 475.
5. Galeev A.A., Sagdeev R.Z., Furth H.P., Rosenbluth M.N. // Phys. Rev. Letts. 1969. V. 22. P. 511.
6. Ware A.A. // Phys. Rev. Letts. 1970. V. 25. P. 916.
7. Galeev A.A. // Soviet Physics JETP. V. 32 (in press).
8. Rutherford P., Kovrizhnykh L., Rosenbluth M. // In Controlled Fusion and Plasma Physics. Proc. 4th Europ. Conf. Rome, 1970. V. 2.
9. Galeev A.A., Sagdeev R.Z. // JETP Letters. V. 13 (in press).
10. Bickerton R.J., Connor J.W., Taylor J.B. // Nature. 1971. V. 229. P. 110.

# ВЕЩЕСТВО В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ \*)

Рассматриваются физические свойства атомов, молекул и твердого тела в сверхсильном магнитном поле до  $10^{12} - 10^{13}$  Э на основе квантового «дрейфового» приближения. Показано, что сильно вытянутые вдоль магнитного поля атомы слипаются при низких температурах в полимерные молекулы и, соответственно, твердое тело должно иметь структуру полимера.

## 1. Введение

Согласно современным представлениям [1] в нейтронных звездах и на их поверхности могут существовать магнитные поля до  $10^{12} - 10^{14}$  Э. Такие поля должны сильно влиять на физические свойства вещества. В самом деле, взаимодействие атомных электронов с внешним магнитным полем становится больше их кулоновского взаимодействия, если магнитное поле превышает величину  $m^2 e^3 c \hbar^{-3} = 2,35 \cdot 10^9$  Э (в дальнейшем именно в этих единицах и будет измеряться магнитное поле  $B$ , а все остальные величины будут выражаться в атомных единицах). Поэтому при  $B \gg 1$  должна происходить полная перестройка электронных оболочек атома. В частности, у атома водорода при  $B \gg 1$  электронное облако принимает форму тонкой иглы, вытянутой вдоль магнитного поля [2–4]. У тяжелых атомов с атомным номером  $Z \gg 1$  сферическая симметрия сохраняется при  $B < Z^3$  [5], а затем при  $B > Z^3$  они также вытягиваются вдоль магнитного поля [6, 7]. Сильно вытянутые атомы обладают большим квадрупольным электрическим моментом, и при не очень высоких температурах действующие между ними силы притяжения должны приводить к образованию молекул [8] и их конденсации в твердую фазу.

В настоящей работе мы рассмотрим некоторые физические свойства вещества в сверхсильном магнитном поле, начиная с взаимодействия изолированных атомов и кончая основными характеристиками твердого тела.

## 2. Квантовое «дрейфовое» приближение

В очень сильном магнитном поле, т. е. (в единицах  $m^2 e^3 c \hbar^{-3}$ ) при  $B \gg 1$ , в невозбужденном состоянии все электроны должны находиться на самом нижнем уровне Ландау, а спиновые магнитные моменты повернуты по полю. Каждый электрон при этом совершает колебания вдоль  $\mathbf{B}$ , а в перпендикулярной к  $\mathbf{B}$  плоскости он движется в тонкой цилиндрической оболочке, ширина которой равна ларморовскому радиусу  $\sim 1/\sqrt{B}$ . В классической механике для описания такого движения в сильном магнитном и медленно меняющемся электрическом полях используется так называемое

---

\*) Кадомцев Б.Б., Кудрявцев В.С. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. Вып. 1. С. 144–152.

мое дрейфовое приближение. Естественно воспользоваться аналогичным приближением и в квантовом случае.

Уравнение Шредингера для электронов со спином  $1/2$  (в атомных единицах) имеет вид

$$\frac{(\mathbf{p} + \mathbf{A})^2}{2}\psi - \varphi\psi - \frac{B}{2}\psi = E\psi, \quad (1)$$

где  $\mathbf{p} = -i\nabla$ ,  $\varphi$  — потенциал электрического поля. Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  мы выберем в виде

$$\mathbf{A} = b\nabla\chi, \quad \mathbf{B} = [\nabla b\nabla\chi]; \quad (2)$$

ось  $z$  направлена вдоль  $\mathbf{B}$ .

Функции  $b(x, y)$  и  $\chi(x, y)$  будем считать не зависящими от  $z$ . Произвол в их выборе ограничен лишь вторым соотношением (2). Пользуясь этим, мы подберем величину  $b$  таким образом, чтобы линии  $b = \text{const}$  соответствовали линиям дрейфа электронов в перпендикулярной к  $\mathbf{B}$  плоскости. Кроме того, нормируем  $\chi$  так, чтобы она изменялась от 0 до  $2\pi$  (этого можно добиться введением новой функции  $b_1 = b_1(b)$  вместо  $b$ , постоянной на тех же линиях  $b = \text{const}$ ).

Пусть  $\psi = \psi_m = e^{-im\chi}\psi'$ , где  $\psi'(b, \chi)$  — периодическая функция  $\chi$ , а  $m$  — азимутальное квантовое число. Нетрудно проверить, что  $\psi'$  удовлетворяет тому же уравнению вида (1), с заменой  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - m\nabla\chi = (b - m)\nabla\chi$ .

Мы будем искать квазиклассическое решение с  $m \gg 1$ , локализованное вблизи  $b = m$  и медленно меняющееся по  $\chi$  вдоль линии  $b = m$ , так что  $\left|\frac{\partial\psi'}{\partial\chi}\right| \ll m|\psi'|$ . В соответствии с этим в уравнении (1) можно пренебречь производными от  $\psi'$  по  $\chi$ . Кроме того, в нулевом приближении разложения по  $1/B$  можно пренебречь малыми членами  $(1/2)p_z^2\psi' + \varphi\psi'$ , так что уравнение (1) для  $\psi'$  принимает вид

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}(\nabla b)^2 + i(\nabla b\nabla\chi)\left(\xi\frac{\partial\psi'}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\psi'\right) + \frac{1}{2}(\nabla\chi)^2\xi^2\psi' - \frac{B}{2}\psi' = E_0\psi', \quad (3)$$

где  $\xi = b - m$ ,  $B = [(\nabla b)^2(\nabla\chi)^2 - (\nabla b\nabla\chi)^2]^{1/2}$  и, кроме того, мы опустили малое слагаемое  $-\frac{1}{2}\frac{\partial\psi'}{\partial\xi}\Delta b$ . Уравнение (3) имеет решение

$$\psi' = \exp\left(-\frac{C\xi^2}{2}\right), \quad C = \frac{B - i(\nabla b\nabla\chi)}{(\nabla b)^2} \quad (4)$$

с собственным значением  $E_0 = 0$ . Это решение, как мы видим, соответствует волновой функции, локализованной вблизи линии  $b = m = \text{const}$  с шириной локализации по  $\xi$  порядка  $1/\sqrt{B}$ . Его можно интерпретировать как функцию, описывающую дрейф электрона вдоль линии  $b = m$  в перпендикулярной к  $\mathbf{B}$  плоскости.

Будем считать, что линии дрейфа  $b(x, y) = \text{const}$  замкнуты, тогда эти замкнутые линии дрейфа образуют некоторое семейство вложенных друг в друга линий.

Пусть вблизи центра ( $b = 0$ ) линии  $b = \text{const}$  близки к окружностям, так что при малых  $b$  функции  $\sqrt{2b/B}$ ,  $\chi$  совпадают с цилиндрическими

координатами  $\rho, \vartheta$ . Тогда при небольших  $m$  волновые функции будут близки к функциям с постоянным угловым моментом  $\psi_m = \rho^m \exp(-B\rho^2/2)$ . При достаточно больших  $m$  эти функции близки к  $\exp[-B(\rho - m)^2/2]$  и, как мы видим, переходят в квазиклассические функции (4) с  $(\nabla b \nabla \chi) = 0$ .

Таким образом, для достаточно широкого класса функций  $b$ , совпадающих с  $B\rho^2/2$  при малых  $b$  и плавно меняющихся на больших расстояниях, волновые функции можно выбрать в виде «дрейфовых оболочек». Все эти функции имеют в нулевом приближении одно и то же собственное значение  $E_0 = 0$ .

Найденные функции приближенно ортогональны друг другу: при большой разности  $m - m'$  они просто не перекрываются по  $b$ , а при небольших  $m - m'$  их зависимости от  $b$  близки и они ортогональны за счет угловых частей  $e^{-im\chi}$ .

Так как уровень  $E_0$  бесконечно-кратно вырожден, то для получения следующего приближения необходимо решить секулярное уравнение. Выберем функцию  $b$  таким образом, чтобы в секулярном уравнении остались только диагональные члены, тогда оно примет вид

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_{ml}}{\partial z^2} - \varphi_m \psi_{ml} = E_{ml} \psi_{ml}, \quad (5)$$

где  $\varphi_m$  представляет собой потенциал электрического поля, усредненный с  $m$ -й волновой функцией от переменных  $b, \chi$ , а функция  $\psi_{ml}$  здесь зависит только от  $z$ ;  $l$  — соответствует продольному квантовому числу.

Теперь нетрудно видеть, как следует выбирать функцию  $b$ . Поскольку согласно (5) гамильтониан продольного движения в функциях  $\psi_{ml}$  диагонален, то это значит, что для квазиклассических функций с  $m \gg 1$  значение  $E_{ml}$  вдоль дрейфовой оболочки  $b = \text{const}$  остается постоянным.

Другими словами, для каждого  $l$  функции  $b$  выбираются из условия постоянства собственного значения энергии продольного движения  $E_{ml}$  как функции  $x, y$ .

Это условие аналогично условию сохранения продольного адиабатического инварианта, определяющего дрейфовые оболочки в классическом случае. Сходный смысл имеет условие диагонализации гамильтониана и в случае небольших  $m$ .

Приведенные здесь рассуждения преимущественно относятся к предпологаемому случаю отсутствия осевой симметрии. При наличии же такой симметрии вся картина гораздо проще, так как при этом  $b = \rho^2/2$ , и радиальная зависимость  $\psi_m$  точно известна.

Заметим, что соотношение  $\mathbf{B} = [\nabla b \nabla \chi]$  означает, что якобиан преобразования от переменных  $b, \chi$  к переменным  $x, y$  равен  $B$ . Отсюда следует, что  $2\pi b = BS$ , где  $S$  — площадь, ограниченная кривой  $b = \text{const}$ . Таким образом, можно сказать, что при дрейфовом движении квантуется площадь: при переходе от одного азимутального уровня  $m$  к другому площадь возрастает на величину  $S_0 = 2\pi/B$ .

Этого и следовало ожидать по принципу соответствия, поскольку в классическом случае площадь  $S$  при  $B = \text{const}$  отвечает третьему адиабатическому инварианту. Поэтому, при взаимодействии вытянутых атомов ( $B \gg Z^3$ ) с внешними полями и другими атомами площадь их поперечного сечения остается постоянной и меняется только его форма.



### 3. Атомы в сверхсильном магнитном поле

Многоэлектронные атомы в сверхсильном магнитном поле рассматривались в работах [5–7]. Было показано, что при  $B < Z^3$  на каждом  $m$ -уровне в основном состоянии находятся несколько электронов, и для описания основного состояния может быть использована модифицированная модель Томаса–Ферми. В этом приближении атом сохраняет сферическую симметрию, а его характерный радиус изменяется, как  $Z^{1/5} B^{-2/5}$ . При  $B > Z^3$  на каждом  $m$ -уровне остается только один электрон, и при  $B \gg Z^3$  атомы сильно вытягиваются вдоль магнитного поля, принимая форму иглы радиуса  $\rho_z = \sqrt{2Z/B}$ . При этом все электроны находятся на основном уровне продольного движения, глубина которого неограниченно возрастает с увеличением магнитного поля и при  $B \gg Z^3$  становится значительно больше энергии кулоновского взаимодействия на среднем расстоянии от ядра. При этом волновая функция может быть аппроксимирована экспонентой  $\psi = \exp(-\alpha|z|)$ , а энергия связи атома после минимизации по  $\alpha$  в пренебрежении обменной поправкой оказывается равной

$$E_\alpha = -\frac{9}{8} Z^3 L^2, \quad L = \ln \frac{1}{\alpha \rho_z} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{B}{Z^3}. \quad (6)$$

Это выражение можно записать в виде  $E_\alpha = Z\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — средняя энергия связи одного электрона, которая фактически соответствует энергии связи электрона на периферии, т. е. при  $\rho = \rho_z = \sqrt{2Z/B}$ , так как при усреднении именно эти электроны дают основной вклад.

Выражение (6) определяет энергию покоящегося атома. Для атома, движущегося со скоростью  $\mathbf{V}$ , к выражению (6) мы должны добавить кинетическую энергию  $MV^2/2$  ( $M$  — масса атома, практически совпадающая с массой ядра) и потенциальную энергию деформации электронной оболочки движущегося атома. Эту энергию можно найти, учитывая особенность рассмотренного выше дрейфового движения электронов.

В самом деле, если мы перейдем в систему координат, движущуюся вместе с атомом вдоль оси  $x$ , то в этой системе имеется поперечное электрическое поле  $E_y = -V_\perp B$ , наличие которого приводит к такому смещению дрейфовых поверхностей, чтобы энергия на дрейфовой линии была постоянной.

Таким образом, при малом  $V_\perp$  смещение  $\xi$  по радиусу находится из условия

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \xi - V_\perp B \rho \sin \vartheta = 0. \quad (7)$$

Так как на каждый электрон по-прежнему приходится поперечная площадь  $S_0 = 2\pi/B$ , то смещение поперек  $\mathbf{V}$  несжимаемо и при этом энергия всех внутренних электронов не меняется — все изменение энергии происходит за счет поверхностных электронов, которые отодвигаются дальше от ядра.

Это изменение равно

$$\delta E = \frac{1}{S_0} \int \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \frac{\xi^2}{2} \right)_{\rho=\rho_z} \rho d\vartheta, \quad (8)$$

где  $1/S_0$  — плотность электронов. Подставляя сюда  $\xi$  из (7) и учитывая,

что

$$\varepsilon = -\frac{9}{8} Z^2 L^2, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = \varepsilon \frac{2}{L\rho}, \quad \rho_z^2 = \frac{2Z}{B},$$

получаем,  $\delta E = (4/9)BV_{\perp}^2/L$ , так что полная энергия равна

$$E = E_a + \frac{MV^2}{2} + \frac{M_0 V_{\perp}^2}{2}, \quad M_0 = \frac{8}{9} \frac{B}{L}. \quad (9)$$

При больших  $B$  величина  $M_0$  может быть сравнима с  $M$ , и, следовательно, появляется заметная анизотропия эффективной массы атома:  $M_{\parallel}^* = M$ ,  $M_{\perp}^* = M + M_0$ . Величина  $M_0$  для водородоподобного атома (экситона Мотта) была определена в работе [9]. В наших обозначениях она равна  $M_0 = B/(2L)$ . Это выражение лишь численным множителем отличается от (9), и может быть получено из (8) при подстановке в него значения  $\varepsilon = -2L^2$  для атома водорода.

#### 4. Взаимодействие атомов; молекулы

Сильно вытянутые атомы при  $B \gg Z^3$  обладают большим электрическим квадрупольным моментом и поэтому должны сильно взаимодействовать между собой. На большом расстоянии  $r$  два атома взаимодействуют просто как два квадруполья, жестко ориентированные вдоль магнитного поля. При распределении электронной плотности  $n \propto \exp(-2\alpha|x|)$  квадрупольный момент атома равен  $Q_{zz} = 2\langle z^2 \rangle = \alpha^{-2}$  и энергия взаимодействия  $U$  при  $\alpha r \gg 1$  равна

$$U = \frac{9Z^2}{2\alpha^4 r^5} P_4(\cos \theta), \quad (10)$$

где  $\theta$  — угол между направлением магнитного поля и вектором, соединяющим центры двух атомов,  $P_4(x) = (1/8)(35x^4 - 30x^2 + 3)$  — полином Лежандра.

Потенциал (10) является монотонной функцией от  $r$ , поэтому знак силы взаимодействия определяется знаком полинома  $P_4$ : при  $P_4 > 0$  атомы отталкиваются, а при  $P_4 < 0$  — притягиваются. Соответственно, при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  происходит отталкивание, а притяжение имеет место в некотором интервале углов вблизи  $\theta = 49^\circ$ , где  $\cos^2 \theta = 3/7$  и  $P_4$  имеет минимум.

При  $\alpha r \leq 1$  энергия взаимодействия игольчатых атомов с жестко фиксированной погонной электронной плотностью порядка  $\exp(-2\alpha|z|)$  мо-

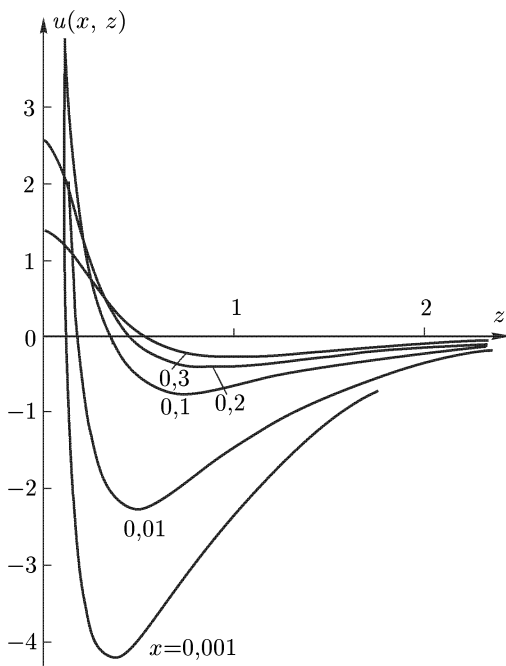


Рис. 1

жет быть найдена численно. Потенциал  $U$  можно представить в виде  $U = Z^2 \alpha u(x, z)$ , где  $x, z$  — безразмерные компоненты вектора, соединяющего центры атомов, т. е.  $x = \alpha a, z = \alpha c$ , где  $a$  — расстояние между осями атомов, а  $c$  — расстояние между ядрами вдоль поля  $\mathbf{B}$ . Потенциал  $u(x, z)$  как функция от  $z$  для нескольких значений  $x$  изображен на рис. 1. Видно, что  $u(x, z)$  при фиксированном  $x$  имеет минимум  $u_m(x)$ , величина которого как функция от  $x$  изображена на рис. 2. Как видно,  $u_m \sim 1$ , а поскольку  $\alpha \sim 1/(ZL)$ , то энергия взаимодействия  $U$  всего лишь в  $L$  раз меньше полной энергии связи каждого из атомов.

Так как  $u_m(x)$  является монотонной функцией  $x$ , взаимодействующие атомы будут сближаться вплоть до соприкосновения. При дальнейшем поперечном движении ядер к одной и той же силовой линии будет происходить обобществление электронов на внешних оболочках, дрейфовые траектории которых будут охватывать оба ядра. Можно сказать, что эти электроны «выдавливаются» с более внутренних оболочек, поскольку поперек магнитного поля электронное облако является несжимаемым. Этот эффект, приводящий к некоторому удалению в среднем электронов от ядер и повышению потенциальной энергии, эквивалентен появлению сил отталкивания при соприкосновении атомов. Если  $L$  не велико, так что соприкосновение начинается при достаточно больших  $x$ , когда согласно рисункам 1, 2 величина  $U$  мала, то из двух слепившихся атомов образуется молекула с малым количеством обобществленных электронов. Напротив, при больших  $L$  образуется своего рода сверхмолекула, в которой все электроны обобществляются и образуют единое иглообразное облачко, по оси которого располагаются ядра [8]. В очень сильном поле такие сверхмолекулы могут образовываться из нескольких, скажем  $n$ , атомов, при этом ядра располагаются на некотором расстоянии  $R$  друг от друга вдоль одной силовой линии. Рассмотрим сначала именно такие молекулы.

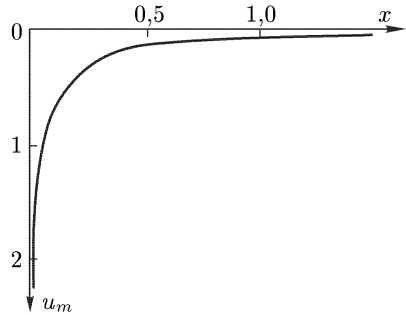


Рис. 2

Радиус электронного облака в такой молекуле равен, очевидно,  $\rho_n Z = \sqrt{2nZ/B}$ . В очень сильном магнитном поле, когда молекула становится весьма тонкой, а движение электронов практически одномерным, волновая функция продольного движения будет соответствовать связанному состоянию в потенциале вида суперпозиции одномерных  $\delta$ -функций в точках расположения ядер. Снаружи от ядер эта функция имеет вид  $\exp(-\alpha|z|)$ , а между ядрами —  $\text{ch } \alpha z$ . Но если ядра находятся достаточно близко друг к другу, так что  $\alpha R \ll 1$ , то «провалом» функции  $\psi$  между ядрами можно пренебречь и положить  $\psi = \text{const}$ . Если приближенно принять  $\alpha$  одинаковым для всех электронов, то соответствующая погонная электронная плотность  $\lambda$  имеет вид  $\lambda = nZ\beta \exp(-\alpha|Z|)$  снаружи от ядер и  $\lambda = nZ\beta = \text{const}$  между ядрами.

Из условия нормировки следует, что  $\beta R(n-1) + \beta/\alpha = 1$ . В этом приближении с логарифмической точностью энергия  $nE_n$  для  $n$ -атомной молекулы ( $E_n$  — энергия, отнесенная к одному атому) в пренебрежении обменной

поправкой определяется выражением

$$nE_n = nZ \left\{ \frac{\alpha\beta}{2} - 2nZL_n\beta - \frac{1}{2} nZL_n\beta + \frac{1}{2} (n-1)nZ\beta^2 R \right\} + n f_n \frac{Z^2}{R}, \quad (11)$$

где

$$L_n = \ln \frac{1}{\beta \rho_{nz}}, \quad f_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках в (11) представляет собой кинетическую энергию электронов, второе — энергию взаимодействия электронов с ядрами, а два последних — энергию кулоновского взаимодействия электронов между собой. Последнее слагаемое в (11) соответствует энергии взаимодействия ядер. Величины  $\beta$  и  $R$  в (11) следует считать свободными параметрами, которые должны быть определены из условия минимума  $E_n$ . Так как минимум по  $\beta$  достигается при  $\beta \sim nZ$ , то с логарифмической точностью имеем  $L_n \approx \frac{1}{2} \ln \frac{B}{(nZ)^3}$ . С этой же точностью при минимизации (11) по  $\beta$  и  $R$  величину  $L_n$  можно считать постоянной.

В переменных  $\xi = \beta R(n-1)$ ,  $\eta = \beta/(nZL_n)$  выражение для  $E_n$  приводится к более простому виду

$$E_n = \frac{1}{2} n^2 Z^2 \left\{ \frac{\eta^2}{1-\xi} - 3\eta + \xi\eta + A_n \frac{\xi}{\eta} \right\}, \quad (12)$$

где  $A_n = 2f_n(n-1)/(nL_n)$ . Отсюда следует, что минимальное по  $\xi$ ,  $\eta$  значение  $E_n$  имеет вид  $E_n = -n^2 Z^2 L_n^2 F(A_n)$ , где функция от одной переменной  $F(A_n)$  легко находится минимизацией (12). Эта функция убывает с ростом  $A_n$ , т. е. энергия молекулы  $E_n$  возрастает по абсолютной величине с увеличением магнитного поля быстрее, чем  $L_n^2$ , и при увеличении  $B$  становится выгодным образование все более и более крупных молекул. Однако поскольку зависимость от  $B$  логарифмическая, соответствующие значения магнитного поля оказываются очень большими. А именно, расчет показывает, что  $E_2 < E_1$  только при  $L \equiv (1/2) \ln(B/Z^3) > 5$ ;  $E_3 < E_2$  при  $L > 6$ , т. е. образование двухатомных, а тем более, трех- и многоатомных молекул с полностью обобществленными электронами происходит лишь при очень больших  $B$ .

Отсюда следует, что при  $B \gg Z^3$ , но при не слишком больших значениях магнитного поля образование молекул должно происходить путем «прилипания» атомов друг к другу с сохранением их «индивидуальности». Энергия слипания двух атомов в молекулу определяется величиной  $u_m$ . Если к такой двухатомной молекуле поднести третий атом, то он присоединится к ней примерно с той же энергией связи, поскольку  $u(x, z)$  довольно быстро убывает с увеличением  $z$ . При этом, поскольку при малых  $z$  атомы отталкиваются (см. рис. 1), то третий атом присоединится к внешней стороне молекулы (вдоль магнитного поля). Аналогичным образом последующие атомы будут присоединяться к концам молекул, так что при большом числе атомов будет образовываться полимерная нить. Энергия связи отдельного атома в такой нити имеет порядок величины  $u_m$ , т. е. она всего лишь в  $L$  раз меньше полной энергии связи изолированного атома.

## 5. Твердое тело

При достаточно низких температурах силы притяжения между атомами вследствие наличия у них большого квадрупольного электрического момента должны приводить к их конденсации в твердое тело. На первый взгляд кажется, что при конденсации сильно вытянутых вдоль магнитного поля «игольчатых» атомов ничто не мешает им быть уложенными вплотную друг к другу. При этом электроны должны заполнять все пространство с более или менее однородной плотностью, а погруженные в электронную жидкость ядра в силу их кулоновского отталкивания должны образовывать структуру кристаллической решетки типа плотной упаковки. Очевидно, что при такой конденсации среднее расстояние между ядрами оказывается значительно меньше длины изолированных атомов, из которых образовалось твердое вещество. При этом характерная де-Бройлевская длина волны продольного движения электронов должна быть много больше среднего расстояния между ядрами.

Другими словами, в отношении продольного движения мы имеем как бы сильно сжатое вещество. При этом в блоховских функциях продольного движения  $\psi_k = v_k(z)e^{ikz}$  в силу малости волнового числа  $k$  в качестве периодической функции  $v_k(z)$  можно приближенно принять функцию  $v_0(z)$ , соответствующую  $k = 0$ . При этом часть кинетической энергии электронов, соответствующая экспоненциальному фактору  $e^{ikz}$ , определяется как для свободного электронного газа и равна  $\varepsilon = \langle p_z^2/2 \rangle = (2/3)\pi^2 N_{\max}^2$ , где  $N_{\max}$  — граничное число заполнения уровней продольного движения на единице длины.

Учтем теперь, что в сверхсильном магнитном поле в основном состоянии все электроны находятся на нижнем уровне Ландау и каждому состоянию соответствует площадка в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, равная  $S_0 = 2\pi/B$ .

Поскольку в каждом из возможных состояний находится только по одному электрону (все спины повернуты против поля), то  $N_{\max} = Zn/S_0 = 2\pi Zn/B$ , где  $n$  — плотность ядер, а  $nZ$  — плотность электронов. В этом приближении и в предположении, что на элементарную ячейку приходится одно ядро, полная энергия  $E$ , отнесенная к одному атому, определяется выражением

$$E = \frac{8\pi^4 Z^3 n^2}{3B^2} + Z \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial z} \right)^2 d\mathbf{r} + \frac{Z}{2} \varphi_i - \frac{Z-1}{2} \int_{\Omega} \varphi v_0^2 d\mathbf{r}, \quad (13)$$

где интегрирование производится по объему элементарной ячейки  $\Omega$ ;  $\varphi$  — потенциал электрического поля;  $\varphi_i$  — потенциал в точке ядра, создаваемый всеми зарядами, кроме данного ядра; функция  $v_0^2$  — нормирована на единицу.

В выражении (13) второе слагаемое соответствует кинетической энергии продольного движения. Обменным взаимодействием мы пренебрегли, считая, что  $Z \gg 1$ . С этой же точностью в последнем слагаемом можно заменить  $Z - 1$  на  $Z$ .

Первое слагаемое в (13) пропорционально  $n^2$ , а второе и два последних при фиксированной конфигурации распределения зарядов пропорциональны соответственно  $n^{2/3}$  и  $n^{1/3}$ , т. е. они значительно слабее зависят от  $n$ .

Поэтому приближенно минимум  $E$  по  $v_0$  можно искать при фиксированном  $n$ , так что для минимального по  $n$  значения  $E$  имеем

$$E = \frac{8\pi^4 Z^3 n^2}{3B^2} - AZ^2 n^{1/3}. \quad (14)$$

Здесь  $A$  — некоторая константа порядка единицы, очень слабо зависящая от  $n$ , так что минимум (14) по  $n$  можно искать при постоянном  $A$ . Из условия  $\frac{\partial E}{\partial n} = 0$  находим минимальное значение  $E$ :

$$E = -\frac{5}{6} \left( \frac{B\sqrt{A}}{4\pi^2 Z^3} \right)^{2/5} A z^3. \quad (15)$$

Величину  $A$  можно приближенно оценить, заменяя элементарную ячейку на шар радиуса  $R = [3/(4\pi n)]^{1/3}$  и выбирая функцию  $v_0$  сферически симметричной,  $v_0 = v_0(r)$ . Для простейшей пробной функции  $v_0 = \text{const}$ , соответствующей свободному электронному газу, величина  $A$  равна  $\frac{9}{10} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} = 1,45$ . В действительности же электронная плотность должна быть несколько большей около ядер, т. е.  $v_0$  должна быть убывающей функцией  $r$ . Однако даже сильно убывающая с  $r$  пробная функция вида  $v_0 = \text{const} \cdot (1 - r/R)$ , соответствующая равной нулю электронной плотности на границе ячейки, увеличивает константу  $A$  всего лишь на несколько процентов при значении  $B = Z^3$  и не изменяет ее величины при  $B = 2Z^3$ . При  $B > 2Z^3$  приближение свободных электронов,  $v_0 = \text{const}$ , должно выполняться еще лучше, так что при всех  $B > Z^3$  энергия связи твердого тела в предположении плотной упаковки достаточно точно дается выражением (15) с  $A = 1,45$ .

Но отсюда сразу можно сделать вывод, что в действительности плотная упаковка в несжатом веществе достигаться не будет. В самом деле, как нетрудно проверить, величина (15) при  $A = 1,45$  лежит выше энергии связи двухатомной молекулы с полностью коллективизированными электронами  $E_2 \approx \frac{9}{2} Z^3 L_2^2$ , где  $L_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{B}{2^3}$ , и сравнивается с  $E_2$  лишь при нереально больших значениях магнитного поля  $\frac{B}{Z^3} \sim 10^7$ . Таким образом, плотная упаковка энергетически невыгодна даже по сравнению с газом двухатомных молекул, и тем более она невыгодна по сравнению с полимерными нитями.

Более естественным представляется образование твердого тела путем слипания полимерных молекул. Энергию связи такого слипания оценить довольно трудно, но, по-видимому, она значительно меньше энергии связи отдельного атома в молекуле.

Таким образом, при нагревании вещества следует ожидать в первую очередь разрыва связей между полимерными молекулами, затем наряду с разрывом молекул на части и укорочением их средней длины будет происходить возбуждение электронных  $m$ -уровней с энергией порядка  $ZL$  и лишь в последнюю очередь будет происходить ионизация и диссоциация молекул на атомы с энергией диссипации  $\sim Z^3 L$ .

## Заключение

Итак, проведенное выше полуколичественное рассмотрение показало, что в сверхсильном магнитном поле происходит существенное изменение физических свойств вещества. Прежде всего, сокращаются размеры атомов и увеличиваются энергия связи и потенциалы ионизации. При  $B \gg Z^3$  атомы сильно вытягиваются вдоль магнитного поля и начинают сильно взаимодействовать между собой, слипаясь в длинные полимерные молекулы.

При достаточно низких температурах эти молекулы могут конденсироваться в твердое тело так, что структура твердого тела должна иметь характер полимера; оценки показывают, что обычная кристаллическая решетка с плотной упаковкой оказывается энергетически невыгодной. Кроме рассмотренного здесь нами основного состояния представляет интерес рассмотреть возбужденные атомы и молекулы.

### Список литературы

1. Гинзбург В.Л., Железняков В.В., Зайцев В.В. // УФН. 1969. Т. 98 С. 201.
2. Elliott R.J., Loudon R. // J. Phys. Chem. Sol. 1961. V. 21. P. 179.
3. Haines L., Roberts D. // Amer. J. Phys. 1969. V. 37. P. 1145.
4. Монозон Б.С., Жилич А.Г. // ФТТ. 1966. Т. 8. С. 3559; ФТП. 1967. Т. 1. С. 673.
5. Кадомцев Б.Б. // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 1765.
6. Cohen R., Lodenguai J., Ruderman M. // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 25. P. 467.
7. Кадомцев Б.Б., Кудрявцев В.С. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 61.
8. Кадомцев Б.Б., Кудрявцев В.С. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 15.
9. Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 717.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВИНТОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ \*)

Винтовая неустойчивость хорошо проводящего шнура с током в сильном магнитном поле рассматривается в общем виде без ограничения линейным приближением. Показано, что винтовые возмущения должны перерасти в «пузыри» — внедряющиеся под поверхность плазменного шнура винтовые жгуты, свободные от плазмы. Обсуждается связь этого процесса с так называемой дизруптивной неустойчивостью.

### 1. Введение

Винтовая неустойчивость плазменного шнура с током в продольном магнитном поле была самой первой из исследованных теоретически [1, 2] и именно ее стабилизация сильным продольным полем лежит в основе систем типа Токамак [3]. Продольное поле выбирается настолько сильным, чтобы не достигался так называемый предел Крускала–Шафранова. Другими словами, величина  $q = rB_0/(RB_\theta)$  подбирается больше единицы ( $B_0$  — продольное поле,  $B_\theta$  — азимутальное,  $R$  — большой радиус тора,  $r$  — расстояние от магнитной оси). Хотя обычно величина  $q$  выбирается с большим запасом и основная мода винтовой неустойчивости  $m = 1$  стабилизирована, в шнуре, и особенно на его границе, могут развиваться более слабые высшие моды. В частности, существует мнение [4, 5], что именно с развитием винтовых возмущений связана очень неприятная так называемая «дизруптивная» неустойчивость, которая проявляется в виде резких выбросов вниз на кривых напряжения обхода, что соответствует небольшому, но быстрому скачку самоиндукции плазменного шнура, отвечающему его резкому расширению. В момент неустойчивости непосредственно регистрируются увеличение радиуса шнура и его касание с диафрагмой. Однако рассмотрение винтовой неустойчивости в квазилинейном приближении [6] не позволило получить «пички» напряжения нужного знака, по крайней мере в простом варианте без учета малого эффекта тороидальности. Вопрос о том, является ли это дефектом только квазилинейного приближения или соответствует ошибочности идеи о связи дизруптивной неустойчивости с винтовой, остается открытым. Ясно, что ответить на этот вопрос можно только при более детальном исследовании нелинейных винтовых возмущений без использования квазилинейного приближения. Исследование винтовых возмущений большой амплитуды представляет интерес и с точки зрения оценки опасности винтовой неустойчивости, когда

\*) Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. Вып. 2(8). С. 575–589.



она предсказывается линейной теорией. Изучению эволюции нелинейных винтовых возмущений плазменного шнура с током в сильном продольном магнитном поле и посвящена настоящая работа.

## 2. Основные уравнения

Как известно, винтовая неустойчивость мало чувствительна к величине давления плазмы (поскольку ее причина — продольный ток, а не давление плазмы) и к тороидальному искривлению шнура. Поэтому мы сразу воспользуемся некоторой упрощенной моделью, а именно рассмотрим прямой плазменный шнур радиуса  $a$ , находящийся внутри идеально проводящего кожуха радиуса  $b$ . Плазму будем считать идеально проводящим газом с пренебрежимо малым газокINETическим давлением. Область между плазмой и кожухом считаем вакуумом. Шнур считаем неограниченным по длине, но предположим, что все возмущения обладают продольным периодом  $L = 2\pi R$ , что имитирует тороидальный шнур с большим радиусом  $R$ . Мы предположим, что продольное поле  $B_0$  значительно больше азимутального поля  $B_\theta$ , которое создается продольным током. Именно такая ситуация имеет место в токамаках. Как известно, при винтовой неустойчивости наибольший интерес представляют возмущения, которые медленно меняются вдоль силовых линий. Следовательно, нам достаточно рассмотреть возмущения, медленно меняющиеся вдоль  $z$  — продольной координаты цилиндрической системы координат  $r, \theta, z$ . У таких возмущений  $z$ -компонента скорости мала, так что приближенно можно считать, что в каждом поперечном сечении движение плоское, т. е. достаточно рассмотреть лишь поперечную компоненту скорости  $\mathbf{v}_\perp$ . Пользуясь условием  $B_\perp/B_0 \ll 1$ , постараемся упростить уравнение движения идеальной магнитной гидродинамики:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B} \mathbf{B}] = -\nabla_\perp \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B^2}{4\pi} (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h}, \quad (1)$$

где  $\nabla_\perp = \nabla - \mathbf{h}(\mathbf{h}\nabla)$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ ,  $\rho$  — плотность.

Учтем теперь, что продольное поле почти однородно, т. е. его малое отклонение от однородности  $B'_z$  имеет порядок величины  $B_\perp^2/B_0$ . Соответственно величину  $B^2$  в (1) можно записать в виде  $B_0^2 + 2B_0B'_z + B_\perp^2$ , пренебрегая  $B_z'^2$ , мы будем удерживать только величины первого порядка по  $B_\perp/B_0$ ; так, с этой точностью под  $\nabla_\perp$  в (1) можно понимать просто градиент в плоскости  $z = \text{const}$ . Величина  $\mathbf{h}$  с точностью до малых первого порядка по  $B_\perp/B_0$  равна  $\mathbf{h} = \mathbf{e}_z + \mathbf{B}_\perp/B_0$ , величину  $\partial/\partial z$  мы также должны считать малой величиной порядка  $(B_\perp/B_0)\nabla$ . Соответственно, в пренебрежении малыми величинами порядка  $B_\perp/B_0$  и выше и с учетом  $B_0 = \text{const}$  уравнение (1) принимает вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla_\perp \left( \frac{2B_0B'_z + B_\perp^2}{8\pi} \right) + \frac{B_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{B}_\perp + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_\perp \nabla) \mathbf{B}_\perp. \quad (2)$$

Из этого уравнения отчетливо видно, что течение со скоростью  $\mathbf{v}$  можно считать плоским, поскольку все силы в правой части (2) расположены в плоскости  $z = \text{const}$ .

Рассмотрим теперь уравнение вмороженности магнитного поля в плазму

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vB}]. \quad (3)$$

Полагая  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{B}_\perp$  и считая  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp$ , можно преобразовать (3) к виду

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -B_0 \mathbf{e}_z \text{div} \mathbf{v} + B_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \text{rot} [\mathbf{vB}_\perp]. \quad (4)$$

Из  $z$ -компоненты этого уравнения имеем

$$\text{div} \mathbf{v} = -B_0^{-1} \frac{\partial B'_z}{\partial t},$$

но величина в правой части имеет порядок  $B_\perp^2/B_0^2$ , т. е. мы должны ею пренебречь. Следовательно, поперечное течение плазмы несжимаемо:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5)$$

Далее, в уравнении  $\text{div} \mathbf{B} = \text{div} \mathbf{B}_\perp + \partial B'_z/\partial z = 0$  следует пренебречь малой величиной  $B'_z$ , так что имеем

$$\text{div} \mathbf{B}_\perp = 0. \quad (6)$$

Перейдем теперь к рассмотрению винтовых течений, т. е. будем считать, что все рассматриваемые нами компоненты векторных величин  $v_r$ ,  $v_\theta$ ,  $B_r$ ,  $B_\theta$  и  $\rho$  зависят только от двух переменных  $r$ ,  $\theta - \alpha z$ . Другими словами, положим  $\partial/\partial z = -\alpha \partial'/\partial \theta$ , где штрихом мы отметили, что дифференцируются только компоненты векторов, но не орты  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_r$ . Тогда уравнения (2), (4) примут вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla_\perp \left( \frac{2B_0 B'_z + B_\perp^2}{8\pi} \right) - \frac{B_0}{4\pi} \alpha \frac{\partial' \mathbf{B}_\perp}{\partial \theta} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_\perp \nabla) \mathbf{B}_\perp, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial t} = -\alpha B_0 \frac{\partial' \mathbf{v}}{\partial \theta} + \text{rot} [\mathbf{vB}_\perp]. \quad (8)$$

Введем в рассмотрение вспомогательное поперечное поле

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{B}_\perp - \alpha r B_0 \mathbf{e}_\theta. \quad (9)$$

Тогда, как нетрудно проверить, уравнение (8) с учетом  $\text{div} \mathbf{v} = 0$  можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{B}_*}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vB}_*], \quad (10)$$

т. е. оно имеет вид условия вмороженности двумерного поля  $\mathbf{B}_*$  в плазму, совершающую плоское движение со скоростью  $\mathbf{v}$ . С учетом (6) имеем

$$\text{div} \mathbf{B}_* = 0, \quad (11)$$

откуда следует, что можно ввести в рассмотрение функцию потока

$$\mathbf{B}_* = [\mathbf{e}_z \nabla \psi] \quad (12)$$

и при этом уравнение (10) принимает вид

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \psi = 0, \quad (13)$$

т. е. оно показывает, что поток  $\psi$  переносится вместе с плазмой. В частности, если мы условимся считать, что на невозмущенной поверхности плазмы  $\psi = 0$ , то это условие будет сохраняться при любых винтовых движениях плазмы.

Это же самое условие  $\psi = \text{const}$  на границе можно получить и из соотношения  $\mathbf{Bn} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к границе плазмы. В самом деле, с учетом винтовой симметрии с точностью до малых первого порядка имеем

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\nabla_{\perp} F + \mathbf{e}_z \partial F / \partial z}{|\nabla_{\perp} F|} = n_{\perp} - \alpha r n_{\theta} \mathbf{e}_z,$$

где  $F = \text{const}$  — уравнение границы,  $\mathbf{n}_{\perp}$  — поперечная составляющая нормали. Отсюда получаем  $\mathbf{nB} = \mathbf{n}_{\perp} \mathbf{B}_{\perp} - \alpha r B_0 n_{\theta} = \mathbf{B}_* \mathbf{n}_{\perp} = 0$ . Другими словами,  $\mathbf{B}_*$  направлено по касательной к границе плазмы, и, следовательно,  $\psi = \text{const}$  на границе.

Обратимся теперь к уравнению (7). Заметим, прежде всего, что величина

$$\frac{\partial' \mathbf{B}_{\perp}}{\partial \theta} = \frac{\partial' \mathbf{B}_*}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \mathbf{e}_r + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \mathbf{e}_{\theta}.$$

С учетом этого нетрудно проверить, что уравнение (7) может быть приведено к виду

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla P = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_* \nabla) \mathbf{B}_*, \quad (14)$$

где величина

$$P = \frac{1}{8\pi} (2B_0 B'_z + B_{\perp}^2 + 4\alpha^2 r^2 B_0^2) + \frac{\alpha B_0}{2\pi} \psi$$

играет роль давления.

Таким образом, задача о движении плазмы приведена к двумерному течению идеально проводящей несжимаемой жидкости с замороженным в нее полем  $\mathbf{B}_*$ . Основными уравнениями для внутренней части шнура являются (10), (11), (5), (14).

Перейдем теперь к вакуумной области вне шнура. Здесь также  $B'_z$  пренебрежимо мало, так что  $\text{div} \mathbf{B}_{\perp} = 0$ . Соответственно снаружи от плазмы также можно ввести вспомогательное поле  $\mathbf{B}_*$  и функцию тока  $\psi$ :

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{B}_{\perp} - \alpha r B_0 \mathbf{e}_{\theta}, \quad \mathbf{B}_* = [\mathbf{e}_z \nabla \psi]. \quad (15)$$

Так как в вакууме  $\text{rot} \mathbf{B}_{\perp} = 0$ , то

$$\text{rot}_z \mathbf{B}_* = \Delta \psi = -2\alpha B_0. \quad (16)$$

Поскольку на наружной границе плазмы  $\mathbf{Bn} = 0$ , то мы опять имеем  $\psi = \text{const}$  на границе плазмы. Без ограничения общности можно положить  $\psi = 0$  на границе плазмы, так чтобы  $\psi$  было непрерывно на границе плазмы. На проводящем кожухе  $\mathbf{B}$  также не имеет нормальной составляющей и  $\psi = \psi_b = \text{const}$  при  $r = b$ . (Но  $\psi_b$  может зависеть от времени.)

Для  $\psi$  мы рассмотрим два варианта граничных задач. Если считать кожух идеально проводящим и замкнутым, то

$$\text{а) } \psi_b(t) = \psi_b(0), \quad (17)$$

т. е. величина  $\psi_b$  на кожухе все время должна сохранять свое начальное значение, что соответствует постоянному магнитному потоку снаружи от плазмы.

Однако обычно в экспериментах на токамаках осуществляются условия постоянства полного тока, протекающего по плазме. При этом магнитный поток в области между плазмой и кожухом не постоянен — он может вводиться снаружи через разрез в кожухе. Условие постоянства тока  $I$  означает

$$\oint \mathbf{B}_{\perp e} dl = \frac{4\pi}{c} I = \text{const},$$

где интеграл берется по любому контуру, охватывающему плазменный шнур. Если в качестве контура взять границу плазмы, то можно получить граничное условие для  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$  — производной по наружной нормали к границе плазмы:

$$\text{б) } \oint_p \frac{\partial\psi}{\partial n} dl = \oint_p \mathbf{B}_{\perp} dl - \oint_p \alpha r B_0 \mathbf{e}_{\theta} dl = \frac{4\pi}{c} I - 2\alpha S_p B_0 = \frac{4\pi}{c} I - 2\pi\alpha a^2 B_0, \quad (18)$$

где  $S_p$  — площадь поперечного сечения плазмы, равная  $\pi a^2$  при любых несжимаемых деформациях, а значок  $p$  под интегралом означает интегрирование на границе плазмы.

То же самое условие для контура вдоль границы кожуха имеет вид

$$\text{б') } \oint_b \frac{\partial\psi}{\partial n} dl = \frac{4\pi}{c} I - 2\pi\alpha b^2 B_0. \quad (19)$$

Если положить  $I = caB_a/2$ , то условия (18), (19) записываются через начальное значение азимутального поля  $B_a$  на границе шнура.

Заметим, что при условии  $I = \text{const}$  магнитный поток  $\Phi_{\theta}$  полоидального поля снаружи от шнура на единицу его длины может меняться со временем. Его можно выразить через величину  $\psi_b$  — значение функции потока  $\psi$  на кожухе. Для этого рассмотрим поверхность с винтовой симметрией, которая «перегораживает» пространство между плазмой и кожухом. Если выбрать цилиндр длины  $L_0 = 2\pi/\alpha$ , то при движении вдоль шнура поверхность повернется по азимуту на угол  $2\pi$  на этой длине. Рассмотрим теперь поток  $\Phi^* = \int \mathbf{Bn} dS$  через эту поверхность. Так как на винтовой поверхности  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{\perp} - \alpha r n_{\theta} \mathbf{e}_z$ , то этот поток равен

$$\Phi^* = L_0 \int \mathbf{Bn} dl = L_0 \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{\perp} dl = L_0 \psi_b,$$

где линейный интеграл берется вдоль линии в поперечном сечении от плазмы до кожуха. С другой стороны,  $\Phi^* = L_0 \Phi_{\theta} - B_0 \pi (b^2 - a^2)$ , так как винтовая поверхность пронизывается продольным магнитным полем, а проекция ее площади на плоскость  $z = \text{const}$  равна  $\pi (b^2 - a^2) = \text{const}$ . Таким образом, находим

$$\Phi_{\theta} = \psi_b + \frac{1}{2} \alpha B_0 (b^2 - a^2). \quad (20)$$

Чтобы окончательно замкнуть систему уравнений, нам осталось еще найти граничное условие для давления  $P$  на границе плазмы. Как при любых несжимаемых движениях, это условие может быть написано с точностью до константы. Чтобы найти  $P$  на границе, воспользуемся условием

равенства магнитных давлений на границе плазмы:

$$2B_0 B'_{zi} + B_{\perp i}^2 = 2B_0 B'_{ze} + B_{\perp e}^2, \quad (21)$$

где индексы  $i$  и  $e$  относятся соответственно к внутренней и внешней областям. Учтем, что снаружи поле безвихревое, так что  $\mathbf{V} = \nabla\varphi$ , где  $\varphi$  — потенциал магнитного поля, который мы должны считать функцией  $r$  и  $\theta - \alpha z$ . Следовательно,  $B'_z = \partial\varphi/\partial z = -\alpha \partial\varphi/\partial\theta = -\alpha r B_\theta$ . Подставляя это выражение в (21) и выражая  $B_{\perp e}^2$  через  $B_*^2$ , получим

$$2B_0 B'_{zi} + B_{\perp i}^2 = -2\alpha r B_0 B_\theta + B_{\perp}^2 = B_{*e}^2 - \alpha^2 r^2 B_0^2.$$

Но поскольку на границе плазмы  $\psi = 0$ , то мы получаем согласно (14):

$$P = \frac{1}{8\pi} (\nabla\psi_e)^2, \quad (22)$$

где обе величины берутся на границе плазмы:  $P$  — изнутри, а  $(\nabla\psi_e)^2$  — снаружи от плазмы.

Итак, задача о нелинейных винтовых возмущениях плазмы сведена к изучению двумерных движений идеально проводящей несжимаемой жидкости, описываемых уравнениями (10), (11), (5), (14), (16) с граничными условиями (17), (18), (22) и условием  $\psi = 0$  на границе плазмы.

### 3. Интеграл энергии

Покажем, что из этой системы уравнений можно получить выражение для полной энергии  $\mathcal{E}$ , сохраняющейся при движении плазмы. Выражения для  $\mathcal{E}$  несколько различаются в случаях  $\Phi_\theta = \text{const}$  и  $I = \text{const}$ . Соответственно, мы будем обозначать их через  $\mathcal{E}_\Phi$  и  $\mathcal{E}_I$ . Умножим (14) на  $\mathbf{v}$ , (10) на  $\mathbf{V}_*/4\pi$  и сложим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \frac{B_*^2}{8\pi} \right) - \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \frac{v^2}{2} + \text{div}(\mathbf{v}P) - \frac{\mathbf{v}}{4\pi} (\mathbf{B}_* \nabla) \mathbf{B}_* - \mathbf{B}_* \text{rot}[\mathbf{v} \mathbf{B}_*] = 0. \quad (23)$$

Мы воспользовались здесь условием несжимаемости. Величина  $\partial\rho/\partial t = -\mathbf{v} \nabla \rho$ , как следует из условия непрерывности. Используя кроме этого условия  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ ,  $\text{div} \mathbf{B}_* = 0$ , можно привести уравнение (23) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \frac{B_*^2}{8\pi} \right) + \text{div} \left\{ \rho \mathbf{v} \frac{v^2}{2} + \mathbf{v}P + \mathbf{v} \frac{B_*^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_* (\mathbf{v} \mathbf{B}_*) \right\} = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим теперь производную от интеграла по поперечному сечению плазмы  $S_i$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_i} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \frac{B_*^2}{8\pi} \right) dS = \oint_p v_n \left( \rho \frac{v^2}{2} + \frac{B_{*i}^2}{8\pi} \right) dl - \oint_p v_n \left( \rho \frac{v^2}{2} + P + \frac{B_{*i}^2}{8\pi} \right) dl,$$

где первый интеграл справа возник от дифференцирования пределов интегрирования, а второй получен с помощью (24). Как мы видим,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_i} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \frac{B_*^2}{8\pi} \right) dS = - \oint_p P v_n dl = - \oint_p \frac{B_{*e}^2}{8\pi} v_n dl, \quad (25)$$

что вполне естественно, так как член справа соответствует работе, совершаемой плазмой. Так как согласно (22)

$$P = \frac{1}{8\pi} (\nabla\psi_e)^2 = \frac{1}{8\pi} B_{*e}^2$$

на границе плазмы, то эту работу можно выразить через изменение энергии поля в вакууме снаружи от плазмы. Для этого преобразуем величину

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_e} B_{*e}^2 dS = - \oint_p B_{*e}^2 v_n dl + 2 \int_{S_e} \nabla\psi \nabla\dot{\psi} dS, \quad (26)$$

где  $\dot{\psi} = \partial\psi/\partial t$ , а первое слагаемое справа возникло от дифференцирования области интегрирования.

Рассмотрим второй интеграл в (26) для случая  $\Phi_\theta = \text{const}$ , т. е.  $\psi_b = \text{const}$ . Учтем соотношения (16), (17) и условие  $\psi = 0$  на границе плазмы, из которого следует  $(d\psi/dt)_p = (\partial\psi/\partial t + v_n \partial\psi/\partial n)_p = 0$ . Учитывая, кроме того, что на границе плазмы нормаль  $\mathbf{n}$ , являясь внешней к плазме, представляет собой внутреннюю нормаль по отношению к внешней области, имеем

$$\begin{aligned} \int_{S_e} \nabla\psi \nabla\dot{\psi} dS &= \oint_b \dot{\psi} \frac{\partial\psi}{\partial n} dl - \oint_p \dot{\psi} \frac{\partial\psi}{\partial n} dl - \int_{S_e} \Delta\psi \dot{\psi} dS = \\ &= \oint_p v_n \left( \frac{\partial\psi}{\partial n} \right)^2 dl + 2\alpha B_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_e} \psi dS. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя полученное выражение в (26) и используя (25) и условие  $(\partial\psi/\partial n)^2 = (\nabla\psi)^2$  на границе плазмы, мы получим закон сохранения энергии  $\partial\mathcal{E}_\Phi/\partial t = 0$ , где

$$\mathcal{E}_\Phi = \int_{S_i} \rho \frac{v^2}{2} dS + \int_{S_i+S_e} \frac{B_*^2}{8\pi} dS + \frac{\alpha B_0}{2\pi} \int_{S_e} \psi dS. \quad (28)$$

Последние два слагаемых в этом выражении играют роль потенциальной энергии.

Для случая  $I = \text{const}$  выражение для энергии еще проще. А именно, интегрированием по частям с последующим учетом граничного условия (19) получаем

$$\int_{S_e} \nabla\psi \nabla\dot{\psi} dS = \oint_b \dot{\psi} \psi \frac{\partial\psi}{\partial n} dl - \oint_{S_e} \dot{\psi} \psi \Delta\psi dS = \psi_b \frac{\partial}{\partial t} \oint_b \frac{\partial\psi}{\partial n} dl = 0. \quad (29)$$

Соответственно, с помощью (26) и (25) находим

$$\mathcal{E}_I = \int_{S_i} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \frac{B_*^2}{8\pi} \right) dS - \int_{S_e} \frac{B_*^2}{8\pi} dS. \quad (30)$$

Выражение (28), как нетрудно показать, с точностью до константы совпадает с величиной

$$\mathcal{E}'_\Phi = \int_{S_i} \rho \frac{v^2}{2} dS + \int_{S_i+S_e} \frac{B_\perp^2}{8\pi} dS, \quad (31)$$

что и следовало ожидать при  $B_0 = \text{const}$  и замороженном азимутальном магнитном потоке. В самом деле, учитывая (15), величину  $B_*^2$  в (28) можно заменить на

$$B_*^2 = B_\perp^2 - 2\alpha r B_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} - \alpha^2 r^2 B_0^2 = B_\perp^2 - 2\alpha B_0 \text{div}(\mathbf{r}\psi) + 4\alpha B_0 \psi - \alpha^2 r^2 B_0^2. \quad (31')$$

После этого интеграл от второго слагаемого (31') сведется к поверхностному и при  $\psi_b = \text{const}$  он не зависит от времени, интеграл от последнего слагаемого просто равен константе, а интеграл от третьего слагаемого по внешней области сократится с последним слагаемым в (28). Величина  $\int_{S_i} \psi dS$ , как нетрудно показать с помощью (13), не зависит от времени.

Таким образом,  $\mathcal{E}_\Phi = \mathcal{E}'_\Phi + \text{const}$ .

Что касается выражения (30) для  $\mathcal{E}_I$ , то оно не имеет такой простой связи с энергией внешнего и внутреннего магнитных полей, так как при  $I = \text{const}$  сюда замешивается энергия внешней цепи, что приводит, в частности, к отрицательному знаку у интеграла от  $B_*^2/8\pi$  по внешней области в выражении (30).

#### 4. «Пузыри» в плазме

В выражениях для энергии (28), (30), (31) легко выделяются слагаемые, соответствующие потенциальной энергии, которую мы будем обозначать через  $W$ . Очевидно, что наша система будет эволюционировать в сторону минимума  $W$ . Если этот минимум достигается не в основном цилиндрически симметричном состоянии, то плазма в исходном состоянии будет неустойчива, либо по отношению к линейным возмущениям, если в исходном состоянии  $W$  имеет максимум, либо по отношению к возмущениям конечной амплитуды, если абсолютный минимум  $W$  отделен от локального минимума линейно устойчивого исходного состояния потенциальным барьером. Но в любом случае прежде всего желательно знать абсолютный минимум  $W$ : вблизи этого минимума должно осуществляться заведомо устойчивое равновесие.

Мы начнем рассмотрение со случая  $I = \text{const}$ , т. е. воспользуемся выражением

$$8\pi W_I = \int_{S_i} B_*^2 dS - \int_{S_e} B_*^2 dS. \quad (32)$$

В принятом нами приближении, т. е. в пренебрежении малыми членами порядка  $B_\perp^2/B_0^2$ , деформация магнитного поля внутри плазмы всегда связана с увеличением энергии. Поэтому представляется желательным начать рассмотрение с наиболее неблагоприятного случая, когда  $\mathbf{B}_*$  внутри плазмы равно нулю. Это означает, что внутри плазмы ток однороден, а магнитное поле

$$B_\theta = \alpha r B_0. \quad (33)$$

Линейному распределению поля отвечает постоянное по радиусу значение коэффициента запаса  $q = 1/(\alpha R) = \text{const}$ . Если возмущения обладают симметрией  $m$ -го порядка по углу  $\theta$ , то все функции должны быть перио-

дическими с периодом  $2\pi$  по переменной  $m(\theta - \alpha z) = m\theta - m\alpha z$ . С другой стороны, имея в виду тороидальный шнур с большим радиусом  $R$ , мы должны считать возмущения периодическими по  $z$  с периодом  $2\pi R$ , так что  $m\alpha = l/R$ , где  $l$  — целое число. Таким образом,

$$\alpha = \frac{l}{mR} \quad (34)$$

и, следовательно, условие (33) выполняется при

$$q = \frac{m}{l}. \quad (35)$$

Нетрудно видеть, что при этом условии мы имеем дело с желобковыми возмущениями плазмы, постоянными вдоль силовых линий, причем все силовые линии имеют один и тот же шаг вдоль шнура.

Итак, при условиях (33)–(35) потенциальная энергия определяется только вакуумной областью вне плазмы. Нам нужно найти минимум этого выражения при несжимаемых деформациях плазмы и условиях  $\Delta\psi = -2\alpha B_0$ ,  $\psi_b = \text{const}$ ,  $\psi_p = 0$ .

Очевидно, что при минимуме  $W$  должно существовать равновесие (и притом устойчивое). Но в равновесии  $P = \text{const}$ , т. е. согласно граничным условиям величина  $(\nabla\psi)^2$  снаружи от плазмы должна быть постоянной. Наиболее простая конфигурация такого типа осуществляется, когда внешняя граница плазмы представляет собой цилиндр, концентрический с кожухом. Обозначим радиус этого цилиндра через  $a_*$ . Если  $a_*$  больше начального радиуса плазмы  $a$ , то внутри плазмы обязательно должны существовать вакуумные винтовые «жгуты», которые в поперечном сечении выглядят как «пузыри». Рассмотрим свойства таких пузырей. Пусть пузырь является кругом радиуса  $\rho_0$ . Так как внутри пузыря  $\Delta\psi = -2\alpha B_0$ , а на его границе  $\psi = 0$ , то

$$\psi = \frac{1}{2} \alpha B_0 (\rho_0^2 - \rho^2). \quad (36)$$

Найдем энергию пузыря  $W_{\rho_0}$ . Учитывая, что  $(\nabla\psi)^2 = \text{div}(\psi\nabla\psi) + 2\alpha B_0\psi$  и  $\psi = 0$  на границе плазмы, получаем

$$W_{\rho_0} = -\frac{1}{8\pi} \int (\nabla\psi)^2 dS = -\frac{\alpha B_0}{4\pi} \int \psi dS = -\frac{\alpha^2 B_0^2}{16} \rho_0^4. \quad (37)$$

Отсюда видно, что энергия пузыря одинакова при  $I = \text{const}$  и  $\Phi_\theta = \text{const}$ .

Нетрудно видеть, что при изменении формы пузыря заданного сечения  $S_{\rho_0} = \pi\rho_0^2$  величина  $\psi$  будет уменьшаться и энергия пузыря возрастать. Следовательно, каждый пузырь должен быть круговым. Из этих же соображений следует, что при слиянии пузырей энергия уменьшается, т. е. число пузырей должно быть минимальным. При симметрии порядка  $m$  минимальное число пузырей равно либо  $m$ , если пузыри существуют раздельно, либо единице, если они сливаются вместе. Так как суммарная площадь  $N$  пузырей равна  $N\pi\rho_0^2 = \pi(a_*^2 - a^2)$ , то их энергия равна

$$W_N = NW_{\rho_0} = -\frac{\alpha^2 B_0^2}{16N} (a_*^2 - a^2)^2. \quad (38)$$

При слиянии в один пузырь эта энергия становится в  $N$  раз ниже. До слияния пузыри в рассматриваемом нами приближении никак не взаимодействуют между собой и могут быть расположены произвольным образом



в пределах симметрии порядка  $m$ . Но учет членов следующего порядка малости должен, по-видимому, привести к притяжению пузырей друг к другу. После слияния, если только  $N$  не было равно единице с самого начала, единственный пузырь должен расположиться на оси шнура, так что сечение плазмы становится кольцевым.

Из этих соображений следует, что минимум потенциальной энергии достигается при трубчатой конфигурации плазмы с внешним радиусом  $a_*$  и внутренним  $\rho_0 = (a_*^2 - a^2)^{1/2}$ , причем величина  $a_*$  находится из условия минимума энергии. Но для большей общности мы проведем рассмотрение для  $N$  пузырей, полагая  $N = 1$ , если это нужно, в окончательных формулах.

Пусть начальное значение азимутального магнитного поля на границе шнура равно  $B_a = \xi \alpha a B_0$ . Если параметр  $\xi = 1$ , то это поле непрерывно сшивается с полем внутри плазмы, и, следовательно, на поверхности плазмы  $q = m/l$ , т. е. малые возмущения являются желобковыми и по отношению к внешним возмущениям. Известно, что в этом случае имеет место нейтральная устойчивость шнура, т. е. инкремент нарастания возмущений обращается в нуль. Это легко видеть и из полученных нами уравнений: поскольку при  $\xi = 1$  магнитное поле  $B_* = a B_a / r - \alpha r B_0$  обращается в нуль на границе невозмущенной плазмы, то при малых возмущениях работа внешних сил в (25) обращается в нуль в квадратичном по возмущению приближении. При  $\xi > 1$  величина  $q$  снаружи от плазмы уменьшается,  $q = m/(l\xi) < m/l$  и плазма становится неустойчивой в линейном приближении (если  $\xi$  не очень велико). Это вполне естественно вытекает и из наших выражений, поскольку внешнее «давление»  $B_*^2/8\pi$  убывает от границы плазмы. Наоборот, при  $\xi < 1$ , т. е.  $q = m/(l\xi) > m/l$ , внешнее давление нарастает от границы плазмы, и плазма устойчива в линейном приближении. Но нас в первую очередь интересуют не линейные возмущения, а сильно нелинейные, приводящие к образованию пузырей в плазме.

При  $I = \text{const}$  магнитное поле  $\mathbf{B}_*$  снаружи от шнура с цилиндрической внешней поверхностью сохраняет свое начальное значение, так что величина  $W$  определяется, очевидно, соотношением

$$8\pi W = - \int_a^{a_*} B_*^2 \cdot 2\pi r dr = - \frac{\pi \alpha^2 B_0^2}{2N} (a_*^2 - a^2)^2, \quad (39)$$

где

$$B_* = \alpha B_0 a \left( \frac{\xi a}{r} - \frac{r}{a} \right). \quad (40)$$

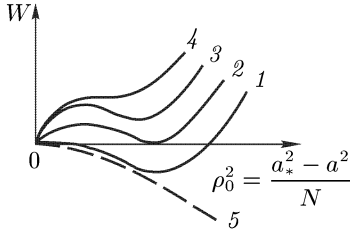
Введем в рассмотрение величину  $P' = -8 \partial W / \partial a_*^2$ , которая характеризует как бы эффективное «давление» пузырей: при  $P' > 0$  они стремятся расшириться, а при  $P' < 0$  — сжаться. Из (39) находим

$$P' = \alpha^2 a^2 B_0^2 \left\{ \frac{1}{N} \left( \frac{a_*^2}{a^2} - 1 \right) - \left( \frac{\xi a}{a_*} - \frac{a_*}{a} \right)^2 \right\}. \quad (41)$$

При  $a_* = a$ ,  $P' = -\alpha^2 a^2 B_0^2 (\xi - 1)^2 \leq 0$ , т. е. при  $\xi \neq 1$  для образования пузырей существует энергетический барьер, и следовательно, пузыри могут развиваться только из каких-то других возмущений, например, из линейных в области линейной неустойчивости.

Случай одного пузыря,  $N = 1$ , является несколько выделенным, так как при этом происходит сокращение квадратичных по  $a_*$  членов в силе (41) и она оказывается пропорциональной величине  $(2\xi - 1 - \xi^2 a^2/a_*^2)$ . Отсюда видно, что если  $\xi > 1/2$ , то после перехода через барьер радиус  $a_*$  увеличивается неограниченно, и второго устойчивого равновесного состояния не существует.

При  $N \neq 1$  сила  $P'$  становится отрицательной при достаточно больших  $a_*$ , т. е. большие пузыри должны сокращаться. Качественно зависимость  $W$  от  $a_*^2$  для  $N \neq 1$  представлена на рисунке. Потенциальная энергия имеет минимум, который заведомо лежит ниже начальной энергии  $W_0$



Потенциальная энергия  $W$  плазменного шнура в зависимости от величины пузыря: 1 — при  $\xi = 1$ , 2 — при  $\xi = \xi_c$ , 3 — при  $\xi_c < \xi < \xi_e$ , 4 — при  $\xi = \xi_e$ , 5 — энергия в случае одного пузыря;  $\rho_0$  — радиус пузыря,  $N$  — их число

$$\rho_0^2 = \frac{a_*^2 - a^2}{N}$$

для  $\xi = 1$ , когда отсутствует потенциальный барьер. При  $\xi \neq 1$  появляется барьер, и вместе с тем может изменяться значение  $W$  в точке минимума. Равновесное значение  $a_*$ , отвечающее минимуму  $W$ , определяется из условий  $P' = 0$ ,  $\partial P'/\partial a_* < 0$  и равно

$$\frac{a_*^2}{a^2} = 1 + \frac{2\xi - 1 + [1 + 4N\xi(\xi - 1)]^{1/2}}{2(N - 1)}. \quad (42)$$

Выражение (42) теряет смысл при  $1 + 4N\xi(\xi - 1) < 0$ . При этом на кривой зависимости потенциальной энергии от  $a_*$  исчезает минимум, как это видно на рисунке. Предельное значение  $\xi$ , для которого еще существует минимум, мы обозначим через  $\xi_e$ :

$$\xi_e = \frac{1 + \sqrt{1 - 1/N}}{2}. \quad (43)$$

Если даже минимум и существует, представляет интерес определить, при каких условиях он является абсолютным, т. е. лежащим ниже энергии в исходном состоянии. Критическое значение  $\xi$ , при котором минимум совпадает с  $W_0$ , обозначим через  $\xi_c$ . Его нетрудно найти с помощью (39), но в общем случае выражение для  $\xi_c$  очень громоздко, поэтому мы приведем здесь только асимптотическое выражение:

$$\xi_c = 1 + \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{2N}, \quad \frac{a_*}{a} = 1 + 3 \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4N}, \quad N \gg 1. \quad (44)$$

Заметим еще, что в линейном приближении рассматриваемый нами шнур, согласно [1], при  $(a/b)^m \ll 1$  неустойчив в интервале

$$1 < \xi < \frac{m+1}{m-1}. \quad (45)$$

Сравнивая выражения (44) и (45) при больших  $N = m$ , нетрудно видеть, что область линейной устойчивости уже, чем область, в которой наличие  $m$  пузырей энергетически выгодно. Это значит, что в области линейной устойчивости, но при  $\xi_{c1} < \xi < \xi_{c2}$ , может происходить так называемое

«жесткое» возникновение пузырей, связанное с переходом их через энергетический барьер. Область  $\xi > \xi_e$ , где существует минимум у  $W$  и пузыри находятся в метастабильном состоянии, еще гораздо шире.

Заметим, что согласно (42), (44) в области значений  $\xi$ , где потенциальная энергия минимальна, равновесное значение радиуса пузыря  $\rho_0 = [(a_*^2 - a^2)/N]^{1/2}$  при  $N = m$  оказывается порядка  $a/m$ , т. е. порядка поперечной длины волны возмущения моды  $m$ . Соответственно, при линейной неустойчивости возмущения с достаточно большой амплитудой могут «перерастать» в пузыри оптимального радиуса  $\rho_0$ , так что область потенциального барьера на рисунке, отвечающая очень маленьким пузырям, при реальных возмущениях с поперечной длиной волны  $\sim a/m$  легко может проскакаться.

Определим теперь, насколько изменяется азимутальный магнитный поток  $\Phi_\theta$  на единицу длины шнура при образовании пузыря. Согласно (20) изменение  $\delta\Phi_\theta = \delta\psi_b$ . Но значение функции потока на кожухе изменяется за счет того, что при образовании пузыря функция  $\psi$  в точке  $a_*$  убывает до нуля, т. е.  $\delta\psi_b = -\psi(a_*)$ . Следовательно, с учетом (42) легко находим

$$\delta\Phi_\theta = -\alpha a^2 B_0 \left\{ \Delta\xi - \frac{1 + (1 + 4m\Delta\xi)^{1/2}}{4m} \right\} \frac{1 + (1 + 4m\Delta\xi)^{1/2}}{4m}, \quad (46)$$

где  $\Delta\xi = \xi - 1$ . Как мы видим,  $\delta\Phi_\theta$  меняет знак при  $\Delta\xi = 3/(4m)$ , т. е. примерно посередине области линейной неустойчивости  $0 < \Delta\xi < 2/m$ . При  $\Delta\xi > 3/(4m)$  образование пузырей приводит к уменьшению  $\delta\Phi_\theta$ , т. е. к вытеснению некоторой доли магнитного потока за пределы кожуха, что должно было бы соответствовать отрицательным выбросам на напряжении обхода. При  $\Delta\xi < 3/(4m)$  образование пузырей должно сопровождаться захватом части полоидального потока в пузыри.

До сих пор мы рассматривали случай  $I = \text{const}$ . Оказывается, что при  $\Phi_\theta = \text{const}$  картина остается примерно той же, лишь несколько повышается устойчивость плазмы. В самом деле, энергия пузыря (39), как нетрудно убедиться, не зависит от того, каким выражением для энергии — (28) или (30) пользоваться. Что касается энергии снаружи от шнура (28), то она отличается от выражения (30). Но если вычислить производную от  $W$  по  $a_*$ , то с учетом того, что снаружи от шнура выражение для  $\mathbf{V}_*$  можно записать в виде (40), где величину  $\xi$  следует считать функцией  $a_*$ , определяемой из условия  $\psi_b = \text{const}$ , мы получим в точности выражение (41), где

$$\xi(a_*) = \left\{ \xi_0 \ln \frac{b}{a} - \frac{1}{2} \left( \frac{a_*^2}{a^2} - 1 \right) \right\} \left( \ln \frac{b}{a_*} \right)^{-1}, \quad \xi_0 = \xi(a).$$

Зависимость  $\xi$  от  $a_*$  приводит к увеличению энергии  $W(a_*)$ , так что размеры пузырей несколько уменьшаются. Кроме того, при  $\Phi_\theta = \text{const}$  появляется минимум у потенциальной энергии шнура с одним пузырем, т. е.  $N = 1$ . Соответственно, можно найти равновесное устойчивое значение  $a_*$  полого шнура. Для случая близко расположенного кожуха,  $b - a \ll a$ , оно определяется соотношением

$$b - a_* = \frac{(b - a)^{3/2}}{\sqrt{2a}}. \quad (47)$$

Таким образом, при  $\Phi_\theta = \text{const}$  мода  $m = 1$  не является катастрофической — она приводит лишь к некоторому расширению шнура и приближению его границы к коже без касания.

Откажемся теперь от ограничения  $\mathbf{V}_* = 0$  внутри плазмы. При этом образование пузырей должно сопровождаться возмущением магнитного поля внутри плазмы и, соответственно, дополнительным возрастанием энергии. Однако вблизи границы винтовой неустойчивости, когда  $\mathbf{V}_*$  близко к нулю на границе плазмы, образование пузырей под поверхностью плазмы продолжает быть энергетически выгодным. В самом деле, изменение энергии  $N$  пузырей при вариации радиуса  $\rho_0$  можно представить в виде  $8\pi\delta W = (B_{*e}^2 + AB_{*i}^2 - B_{*\rho}^2) \cdot 2\pi a_* da_*$ , где  $B_{*e}$  — поле вне шнура на его границе,  $B_{*i}$  — поле внутри плазмы в области, где находятся пузыри,  $A$  — числовой множитель порядка единицы, зависящий от формы пузыря, а  $B_{*\rho}$  — некоторое эффективное поле пузыря, равное  $B_{*\rho}^2 = \alpha^2 a^2 B_0^2 (a_*^2/a^2 - 1)N^{-1}$ . Величина  $B_{*\rho}^2$  пропорциональна площади пузыря, поэтому достаточно крупные пузыри энергетически выгодны. Добавление величины  $B_{*i}^2 \sim B_{*e}^2$  не меняет качественной картины образования пузырей, а лишь приводит к некоторому увеличению барьера для их образования и не дает возможности пузырям свободно передвигаться по плазме.

## 5. Образование и эволюция пузырей

В рассмотренной нами идеализированной схеме с однородным током и резкой границей плазменного шнура область значений  $\xi$ , в которой пузыри энергетически выгодны, оказывается шире области линейной неустойчивости. Однако вне области устойчивости для образования пузырей требуется преодолеть некоторый потенциальный барьер, поэтому при спокойном состоянии плазмы образование пузырей в области устойчивости маловероятно. В области неустойчивости, т. е. для  $m \gg 1$  при  $0 < \Delta\xi < 2/m$ , пузыри могут развиваться из нарастающих во времени линейных возмущений, если на их пути снова не встретится потенциальный барьер, т. е. не появится возможность образования равновесия с волнистой винтовой поверхностью. Вблизи границ интервала неустойчивости равновесие с винтовой симметрией можно искать разложением по малой амплитуде возмущения. Такое исследование было проведено в работе [6]. Оно показало, что вблизи правой границы устойчивости,  $\Delta\xi = 2/m$ , при далеко расположенном кожухе,  $(a/b)^m \ll 1$ , высшие члены отвечают стабилизирующему, но очень слабому эффекту, так что равновесие существует только очень близко от границы неустойчивости. А если кожух расположен близко, то имеет место жесткое возбуждение — члены более высокого порядка малости приводят к более быстрому нарастанию возмущений. Вблизи левой границы,  $\Delta\xi = 0$ , при условии, что внутри плазмы  $\mathbf{V}_* = 0$ , равновесия с волнистой границей не существует, что также отвечает «жесткому» возбуждению винтовых возмущений.

Таким образом, в рамках модели с однородным током образования пузырей можно было бы ожидать во всей области линейной устойчивости, и при этом образование пузырей могло бы сопровождаться как захватом, так и выталкиванием азимутального потока. Но если подход к

области неустойчивости связан с контрагированием плазменного шнура и уменьшением  $q$  на границе шнура, то пузыри должны были бы образоваться вблизи границы  $\xi = 1$ , когда их образование связано с захватом азимутального потока. Более того, если бы мы приняли более реальную модель с малой плотностью тока на границе плазмы, то область неустойчивости сузилась бы за счет приближения ее правой границы по  $\xi$  к значению  $\xi = 1$ , т. е. вся область линейной неустойчивости соответствовала бы положительным выбросам напряжения обхода при образовании пузырей.

Экспериментально же наблюдаются только отрицательные выбросы. Поэтому приходится сделать вывод о том, что отрицательные «пички» не связаны прямо с образованием пузырей. Однако факт экспериментально наблюдаемого быстрого расширения плазменного шнура при «пичке», или точнее, перед самым пичком, кажется очень естественным связать с образованием винтовых возмущений большой амплитуды типа пузырей. Что касается самого пичка, то он мог бы быть связан с тороидальностью шнура, т. е. со смещением шнура по большому радиусу из-за изменения условий равновесия при увеличении малого радиуса. Однако более естественным кажется другой механизм, связанный с касанием шнура со стенками (или диафрагмой).

В самом деле, заметим, что при образовании пузыря, скажем, при  $\xi = 1$  на первоначальной границе шнура, величина  $\partial\psi/\partial n$  на границе плазмы становится отличной от нуля: она положительна в пузыре и отрицательна на внешней границе шнура. При  $\mathbf{V}_* = 0$  под поверхностью плазмы это означает появление поверхностного продольного тока — положительного на границе пузыря и отрицательного на внешней границе плазмы. Если плазменный шнур с отрицательным поверхностным током касается диафрагмы, то из-за резкого охлаждения края шнура и быстрого уменьшения его проводимости этот отрицательный поверхностный ток должен быть «сброшен». Но исчезновение отрицательного тока эквивалентно переносу на край шнура из плазмы положительного тока, т. е. уменьшению индуктивности и выбросу части магнитного азимутального потока за пределы кожуха. С этой точки зрения отрицательный пичок должен происходить в момент касания шнура с диафрагмой, что согласуется с экспериментальными данными.

Что же касается процесса образования винтовых возмущений, то в реальном эксперименте он, по-видимому, протекает более плавно, чем в рассмотренной нами модели с резкой границей шнура. Это может происходить за счет эффекта конечной проводимости, которая дает примесь тиринг-моды, и из-за наличия поля  $\mathbf{V}_* \neq 0$  внутри плазмы, которое не позволяет пузырю полностью захлопнуться и отделиться от вакуумной области. Возможно, что наблюдаемые на эксперименте нарастающие винтовые возмущения перед пичком и есть внедряющиеся под поверхность плазмы пузыри.

Медленная эволюция уже образовавшихся пузырей должна определяться процессами перераспределения тока из-за конечной проводимости. При учете конечной проводимости уравнение для  $\psi$  принимает вид [7]

$$\frac{4\pi\sigma}{c^2} \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\psi \right) = \Delta\psi + 2\alpha B_0 - \frac{4\pi\sigma E_0}{c}, \quad (48)$$

где  $E_0$  — продольное электрическое поле,  $\sigma$  — проводимость.

При рассмотрении очень медленной эволюции скорость  $\mathbf{v}$  в (48) должна определяться из условия равновесия, которое согласно (14), как нетрудно показать, сводится к уравнению

$$\Delta\psi = F(\psi), \quad (49)$$

где  $F$  — произвольная функция  $\psi$ .

Рассмотрим опять самый простой случай, когда в исходном состоянии  $\mathbf{V}_* = 0$  внутри плазмы и  $\sigma = \text{const}$ , т. е.  $E_0 = \alpha B_0 / (2\sigma\pi)$ . Пусть в результате развития винтовой неустойчивости в шнуре под его поверхностью образовался пузырь. Если пренебречь медленной диффузией плазмы внутрь пузыря, то его эволюцию со скиновыми временами можно описать уравнениями (48), (49). Первое из них можно интерпретировать как уравнение теплопроводности для некоторой «температуры»  $\psi$ . При  $\sigma \neq \infty$ , как видно из (48), следует учесть конечную «теплоемкость»  $4\pi\sigma/c^2$ . В вакууме уравнение сохраняет свою форму (27), и, как отмечалось выше, на границе плазмы в пузыре и внешней границе величина  $\partial\psi/\partial n$  имеет разные знаки. Соответственно, пузырь будет «прогревать», а внешняя граница «охлаждать» плазму, т. е. потоки из этих областей имеют разные знаки. Менее формально можно сказать, что внутрь плазмы будут диффундировать поверхностные токи, имеющие разные знаки на пузыре и внешней границе. Но токи разного направления отталкиваются, поэтому пузырь должен начать уходить от границы плазмы внутрь шнура. При  $\mathbf{V}_* = 0$  погружение пузыря внутрь плазмы должно быть довольно быстрым, а при  $\mathbf{V}_* \neq 0$  оно сначала происходит со скиновым временем, а затем, когда поверхностный ток полностью размывается, движение пузыря может замедлиться.

Все это, разумеется, можно получить и чисто формально из уравнений (48), (49), из которых следует, что величина  $d\psi/dt$  является функцией только  $\psi$ . Следовательно, контур  $\psi = \text{const}$  будет перемещаться с плазмой таким образом, что вдоль него величина  $\psi$  будет постоянной, но зависящей от времени. На границе пузыря величина  $\psi$  также является функцией только времени — вначале она нарастает во времени, а затем может достигнуть некоторого предельного равновесного значения.

Таким образом, у пузыря нет тенденции выталкиваться обратно из плазмы. Повторяющийся процесс развития винтовой неустойчивости и проникновения пузырей в плазму может приводить к повышенной диффузии плазмы из периферийных участков шнура.

## 6. Заключение

Итак, мы показали, что если рассмотреть винтовую неустойчивость плазменного шнура с током в сильном продольном магнитном поле, не ограничиваясь линейным приближением, то из энергетических соображений оказывается выгодным проникновение винтовых полостей под границу плазмы. В поперечном сечении эти полости выглядят как пузыри. Число пузырей в поперечном сечении совпадает с номером  $m$  моды винтового возмущения. Наиболее выгодной энергетически является конфигурация с одной цилиндрической полостью внутри шнура, когда все пузыри сливаются в один (или с самого начала развивается мода  $m = 1$ ). При заданном токе у такого шнура вообще нет минимума энергии — он расширяется вплоть до стенки. При наличии кожуха без поперечного разъема такой ми-

нимум появляется, и шнур может остановиться, не доходя до кожуха даже при достижении предела Крускала–Шафранова. При  $q > 1$ , когда развиваются высшие моды, должны образовываться пузыри радиуса  $\rho_0 \sim a/m$ , где  $a$  — радиус шнура,  $m$  — номер моды. Если винтовое возмущение первоначально имело шаг, равный шагу силовых линий на границе плазмы, то по мере увеличения размеров пузыря оно вбирает в себя силовые линии дальше от границы с меньшим шагом, что приводит к втягиванию некоторой доли азимутального потока из вакуумной области в пузыри. При этом на внешней границе плазмы появляется поверхностный отрицательный ток. При соприкосновении шнура с дифрагмой этот поверхностный ток исчезает из-за падения проводимости, и на кривой напряжения обхода должен появиться отрицательный выброс. Нам представляется, что именно эти процессы протекают при так называемой деструктивной неустойчивости плазмы, хотя в реальных условиях они несколько усложняются из-за тороидальности шнура и его конечной проводимости.

#### Список литературы

1. Шафранов В.Д. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. IV. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 61.
2. Kruskal M.D., Schwarzschild M. // Proc. Roy. Soc. 1954. V. A233. P. 348.
3. Арцимович Л.А. Замкнутые плазменные конфигурации. — М.: Наука, 1969.
4. Mirnov S.V., Semenov I.B. // Presented at the Fourth Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Madison, Wisconsin, June 1971. Paper CN28/F-5.
5. Hosea J.C., Bobeldijk C., Grove D.J. // Presented at the Fourth Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Madison, Wisconsin, June 1971. Paper CN28/F-7.
6. Rutherford P.H., Furth H.P., Rosenbluth M.N. // Presented at the Fourth Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Madison, Wisconsin, June 1971. Paper CN28/F-16.
7. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. // В кн.: Вопросы теории плазмы. Т. 5. — М.: Атомиздат, 1967. С. 209.

## О ЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ \*)

При возбуждении сжимаемого газа или плазмы случайными потенциальными силами должна развиваться звуковая турбулентность — совокупность звуковых волн конечной амплитуды. Поскольку в отсутствие дисперсии звуковые волны конечной амплитуды «опрокидываются» и образуют ударные волны, то кажется естественным, что звуковая турбулентность будет порождать ударные волны.

Однако это соображение далеко не очевидно. В работе [1], например, посвященной исследованию спектра звуковой турбулентности, приводятся, казалось бы, достаточно убедительные аргументы, что в коротковолновой области спектра должен получаться спектр  $v_k^2 \propto k^{-3/2}$  (при наличии ударных волн спектр должен бы быть более крутым,  $v_k^2 \propto k^{-2}$ ). Этот результат получается как из соображений эстафетной передачи энергии по спектру, по аналогии с аргументацией Колмогорова для обычной турбулентности, так и по теории слабой турбулентности (строго говоря, не применимой в данной ситуации).

Но следует учесть, что в работе [1] вопрос о спектре звуковой турбулентности рассматривался с помощью уравнений, записанных в фурье-представлении (т. е. в пространстве волновых чисел). При этом очень трудно проследить за отдельными «гребнями» волн и сделать суждение об их опрокидывании.

В настоящем сообщении мы покажем, что уравнения в обычном пространстве приводят к выводу об опрокидывании и образовании ударных волн, так что спектр должен быть более крутым  $v_k^2 \propto k^{-2}$ . Соответственно мы обсудим, как следует модифицировать идеи Колмогорова–Обухова о передаче энергии по спектру на случай образования разрывов (например, ударных волн).

Для простоты допустим, что звук изотермический (теплопроводность очень велика), а вязкость исчезающе мала. Тогда движение газа можно описать уравнениями Эйлера и непрерывности

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + c^2 \nabla \ln \rho = \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \rho + \mathbf{v} \nabla \ln \rho + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость,  $c$  — изотермическая скорость звука,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{g}$  — ускорение, создаваемое внешней случайной силой  $\mathbf{F} = \mathbf{g}\rho$ .

Будем считать, что движение потенциально, т. е.  $\mathbf{g} = -\nabla\psi$ ,  $\mathbf{v} = \nabla\mu$ . Тогда уравнение (1) можно один раз проинтегрировать, после чего,

---

\*) Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.// Доклады АН СССР. 1973. Т. 208. № 4. С. 794–796.



исключая  $\ln \rho$ , получаем уравнение для  $\mu$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mu = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \mu)^2 - \frac{1}{2} \nabla \mu \nabla (\nabla \mu)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \mu \nabla \psi. \quad (3)$$

Это уравнение описывает эволюцию звуковых волн конечной амплитуды, возбуждаемых внешними силами, которые мы будем считать случайными. При небольшой амплитуде заметно взаимодействуют лишь волны, распространяющиеся почти в одном направлении [1]. Поэтому можно выбрать некоторую фиксированную ось  $z$  и рассмотреть лишь волны, распространяющиеся почти вдоль оси  $z$ , так что  $\partial \mu / \partial t \approx -c \partial \mu / \partial z$ . Точнее, положим  $\mu = \mu(t, \mathbf{r}_\perp, z - ct)$ , где зависимость от первых двух аргументов можно считать медленной. Пренебрегая малыми членами, получим

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial \mu}{\partial z} = -\frac{c}{2} \Delta_\perp \mu - \frac{1}{2c} \left( \frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \frac{1}{2c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{\partial \mu}{\partial z} + c \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi. \quad (4)$$

В функции  $\psi$  мы также перешли к новым переменным  $t, z - ct$  и, как видно из (4), при малой амплитуде членами  $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z}$  можно пренебречь. Вводя новые переменные  $u = \frac{\partial \mu}{\partial z}$ ,  $\varphi = -\frac{1}{2} c \Delta_\perp \mu$ , представим (4) в виде системы двух уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u + \frac{u^2}{2c} \right) \frac{\partial u}{\partial z} = \varphi + \Phi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{c}{2} \Delta_\perp u, \quad (6)$$

где  $\Phi = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial z}$  — случайная сила.

Будем считать, что сила  $\Phi$  возбуждает колебания в длинноволновой части спектра с некоторым характерным волновым числом  $K_0$ . Что касается временной зависимости  $\Phi$ , то, поскольку в рассматриваемой движущейся со скоростью  $c$  системе координат нас интересует медленная эволюция волн,  $\Phi$  можно считать  $\delta$ -коррелированной во времени.

Допустим, что внешняя сила начала действовать с некоторого момента времени, скажем,  $t = 0$ . Тогда вначале амплитуда колебаний будет мала, и в (5), (6) можно пренебречь нелинейными членами. В линейном приближении, как видно из (5), (6), решение можно представить себе как суперпозицию плоских волн с частотой  $\omega = ck_\perp^2 / (2k_z)$ , т. е. частота тем больше, чем больше угол  $\alpha = k_\perp / k_z$ , под которым распространяется волна по отношению к оси  $z$ .

При  $\delta$ -коррелированной по времени силе  $\Phi$  амплитуды всех волн будут нарастать как  $\sqrt{t}$ , так что, начиная с некоторого времени, в игру вступят нелинейные члены в левой части уравнения (5).

Рассмотрим сначала кубичный член. Величину  $u^2 / (2c)$  можно представить как  $\langle u^2 \rangle / (2c) + (u^2 - \langle u^2 \rangle) / (2c)$ , где усреднение производится по времени и пространству.

Среднее значение  $\langle u^2 \rangle / (2c)$  определяется всеми волнами, оно приводит просто к некоторому увеличению частоты, т. е. как бы немного увеличивает скорость звука. Этот эффект несуществен. Что касается величины

$(u^2 - \langle u^2 \rangle)/(2c)$ , то она мала по сравнению с  $u$  и может быть опущена. Таким образом, достаточно учесть лишь квадратичный член.

Рассмотрим теперь группы волн, распространяющихся внутри некоторого узкого конуса направлений с углом  $\alpha$ . Эти волны можно объединить в один волновой пакет с амплитудой  $\tilde{u}$ . Если  $\alpha^2 < \tilde{u}/c$ , то член с  $\varphi$  в (5), приводящий к дисперсии, играет меньшую роль, чем нелинейный, и в пренебрежении  $\varphi$  мы получаем уравнение для простой волны

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = 0.$$

Это уравнение приводит к опрокидыванию волны, а с учетом малой вязкости — к образованию пилообразных волн с ударными разрывами. Другими словами, уравнения (5), (6) показывают, что волны имеют тенденцию объединяться в совокупность пилообразных волн с углом  $\sim (\tilde{u}/c)^{1/2}$  между соседними волнами.

Нетрудно видеть, что в уравнениях (5), (6) нет механизмов, которые смогли бы воспрепятствовать опрокидыванию и образованию разрывов. В самом деле, если начинает образовываться ударная волна, то  $\partial \tilde{u}/\partial z \rightarrow \infty$ . При этом вблизи точки разрыва  $\partial u/\partial t$  и  $\varphi$  также могут неограниченно возрастать, но это означает лишь, что образуется косая ударная волна, распространяющаяся под углом к оси  $z$ . Что касается нелинейного члена в (5), то при наличии других волн, кроме рассматриваемой, он никаких существенно новых элементов не вносит — рассматриваемая волна будет лишь несколько «дрожать» на фоне косых быстро распространяющихся волн.

Таким образом, мы приходим к заключению, что звуковая турбулентность представляет собой набор пилообразных волн. Каждая из таких волн затухает во времени, так что стационарное в среднем состояние существует только при подпитке турбулентности внешними силами  $\Phi$ . Именно величина  $\Phi$  и определяет уровень звуковых шумов. Пилообразные волны взаимодействуют между собой, а именно, близкие по направлению волны имеют тенденцию к слиянию.

Этот процесс и определяет средний угол  $\alpha$  между соседними по направлению волнами  $\alpha \approx (\tilde{u}/c)^{1/2}$ .

Рассмотрим теперь вопрос о том, почему же к уравнениям (5), (6), согласно которым далекие гармоники, казалось бы, слабо взаимодействуют между собой, нельзя применять соображения об эстафетной передаче энергии по спектру. Дело в том, что в пилообразной волне все гармоники скоррелированы по фазам и все вместе затухают за счет поглощения энергии на ударном фронте. Если пренебречь корреляцией фаз, то приближенно можно было бы говорить о передаче энергии по спектру, но при этом для каждой гармоники нужно было бы учесть эффект прямого поглощения энергии за счет переноса данной гармоники к ударному фронту. Если считать, что перенос данной гармоники  $k$  к ударной волне осуществляется всеми предыдущими гармониками, причем основной вклад в этот перенос вносят высокие гармоники (но меньшие  $k$ ), то из соображений размерности перенос энергии по спектру можно было бы описать феноменологическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} v_k^2 + \frac{\partial}{\partial k} \Gamma_k = -\frac{\alpha \Gamma_k}{k}; \quad (7)$$

здесь  $\Gamma_k$  — поток энергии по спектру, из соображений размерности равный  $Av_k^4 k^3 / c$  ( $A = \text{const}$ ) [1], а член в правой части учитывает поглощение энергии данной гармоники на ударных волнах. В обычной турбулентности в стационарном состоянии  $\Gamma_k = \text{const}$  и диссипация происходит только при очень больших  $k$ .

В данном же случае, согласно (7),  $\Gamma_k = \text{const}/k^\alpha$ , т. е. по мере возрастания  $k$  поток энергии в области больших  $k$  убывает. Так как при наличии ударных волн  $v_k^2 \propto k^{-2}$ , то  $\alpha = 1$ .

Эффект прямого затухания энергии гармоник за счет ее переноса в область разрыва, по-видимому, может иметь место и в других случаях, когда в волновом движении образуются особенности. В частности, именно с этой точки зрения можно интерпретировать различие между спектром гравитационных волн на воде  $\omega^{-4}$ , полученным в теории слабой турбулентности [2], и спектром Филлипса  $\omega^{-5}$  [3], исходившего из представлений об образовании «барашков», т. е. разрывов производной от  $\zeta(\mathbf{r})$ , где  $\zeta$  — возвышение над стационарным уровнем.

В зависимости от того, на какой доле от общего числа волн образуются барашки, могут, по-видимому, устанавливаться и промежуточные между  $\omega^{-4}$  и  $\omega^{-5}$  спектры.

Авторы выражают благодарность академику Р.З. Сагдееву за обсуждение работы.

#### Список литературы

1. Захаров В.Е., Сагдеев Р.З. // ДАН. 1970. Т. 192. № 2. С. 297.
2. Захаров В.Е. // Журн. прикл. мех. и техн. физ. 1965. № 4. С. 35.
3. Филлипс С.М. // В сб.: Ветровые волны. — М.: ИЛ, 1962. С. 219.

## PLASMA IMPURITIES AND THEIR SIGNIFICANCE IN FUSION REACTORS \*)

Impurities, i. e. small amounts of high- $Z$  atoms, in a hydrogen fusion plasma have several unwanted, but also stabilizing, effects. The main source of impurities is sputtering from the first wall by hydrogen and helium atoms. The best method of keeping the impurity concentrations low seems to be control of the plasma temperature near the first wall at a low level, i. e. 10 to 100 eV. A divertor may be necessary, mainly as an effective sink for the helium. Furthermore, low- $Z$  material (oxide, carbide) with low sputtering yield may have to be chosen for the first wall. Several possibilities of influencing the impurity concentration are discussed. The problem seems to be not to avoid impurities completely, but to be able to control their concentrations.

### Introduction

Further advance in achieving higher ion temperatures, higher plasma densities and longer confinement times — especially in present-day tokamak experiments [1] — depends, first, on obtaining sufficient magnetic confinement in larger-scale plasmas.

However, it is equally important to understand the sources and sinks and the behaviour of impurities, i. e. of small amounts of atoms with atomic number  $Z > 1$  in the hydrogen plasma. These impurities basically originate from the interaction of the hot plasma with the surrounding first solid wall and the limiter.

They strongly influence the achievable plasma parameters in present-day tokamaks [2–9] and no means could be found of avoiding the influx of these impurities, as yet. Extrapolations to a fusion reactor [6] indicate that larger impurity concentrations will be expected.

On the other hand, in design studies of fusion reactors some impurities are introduced deliberately in order to stabilize the plasma thermally [10, 11]. Thus it will be very important for plasma experiments and future fusion reactors to learn to control the impurity concentrations in plasmas, especially if steady-state operation is envisaged.

---

\*) *Behrisch R., Kadomtsev B.B.* // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. International Atomic Energy Agency. Vienna, 1975. V. II. P. 229–249.

## Role of Impurities in Plasmas

Impurities influence plasma behaviour in several respects. First, the power radiated from a hot plasma is greatly increased with increasing atomic number  $Z$  of the ions. The type of radiation emitted depends on the plasma temperature, i. e. the ionization state of the plasma [12]. At sufficiently high temperatures, only bremsstrahlung contributes, which increases with  $T_e^{1/2}$ . Recombination and line radiation dominate as long as the ions are not fully stripped, but both of these decrease with increasing  $T_e$ .

Secondly, for fixed plasma electron density  $n_e$ , the presence of impurities results in a decrease of fuel density and, thus, in a decrease of the thermonuclear reaction rates and an increase in ignition temperature.

These effects put an upper limit on the tolerable impurity concentration in a fusion plasma [13, 14]. Obviously, the following conditions must be fulfilled.

To achieve ignition in a DT-plasma, the part of the fusion energy imparted to the  $\alpha$ -particles must be larger than the energy radiated from the plasma plus the energy lost by charged particles<sup>\*)</sup>. Assuming good particle confinement in the plasma and energy loss due to bremsstrahlung to be the dominating effect, Eckhartt et al. [14] have estimated the critical impurity concentration  $f_c$  above which ignition is no longer possible. The results are shown in Fig. 1 for different atomic numbers  $Z$  of the impurities. Included are also the values calculated in more detail by Meade [13]. Furthermore, the figure shows the resulting effective charge  $Z_{\text{ef}} = 1 + f_c(Z^2 - Z)$  of the plasma for the concentration  $f_c$  and  $f_{c/2}$ . With increasing  $Z$  of the impurity,  $Z_{\text{ef}}$  also increases. To maintain  $Z_{\text{ef}}$  below a certain value of 3 to 4, the concentration of high- $Z$  impurities must be lower than  $f_c$  or  $f_{c/2}$  of the figure.

We conclude that the critical impurity concentrations are 5 to 10% for very light elements (C, O), 0,5 to 1% for medium- $Z$  elements (Fe to Mo) and about 0,1% for heavy elements (W, Au, Ta).

Finally, impurities in a plasma may increase the particle transport across the magnetic field because of larger collision cross-sections, and, thus, they may even influence plasma instabilities.

Small amounts of impurities may, however, also be favourable to a fusion plasma. First, the resistivity of the plasma is increased so that Ohmic heating

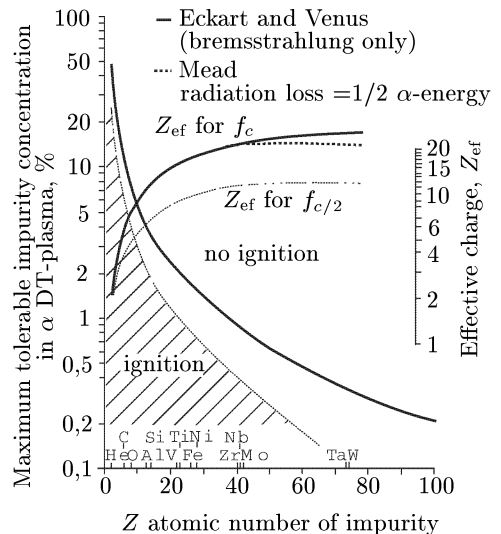


Fig. 1. Critical impurity concentrations and the corresponding  $Z_{\text{ef}}$  for a DT fusion plasma

<sup>\*)</sup> This condition differs slightly from the Lawson criterium [13, 15, 16], where instead of the  $\alpha$ -energy the total fusion energy times the energy recycling efficiency is taken. As the latter can only be estimated, the ignition criterion seems to be more straightforward. Here it is assumed that the  $\alpha$ -energy is completely transferred to the plasma.

is more effective. The increased particle transport due to the impurities may be useful for achieving a more uniform temperature distribution across the plasma. Finally, increased radiation losses of the plasma due to a definite small amount of impurities may be necessary in a fusion plasma to stabilize it thermally at higher temperatures.

An ideal situation seems to be to have the impurities — and thus the energy loss by radiation — predominantly at the outer boundary of the plasma. However, even with a uniform distribution of low- $Z$  atoms ( $Z < 20$ ) in the plasma, the radiation loss from the centre may be tolerably low, as the atoms are fully stripped. In the outer, colder region the ions will only be partially stripped and effective cooling is achieved by the recombination and line radiation. The temperature profile observed in present-day tokamaks is essentially determined by such a mechanism [4, 12]. It is hoped that this mechanism also works in a fusion reactor in order to maintain a large temperature gradient inside the plasma in front of the first wall so that wall erosion is minimized.

## Surface Phenomena

The impurities are introduced as a result of the interaction of the plasma with the first wall, mainly via three different processes, [18–21]:

- a) Evaporation from overheated areas of the first wall.
- b) Sputtering and blistering by ions and neutrals and sputtering by neutrons.
- c) Desorption by ions, electrons and photons.

Evaporation from the first-wall can, in principle, be kept small by effective cooling. Steady-state evaporation yields and vapour pressure data for first-wall materials of interest are shown in Fig. 2 [24]. The components of stainless steel show the highest evaporation yield of the materials in the figure. To keep evaporation below  $10^{13}$  atoms·cm<sup>-2</sup>·s<sup>-1</sup> (a value which will be justified later) the temperature has to stay below 900 °C.

Recently, new interest has arisen in using graphite, carbides or some oxides as a first-wall material because of their low  $Z$  and still reasonably good thermal properties [14, 27, 28]. In the case of graphite, it is envisaged that cooling may be achieved only by thermal radiation [27, 28]. Figure 3 shows the radiated power as a function of temperature together with the evaporation yield of graphite. The dotted lines show that cooling by irradiation makes up  $\approx 80$  W/cm<sup>2</sup> at a temperature of 1700 °C where evaporation still stays below  $10^{13}$  particles/cm<sup>2</sup>.

Evaporation may only become appreciable if the energy from the plasma reaches the first-wall non-uniformly, either in space (local overheating) or time (pulse evaporation [19]). Local overheating may be critical at the entrance of a divertor or for present-day limiters, while pulse evaporation may occur during instabilities and at the end of a burn. Pulse evaporation has been treated analytically [19, 31, 32] and applies for heating times  $\tau < d^2 \cdot 2\pi\rho c_p / (4k)$ , where  $d$  is the thickness of the first wall,  $\rho$  the density,  $c_p$  the specific heat

and  $k$  the thermal conductivity of the wall material. The yields become high if the heat pulses are in the  $ms$ - and  $\mu s$ -ranges [19].

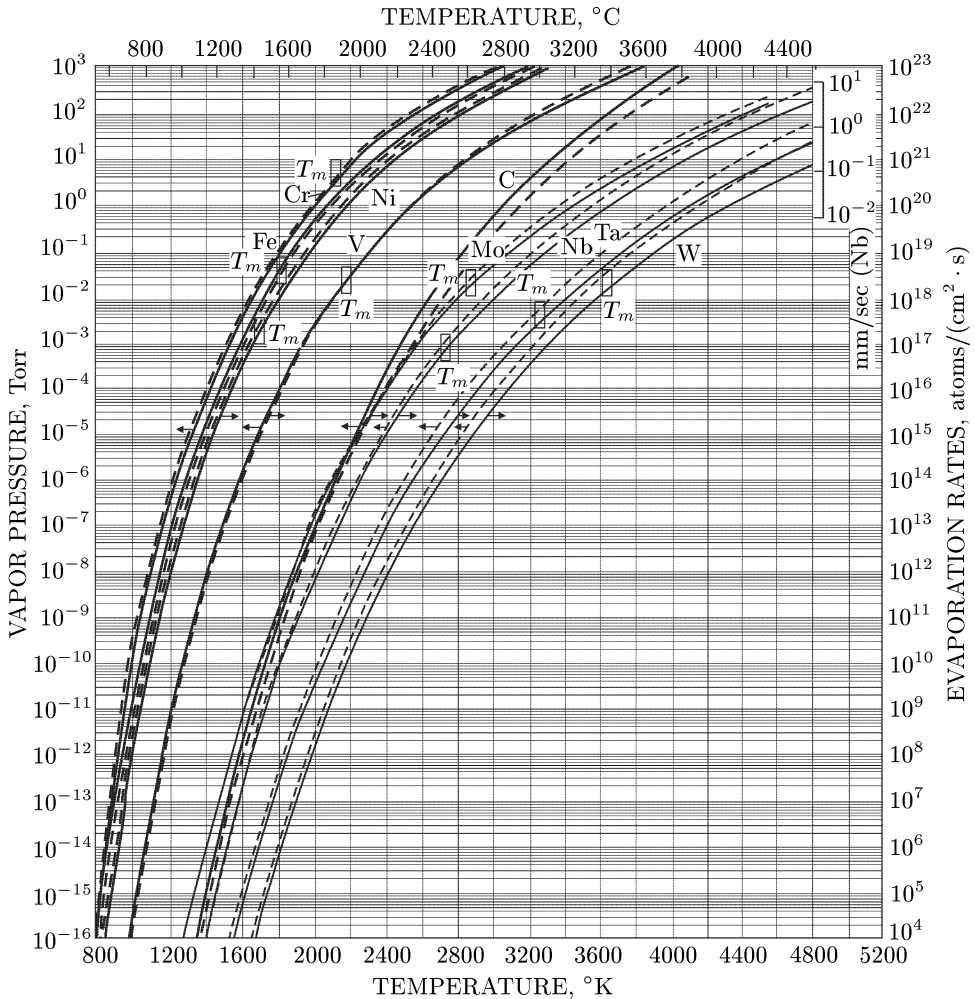


Fig. 2. Vapor pressures and evaporation rates for different first-wall materials

Sputtering is the emission of surface atoms due to the bombardment by energetic ions, neutrals and neutrons [18–23, 32–35]. It is caused by a collision cascade initiated in the solid by the impinging particles. The surface as a whole stays cold, and only those atoms near the surface which have received an energy larger than the surface binding energy may be emitted. Additionally to this emission of surface atoms via a collision cascade — called physical sputtering — surface atoms may be released by chemical sputtering. This occurs if the incident ions form a volatile compound with the atoms of the solids, which then leave the surface.

Sputtering yields, i. e. the mean number of atoms released from the surface per incident ion, are proportional to the energy deposited into nuclear motion near the surface and inversely proportional to the surface binding energy [36]. Sputtering by ion bombardment has been investigated extensively [32–36]; however, reliable sputtering yields for the light ions of interest in fusion research are only poorly known. This has several reasons:

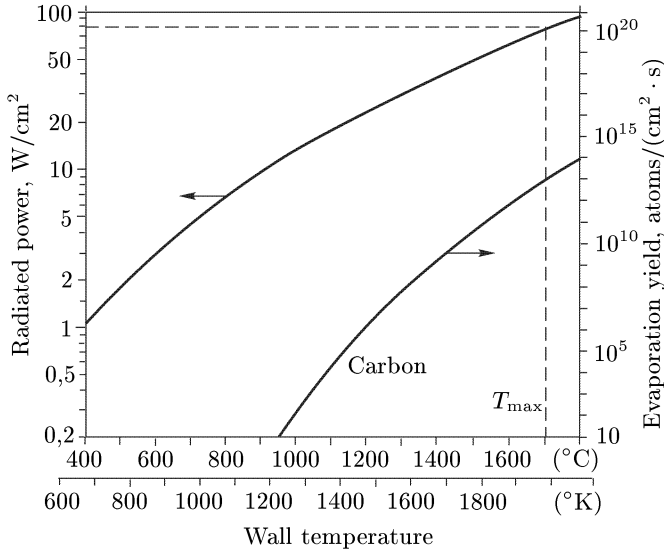


Fig. 3. Radiation power and evaporation rates for carbon

For these light ions sputtering yields are very low, typically  $\leq 10^{-2}$  atoms per ion, and the ions can penetrate deep into the solid before they come to a rest. This means that large concentrations of gas can be built up. If the gas atoms are not soluble in the solid, they agglomerate to form small bubbles which finally coalesce to larger bubbles breaking up to the surface. This phenomenon called blistering has first been observed by Primak [37] and has been widely investigated recently [22, 23, 38–41]. Blistering was observed for all materials with low solubility of the incident ions. The critical doses for the first appearance of blisters are 0,03 to 0,3 coulomb/cm<sup>2</sup> (1 coulomb = =  $6,25 \cdot 10^{18}$  ions) for energies between 1 keV to 1 MeV. It has further been observed that for bombarding energies above 100 keV the blister covers exfoliate and further blisters develop on the surface below [42, 43]. This may lead to a surface erosion yield of the order of 1 atom per ion which is much larger than the sputtering yields [42]. However, such a phenomenon was not found for ion energies below 15 keV. On the contrary, at these energies the blisters disappear after bombarding with doses at which about the thickness of one blister cover is sputtered off [44]. This is demonstrated in Fig. 4 for a niobium surface bombarded with 9-keV He-ions with increasing doses [45]. At about 0,05 coulomb/cm<sup>2</sup>, i. e. slightly above the critical dose, blisters can be observed. At about 0,25 coulomb/cm<sup>2</sup>, the blister covers be-



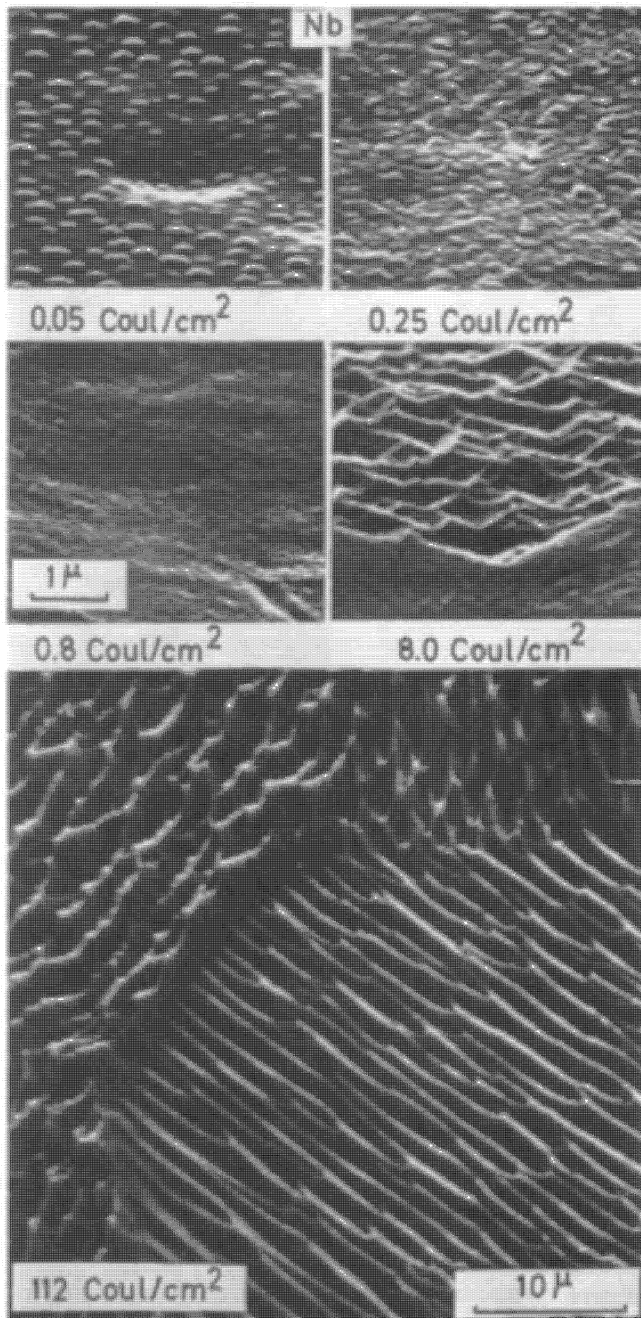


Fig. 4. Surface of polycrystalline niobium after bombardment with 9-keV He-ions at different doses

come sputtered off, but no new blisters develop. After further bombardment, the surface first becomes smoother ( $0,8 \text{ coulomb/cm}^2$ ) but then starting with some grains, it gets very rough ( $8 \text{ coulomb/cm}^2$ ). Finally, large ridges and valleys cover the whole surface, with different orientations on different individual grains ( $112 \text{ coulomb/cm}^2$ ). The details of this structure depend strongly on the bombarding conditions and the target temperature. However, the same phenomenon has been observed for several materials. Figure 5 shows the surface of 304 stainless steel bombarded with 5-keV hydrogen ions at different doses [46]. Again, blistering is observed only at low doses of ion bombardment, but disappears at higher doses.

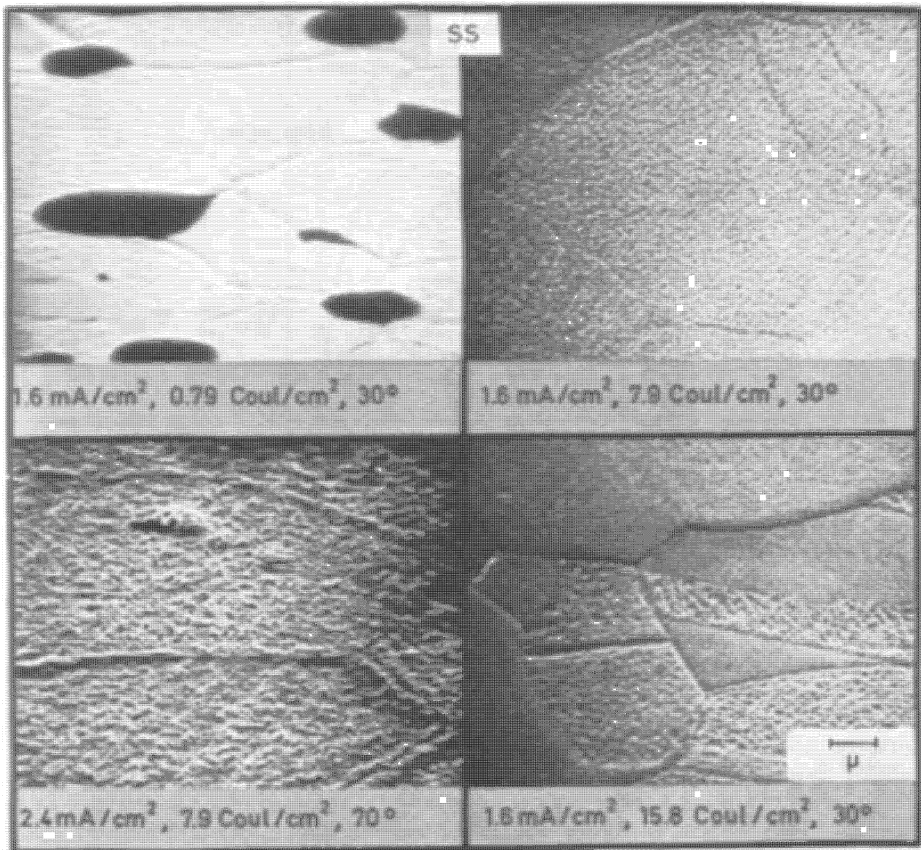


Fig. 5. Surface of 304 stainless steel after bombardment with 5-keV H-ions at different doses

The disappearance of blisters can be explained by the following qualitative model. In bombarding an undamaged surface the accumulation of gas and introduction of damage is peaked at some depth inside the solid. At this depth, finally, blisters are formed. If the blister covers stay partly in place and the bombardment is continued, the surface below is, at the beginning, only bombarded with very-low-energy ions. The bombarding energy increases

if the blister covers are gradually sputtered away. Finally, after the covers have been sputtered off completely, the distribution of accumulated gas and damage is strongly peaked at the new surface. A highly damaged layer of about the range of the incident ions has been formed on the solid. This may be sufficiently transparent for the gas of the incident ions so that no large accumulation can occur. If this picture can be confirmed more quantitatively, no blistering is expected to occur at the first wall of a fusion reactor. As the incident ions and the neutrals will have a broad energy distribution, presumably peaked at some 100 eV, the distribution of accumulated gas and damage will be peaked near the surface, from the beginning.

To investigate the influence of blistering on sputtering yields these have been determined for hydrogen bombardment of stainless steel by weight loss as a function of ions dose [46]. The results are shown in Fig. 6. The surface pictures of Fig. 5 are taken from the probes used in these measurements. No increased erosion due to blistering at the beginning of the bombardment could be observed. So far, all sputtering experiments with light ions such as hydrogen and helium have been performed with ion doses 10 to 100 times above the critical blister doses, i. e. erosion by blistering is already included in all sputtering yields for light ions published in the literature.

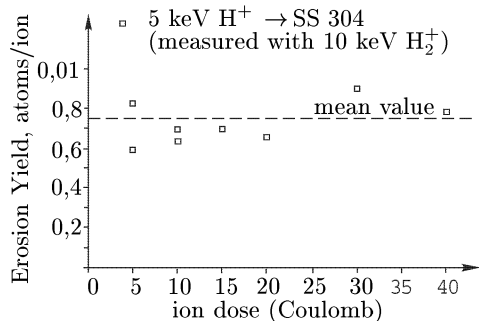


Fig. 6. Erosion yield of 304 stainless steel due to bombardment with 5-keV H-ions at different doses

- $D^+$  → SS Guseva
- +  $H_2^+$ ,  $H_3^+$  → SS 304 Behrisch et. el.
- ┌ 70%  $H_2^+$ , 30%  $H^+$  → SS 304  
Faibrother et. el.
- $H_2^+$ ,  $H_3^+$  → Fe Wehner et.al.
- ▲  $He^+$  → Fe Wehner et.al.
- ▼  $He^+$  → Ni Oechsner
- Extrapolation

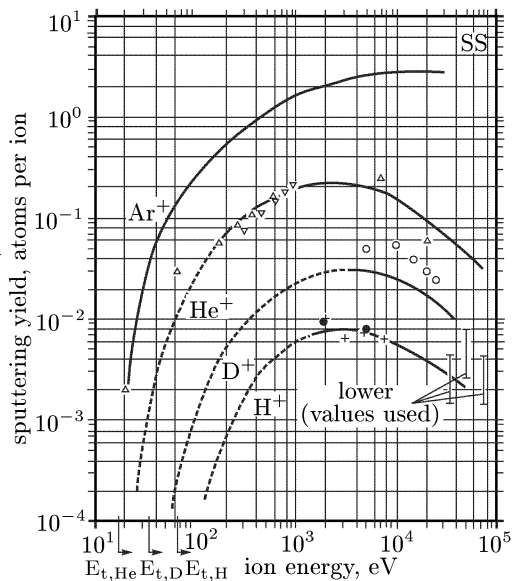


Fig. 7. Sputtering yield of stainless steel as a function of ion energy for different ions at normal incidence

A collection of sputtering yields by different ions bombarding stainless steel as well as iron and nickel [46–50] is shown in Fig. 7 as a function of ion energy. Below a threshold energy  $E_{th}$ , which depends on the mass of the ions no sputtering takes place. The yields then rise steeply, reach a maximum at 1 to 10 keV and decrease to higher ion energies. As the measured values for hydrogen from different authors differ considerably, the uncertainty of the yields is about a factor of 2. Sputtering yields for other materials show a similar energy

dependence [32–36]. The difference in yields for different materials around the maximum is only a factor of 2 to 4. However, at energies below the maximum, the yields for different materials are expected to show larger variations, up to a factor of 10 or more. Unfortunately, there are no experimental values available for these low ion energies.

Sputtering yields for carbon and carbides have been investigated only very recently [46, 51]. The results are summarized in Table I. Although there are large uncertainties in these first results, they show relatively high yields for hydrogen compared to helium bombardment. This may be due to chemical sputtering, i. e. the formation of volatile hydrocarbons which may occur in this special case. However, more investigations are necessary to clarify this point.

Sputtering yields for C and SiC

Table I

Material	Ions	Energy, keV	S, atoms/ions	Reference
Pyrolytic graphite	H(H <sub>2</sub> <sup>+</sup> )	10	8.5 · 10 <sup>-2</sup>	Guseva and Gusev [51]
	He <sup>+</sup>	20	5 · 10 <sup>-2</sup>	
Glassy graphite	H(H <sub>2</sub> <sup>+</sup> )	10	8.5 · 10 <sup>-2</sup>	
	He	20	10 <sup>-1</sup>	
	Ar	20	1.5	
Pyrolytic graphite (Harwell)	H(H <sub>2</sub> <sup>+</sup> )	7.5	4 ± 3 · 10 <sup>-2</sup>	
SiC (refel)	H(H <sub>2</sub> <sup>+</sup> )	7.5	7 ± 1.5 · 10 <sup>-3</sup>	
		5	9 ± 2 · 10 <sup>-2</sup>	

Sputtering yields due to neutron bombardment have also been investigated in some detail only recently at several places [52–56]. These measurements are even more difficult than the measurements with hydrogen as the yields are even lower and intense 14-MeV neutron sources are not yet available. In Table II, the results of the latest experiments are summarized. Except for the values of Kaminsky, the measured yields are below  $\sim 8 \cdot 10^{-4}$  atoms/neutron. Theoretical estimates on the basis of a collision theory [18, 19, 36, 57] give neutron sputtering yields of 2 to 4 · 10<sup>-4</sup> atoms/neutron. If the possible formation of the thermal spike is also taken into account the yields may be as high as 2 · 10<sup>-4</sup> atoms/neutron [57]. The high yields and especially the emission of chunks due to 14-MeV neutron bombardment found by Kaminsky et al. cannot be understood by a sputtering process via a collision cascade or a thermal spike and may be due to stored energy in the materials used.

Desorption by ions, electrons and photons has been investigated until now mostly on clean smooth surfaces [58]. However, for the first wall of a fusion reactor, these results may only have restricted application, for example during start-up of the reactor. During operation, we are dealing with a highly damaged first-wall surface into which gases are continuously implanted and diffuse

back to the surface or into the bulk. Desorption under these conditions needs special investigation.

Neutron sputtering yields

Table II

Energy, MeV	Dose, $\text{cm}^{-2}$	Material	S, atoms/neutrons	Reference
14.1		Au	$< 6 \cdot 10^{-4}$	K. Keller
14.1	$4.6 \cdot 10^{15}$	Nb cold-rolled	$0.25 \pm 0.1$	M. Kaminsky
		Nb annealed	$0.05 \pm 0.025$	S.K. Das [53]
14.1	$2 \cdot 10^{14}$ to $1 \cdot 10^{15}$	Au	$\sim 2 \cdot 10^{-4}$	R. Behrisch R. Gähler J. Kalus [54]
0-30 maximum at 14	$\geq 10^{16}$	Nb	$< 10^4$	L.H. Jenkins J.M. Saltmarsh T.S. Noggle
		Au	$10^{-4}$	R.E. Reed G.J. Smith [56]
14.1	$3 \cdot 10^{15}$	Nb cold-rolled	$< 9 \cdot 10^{-4}$	O.K. Harling M.T. Thomas
	$4 - 5 \cdot 10^{15}$	Nb annealed	$< 6 \cdot 10^{-4}$	L.A. Rancitelli R.L. Brodcinski [55]

Finally, it is important to know more about the fate of the ions and neutrals leaving the plasma and hitting the first wall. Depending on their energy, they are partly back-scattered in collisions with the target atoms or are slowed down and come to rest inside the first wall. They may form blisters or diffuse back to the surface and become re-emitted [43, 59, 60]. In steady-state operation, the average probability for back-scattering and re-emission  $R$ , will be unity. Re-emission, however, may exhibit large fluctuations [43]. The back-scattered particles are more than 90% neutrals [61] and have a broad energy distribution ranging from 0 to nearly the incident energy. Total back-scattering yields at the low energies of interest have recently been calculated by several authors for solids with randomly distributed lattice atoms. Their results are summarized in Fig. 8. The few experimental results available [66, 67] are also included in the figure. They are in reasonable agreement with the calculations.

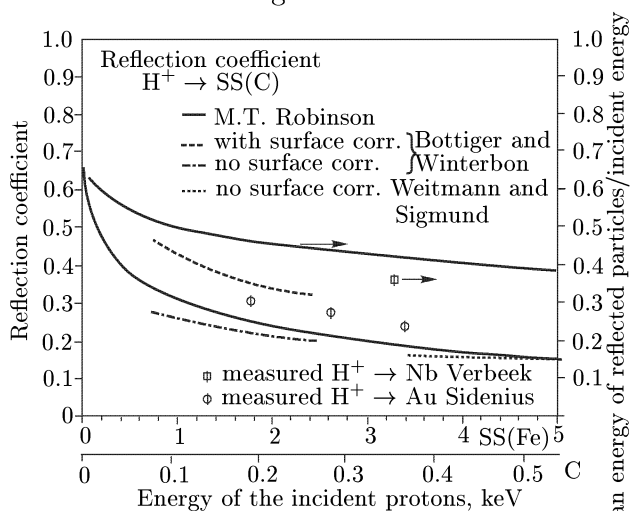


Fig. 8. Particle- and energy-reflection coefficient for protons on stainless steel and carbon

authors for solids with randomly distributed lattice atoms. Their results are summarized in Fig. 8. The few experimental results available [66, 67] are also included in the figure. They are in reasonable agreement with the calculations.

### Impurity Introduction into the Plasma, Particle-Balance Equations

To estimate the impurity influx from the first wall to the plasma, the wall bombardment has to be known. This can be estimated from particle balance and energy balance considerations as has been shown by different authors using different approximations [19, 20, 68–72].

The processes near the first wall of a fusion reactor with a divertor [73] are shown schematically in Fig. 9. The largest particle fluxes are the fuel atoms,

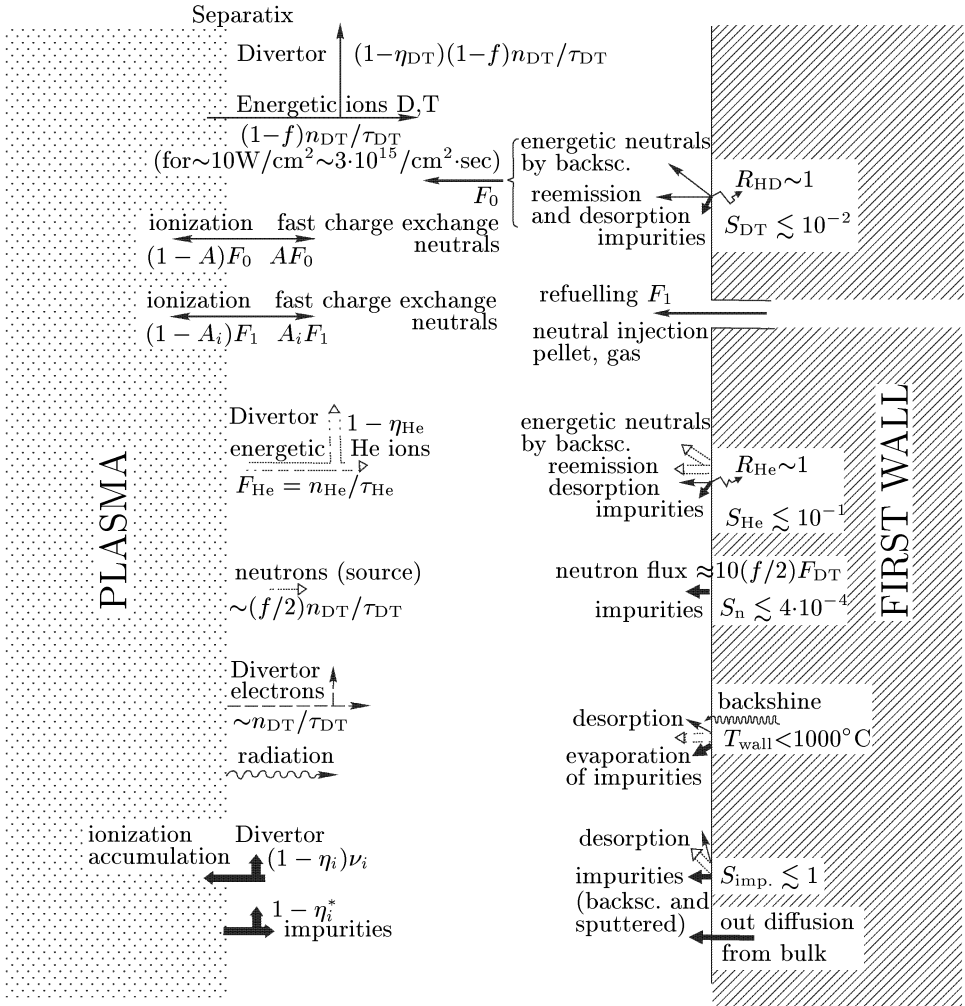


Fig. 9. First-wall interaction processes in a DT-fusion reactor with divertor

i. e. the deuterons and tritons. Owing to their finite life-time  $\tau_{D, T}$  in the plasma, there will be a continuous current to the first wall of  $(1-f)\eta_{DT}n_{DT}/\tau_{DT}$  per unit volume of the plasma. Here  $n_{DT}$  is the hydrogen density in the plasma,  $f$  is the fractional burn-up and  $(1-\eta_{DT})$  is the proba-

bility that the ions are guided into the divertor. It is assumed that all particles coming into the divertor are buried inside. Possible backstreaming from the divertor can be easily included but will not alter the conclusions drawn in this paper. At the first wall the particles will either be dynamically back-scattered or implanted and released later by sputtering or desorption. Only in steady-state operation, the re-emission  $R$  will be, on the average, equal to one [38]. In pulsed operation,  $R$  may be larger or smaller than 1 which has been observed as an increase or decrease in particle density in present-day tokamak discharges. The particle flux  $F_0$  back to the plasma mostly consists of neutrals. At the plasma boundary these may be ionized or undergo resonant charge exchange producing another fast neutral hydrogen atom going back to the first wall with probability  $A$ . To replace the hydrogen atoms burnt to helium and lost to the divertor a neutral re-fuelling current of  $F_1$  per unit plasma volume is necessary. These neutrals may also undergo resonance charge exchange releasing a fast neutral to the first wall with probability  $A_1$ . To achieve a constant particle density in the plasma, a particle-balance equation shows that a re-fuelling current of

$$F_1 = \frac{n_{DT}}{\tau_{DT}} \frac{1 - R_{DT}A - (1-f)\eta_{DT}R_{DT}(1-A)}{1 - R_{DT}A - (1 - R_{DT})A_1} \quad (1)$$

is needed. This gives a bombardment of the first wall by hydrogen atoms per unit volume of the plasma:

$$F_{DT} = \frac{n_{DT}}{\tau_{DT}} \left[ \frac{\eta_{DT}(1-f)(1-A_1)}{1 - R_{DT}A - (1 - R_{DT})A_1} + \frac{A_1}{1 - R_{DT}A - (1 - R_{DT})A_1} \right]. \quad (2)$$

This formula shows that a major part of the bombardment of the first wall, i. e. the energetic neutrals released by resonance charge exchange from the re-fuelling gas, is independent of the divertor efficiency  $1 - \eta_{DT}$ . For small fractional burn-up  $f$ , for a re-emission coefficient  $R_{DT} \approx 1$  and  $A \approx A_1 \approx 0,5$ , the first-wall bombardment by hydrogen atoms is always of the order of  $n_{DT}/\tau_{DT}$ . It can be reduced only if  $\eta_{DT}$  and  $A_1$  are very small, i. e. if an effective divertor and re-fuelling without creating many charge-exchange neutrals can be obtained. The factor  $F_{DT}V/O$  (where  $V$  is the plasma volume and  $O$  is the first-wall surface) gives the bombardment of the first wall. In present-day tokamaks, this is of the order of  $10^{15}$  to  $10^{16}$  ions/cm<sup>2</sup>. It is expected that the mean current to the first wall in future fusion reactors will be of the same order of magnitude. If we assume a sputtering yield of  $\approx 10^{-2}$  atoms/ion, this results in a flux of about  $10^{13}$  to  $10^{14}$  wall atoms back to the plasma.

For the helium particles a similar particle-balance equation shows that relatively large helium concentrations can build up. The helium density is given by

$$n_{He} = \frac{f}{2} \frac{n_{DT}}{1 - \eta_{He}R_{He}} \frac{\tau_{He}}{\tau_{DT}} \left[ 1 - e^{-(1-\eta_{He}R_{He}) \frac{t}{\tau_{He}}} \right]. \quad (3)$$

After starting the fusion reactor, the helium concentration builds up linearly with time at a rate corresponding to the fractional burn-up. A steady-state concentration is only reached if  $\eta_{He}R_{He} < 1$ . As the re-emission factor  $R_{He}$  will be always close to 1 in steady-state operation, an effective divertor seems to be necessary for extracting the helium. The first-wall bombardment by the helium atoms will be given by  $F_{He} = \eta_{He}n_{He}/\tau_{He}$  which in steady state is equal to

$$F_{He} = \frac{f}{2} \frac{\eta_{He}}{1 - \eta_{He}R_{He}} \frac{n_{DT}}{\tau_{DT}}. \quad (4)$$

The helium bombardment will become large if the fractional burn-up is large and if the divertor is not very effective, i. e.  $\eta_{\text{He}}$  is close to 1.

For the impurities, the particle-balance equation gives the following time dependence of the density in the plasma:

$$n_i = \frac{\sum F_j S_j \tau_i}{1 - \eta_i \eta_i^+ S_i} \left[ 1 - e^{-(1 - \eta_i \eta_i^+ S_i) \frac{t}{\tau_i}} \right] + n_0 e^{-(1 - \eta_i \eta_i^+ S_i) \frac{t}{\tau_i}}. \quad (5)$$

Here  $\sum F_j S_j$  is the sum of the sputtering by hydrogen, helium and the neutrons, and  $n_0$  is the impurity concentration right after start-up. Other sources of impurities such as evaporation and desorption should be added to  $\sum F_j S_j$ , although they have been neglected in the following. A steady-state concentration is only achieved if the sputtering yield for the impurities  $S_i$  is smaller than one and/or a divertor is built in, i. e.  $\eta_i \eta_i^+ S_i < 1$ . The absolute magnitude of the steady-state concentration is then given by

$$\frac{n_i}{n_{\text{DT}}} = \frac{1}{1 - \eta_i \eta_i^+ S_i} \frac{\tau_i}{\tau_{\text{DT}}} \left[ \frac{\eta_{\text{DT}}(1-f)(1-A_1) + A_1}{1 - R_{\text{DT}}A - (1 - R_{\text{DT}})A_1} S_{\text{DT}} + \frac{f}{2} \frac{\eta_{\text{He}}}{1 - \eta_{\text{He}} R_{\text{He}}} S_{\text{He}} + \frac{f}{2} k S_n \right]. \quad (6)$$

From this equation, we can first estimate the contribution of the different erosion mechanisms to the impurity influx [74]. As has already been mentioned, the factor combined with  $S_{\text{DT}}$  is of the order of unity. The factor combined with  $S_{\text{He}}$  depends largely on  $f$  and  $\eta_{\text{He}}$ . For  $\eta_{\text{He}} = 0,7$  to  $0,2$  and  $f = 5$  to  $10\%$  we obtain for this factor a value of about  $0,05$  to  $0,2$ . Concerning neutron sputtering,  $k$  is of the order of  $2$  to  $4$ , i. e. we have a factor of  $0,05$  to  $0,1$  combined with  $S_n$ . In the maximum of the sputtering yields, we have  $S_{\text{He}} = 5$  to  $10 S_{\text{DT}}$  which means that hydrogen and helium will contribute about equally to erosion. At lower bombarding energies,  $S_{\text{DT}}$  falls off much faster than  $S_{\text{He}}$  as is seen in Fig. 7. Thus impurity introduction will be mainly determined by helium sputtering. Neutron sputtering becomes only important if  $S_n \geq S_{\text{He}}$  and thus may only contribute at very low plasma temperatures near the first wall.

The steady-state impurity concentration in the plasma may well reach values of  $1$  to  $20$  percent, especially if  $\tau_i > \tau_{\text{DT}}$  and if  $\eta_i \eta_i^+ S_i$  is only slightly below  $1$ . This is well above the tolerable concentration for medium and high- $Z$  impurities for reaching ignition. The impurity concentration can be kept low only if  $S_{\text{DT}}$ ,  $S_{\text{He}}$  and  $S_i$  are low because of a very low plasma temperature near the first wall. Such a scheme named «Cold gas blanket» has been proposed by several authors [75, 76]. However, there is little indication wheter a quasi-steady blanket can be maintained experimentally.

## Impurity Behaviour in the Plasma

Classical theory predicts that high- $Z$  impurities are preferentially accumulated in the centre of the plasma [77–80]. However, the existing experimental data on diffusion and accumulation of impurities in high-temperature plasmas are very poor, and any preferential accumulation in the centre of the plasma has not been confirmed definitely. Only in very quiescent discharges, a tendency of impurity accumulation in the centre has been reported [82, 83]. After



instabilities have developed (kink mode, disruptive) the impurities seem to become uniformly distributed across the plasma. It is hoped that more definite answers on the diffusion of impurities and their life-time in plasmas will be achieved by the next generation of larger plasma experiments.

There are several ideas suggested to prevent the accumulation of impurities in the plasma, i. e. plasma rotation, selective acceleration and temperature gradients [84, 85, 86].

If the plasma can be rotated in the direction of the electric current at a speed slightly higher than the drift velocity of the electrons, the inward radial electric field changes its sign, thus pushing the heavy impurities outward instead of collecting them in the centre. A similar effect may be obtained by selectively accelerating the impurities, e.g. by interaction with high-frequency electromagnetic waves. The flux of diffusing impurities is also influenced by temperature gradients. If the gradient between the central plasma and the plasma near the first wall is large enough, the sign of diffusion may even be changed and impurities will diffuse towards the colder plasma surface. However, these processes have not yet been investigated in the high temperature of fusion research.

## Conclusions for a Fusion Reactor

It has been shown that the influx of impurities from the first wall to a fusion plasma cannot be prevented completely, and it may also not be necessary to prevent it completely. However, particle-balance equations show that the impurities may be built up much faster and to a much higher concentration than can be tolerated. For the first fusion reactor, it may thus be realistic to assume that only pulsed operation for a duration of 1 to 10 particle confinement times maybe achievable. To be able to reach longer burning times and even steady-state operation, more investigations are necessary in the following directions:

The plasma temperature near the first wall must be kept low in order to minimize sputtering. The possibilities of achieving a temperature distribution near the first wall as envisaged in the «cold gas blanket», i. e. a cold plasma blanket, must be explored.

The effectiveness of a divertor must be investigated, especially as a means of extracting helium.

Low- $Z$  material with low sputtering and evaporation yields should be selected. Low- $Z$  material seems to be necessary to enable larger impurity concentrations to be tolerated. Provisions must be made for the energy going to the first wall to be very uniformly distributed in space and time. This means that a limiter may have to be replaced by a divertor, i. e. a remote limiter. The proposed schemes for influencing the distribution as well as the inward and outward diffusion of the impurities in the plasma should be explored.

## Acknowledgements

We should like to thank all our colleagues at the plasma physics laboratories of Culham, Garching, Moscow, Oak Ridge and Princeton for many helpful discussions on the problems posed by impurities in plasmas.

*References*

1. *Artsimovich L.A.* // In Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 3rd Int. Conf. Novosibirsk, 1968.) 1969. V. 1. IAEA, Vienna. P. 157.
2. *Dimok D. et al.* // In Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 4th Int. Conf. Madison, 1971.) 1971. V. 1. IAEA, Vienna. P. 451.
3. *Stodiek W.* // In Controlled Fusion and Plasma Physics (Proc. 5th Europ. Conf., Grenoble, 1972.) P. 1.
4. *Furth H.B.* // 3rd Int. Symp. Toroidal Plasma Confinement, Garching, March 26–30, 1973. B9-I.
5. *Kadomtsev B.B.* // In Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion (Proc. 5th Int. Conf., Moscow, 1973).
6. *Hinnov E.* // Proc. Conf. Surface Effects in Contr. Thermonuclear Fusion Devices and Reactors. Argonne, 1974; J. Nucl. Mat. 1974. V. 53. P. 9.
7. *Rebut P. H. et al.* // Proc. Conf. Surface Effects in Contr. Thermonuclear Fusion Devices and Reactors. Argonne, 1974; J. Nucl. Mat. 1974. V. 53. P. 16.
8. *Vershkov V.A., Mirnov S.V.* // Nucl. Fusion. 1974. V. 14. P. 883.
9. *Gervids V. I., Krupin V.A.* // Moscow 1973 MATT-Trans-109.
10. *Badger B. et al.* // Wisconsin Tokamak Reactor Design UWFD-68, Nov. 1973.
11. *Mills R.G., Tenney F.H. et al.* // Princeton Reference Design Tokamak Reactor. Princeton, 1974.
12. *Hinnov E.* // Princeton Plasma Physics Laboratory, MAT-777, 1970.
13. *Meade D.M.* // Nucl. Fusion. 1974. V. 14. P. 289.
14. *Eckhartt D., Venus E.* // JET Techn. Note. 1974. V. 9. and private communications.
15. *Lawson J.D.* // Proc. Phys. Soc. (London) 1957. V. B70. P. 6.
16. *Mills R.* // Princeton Plasma Phys. Lab. MATT-728, 1970, and IEEE N.S. 1971. V. 18. P. 205.
17. *Jassby B.L.* // Princeton Plasma Phys. Lab. TM-20470. 1974.
18. *Kaminsky M.* // IEEE Trans. N.S. 1971. V. 18. P. 208 and Proc. Int. Working Session on Fusion Reactor Technol. Oak Ridge, Tenn., June 28–July 2, 1971.
19. *Behrisch R.* // Nucl. Fusion. 1972. V. 12. P. 695 and references therein.
20. *Behrisch R., Vernickel H.* // In Fusion Technology (Proc. 7th Symp., Grenoble, France, 1972.) P. 27.
21. *Scherzer B.M.U.* // IPP-Report 9/9, 1972 and ORNL, tr. 2727, 1973.
22. *Wiedersich H., Kaminsky M.S., Zwilsky K.M.* (Eds) // Proc. Conf. Surface Effects in Contr. Thermonuclear Fusion Devices and Reactors, Argonne, Jan. 1974.
23. Proc. 1st Top. Meeting Techn. Contr. Nuclear Fusion. San Diego, April 1974. CONF-740402-P2.
24. *Hultgren R., Orr R.L., Anderson P.D., Kelley K.K.* // Selected Values of Thermodynamic Properties of Metals and Alloys. John Wiley 1963 and 1973.
25. *Hopkins G.R.* // Ref. [23]. 1974. V. 2. P. 437.

26. *Kaminsky M., Das S.K.* // Ref. [23]. 1974. V. 2. P. 508.
27. *Kulcinski G. et al.* // University of Wisconsin, UWFD-108. Nucl. Fusion. to be published (1974).
28. *Powell J.R.* // Brookhaven, National Lab., private communication (1974).
29. *Guseva M.I., Gusev V.M.* // I.V. Kurchatov Institute of Nuclear Energy. Moscow, private communication (1974).
30. *Craston J.F., Hancox R., Robson A.F., Kaufmann S., Miles H.T., Ware A.A., Wesson J.A.* // 2nd Int. Conf. Peaceful Uses At. Energy (Proc. Conf. Geneva, 1958.) V. 32 UN, New York (1958) P. 414.
31. *Hancox R.* // AERE-R. 1959. P. 2957.
32. *Wehner G.K.* // Adv. Electron. Electron Phys. 1955. V. 7. P. 239.
33. *Behrisch R.* // Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. 1964. V. 35. P. 295.
34. *Kaminsky M.S.* Atomic and Ionic Impact Phenomena on Metal Surfaces. — Academic Press, Springer, 1965.
35. *Pleshivtsev N.W.* Cathode Sputtering. — Moscow: Atomizdat, 1968.
36. *Sigmund P.* // Phys. Rev. 1969. V. 189. P. 383.
37. *Primak W.* // J. Appl. Phys. 1963. V. 5. P. 3630.
38. *Behrisch R., Heiland W.* // 6th Symp. Fusion Technol. Aachen, 1970. P. 465.
39. *Bauer W., Thomas G.K.* // J. Nucl. Mat. 1972. V. 42. P. 96.
40. *Ehrents S.K., McCracken G.M.* // Radiat. Eff. 1973. V. 18. P. 245.
41. *Picreau S.T., Vernisse E.P., Vook F.L.* // Eds Int. Conf. on Application of Ion Beams to Metals. (Proc. Int. Conf. Albuquerque, 1973.) P. 533–612.
42. *Das S., Kaminsky M.* // Refs [22, 23, 41].
43. *Bauer W., Thomas G.J.* // Refs [22, 23, 41].
44. *Martel J.G., Jacques S.T., Terreault B., Vielleux C.* // Ref. [22].
45. *Roth J. et al.* // Max-Planck-Inst. für Plasmaphysik. Garching, to be published.
46. *Behrisch R., Oetjen G.H., Schilling G., Verbeek H.* // Max-Planck-Institut für Plasmaphys. Garching, to be published.
47. *Guseva M.I.* // Radioeng. Electron. Phys. 1962. V. 7. P. 563.
48. *Fairbrother Jr.F. et al.* // Vacuum. 1964. V. 4. P. 112.
49. *Wehner G.K.* // Planet Space Science . 1963.V. 11. P. 892.
50. *Oechsner H.* // Thesis, University of Würzburg, 1963.
51. *Guseva M.I., Gusev V.M.* // Conf. on Eng. Problems at Thermonucl. Reactors. Leningrad, July, 1974.
52. *Keller K.* // Plasma Physics. 1968. V. 10. P. 195.
53. *Kaminsky M., Peavey J.H., Das S.K.* // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32. P. 599 and Refs [22, 23].
54. *Behrisch R., Gähler R., Kalus J.* // J. Nucl. Mat. 1974. V. 53. P. 183 (Ref. [22]).
55. *Harling O.K., Thomas M.T., Rancitelli L.A., Brodcinski R.L.* // Amerc. Vac. Sec. 21st Nat. Symp. Anaheim, Oct., 1974.
56. *Jenkins L.H., Saltmarsh J.M., Noggle T.S., Reed R.E., Smith G.J.* // private communication, to be published.

57. *Robinson M.T.* // J. Nucl. Mat. 1974. V. 53. P. 201 (Ref. [22]).
58. *Lichtman D.* // Ref. [22]. 1974. P. 285 and references therein.
59. *McCracken G.M., Maple J.C.H.* // Brit. J. Appl. Phys. 1967. V. 18. P. 919.
60. *Ehrents K., McCracken G.M.* // Brit. J. Appl. Phys. 1969. V. 2. P. 1397; Radiat. Eff. 1970. V. 3. P. 123 and Ref. [41]. 1974. P. 585.
61. *Behrisch R., Eckstein W., Meischner P., Scherzer B.M.U., Verbeek H.* // In Atomic Collisions in Solids. (Proc. 3rd Int. Conf. Gatlinburg, 1973.) Plenum Press, 1974.
62. *Weissmann R., Sigmund P.* // Radiat. Eff. 1973. V. 19. P. 7.
63. *Böttiger J., Winterbon K.B.* // Radiat. Eff. 1973. V. 20. P. 65.
64. *Robinson M.T.* // Third General Symp. on the Interaction of Atoms with Solids. Kiev (USSR) Oct., 1974.
65. *Ishitani T., Shimizu R., Murata K.* // Jap. J. Appl. Phys. 1972. V. 11. P. 25.
66. *Verbeek H.* // Max-Planck-Inst. for Plasmaphys. 1974, to be published.
67. *Sidenius G.* // Niels Bohr Inst. Copenhagen to be published In Physics Lett. A. 1974.
68. *Lysenko S.E., Popkov G.N.* // In Fusion Reactor Design Studies (Proc. IAEA Workshop Culham, 1974.) P. 269.
69. *Düchs D., Haas G., Pfirsch D., Vernickel H.* // J. Nucl. Mat. 1974. V. 53. P. 102 (Refs [22, 23]) and Proc. of the SOFT Meeting (8th Symp. on Fusion Technology), Noordwijkerhout, June, 1974.
70. The JET Project, Chapt. 1974. V. 12. Axisymmetric Divertor for JET and Paper C-7, JET-Workshop, Culham, Febr. 1974.
71. *Meade D.M., P.D.X.* // The Poloidal Divertor Experiment, Joint EURATOM-US Workshop on Large Tokamak Designs, Culham, 1974.
72. *Stefanovsky A.M.* // I.V. Kurchatov Institute. 1974, to be published.
73. *Spitzer L.* // Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 253.
74. *Behrisch R., McCracken G.M.* // to be published.
75. *Lehnert B.* // J. Nucl. Energy. Part C. 1959. V. 1. P. 40 and 3rd Int. Symp. Toroidal Plasma Confinement. Garching, 1973. Papers C1 and C7.
76. *Verboom G.K., Rem J.* // Nucl. Fusion. 1973. V. 13. P. 69.
77. *Spitzer L.* // Jr. Astrophys. J. 1952. V. 116. P. 299.
78. *Longmire L.C., Rosenbluth M.N.* // Phys. Rev. 1956. V. 103. P. 507.
79. *Taylor J.B.* // Phys. Fluids. 1961. V. 4. P. 1142.
80. *Connor J.W.* // Plasma Physics. 1973. V. 15. P. 765.
81. *Rutherford P.H.* // Princeton, Plasma Phys. Lab. MATT-1039, 1974.
82. *Stodiek W.* // Princeton, Plasma Phys. Lab. Priv. Comm., 1974.
83. *Tazima T., Tanaka M., Yoshikawa M., Inoue E.* // Nucl. Fusion. 1974. V. 14. P. 517.
84. *Bonneview B.* // Ark. f. Fysik. 1966. V. 33. P. 255 and Plasma Physics. 1971. V. 13. P. 763.
85. *Dei-Cas R., Samain A.* // these Proceedings.
86. *Consoli T., Gardeir R.L., Tonon G.F.* // these Proceedings.

## Discussion on Paper IAEA-CN-33/S 2

*M. Kaminsky:* From your observations of Nb surface erosion due to 15 keV He bombardment you conclude that in fusion reactors one will face a problem due to helium sputtering, not helium blistering. I want to mention that J.P. Biersack's theory (see Rad. Effects. 1973. V. 18.) correctly predicts that for helium bombardment of Nb at the energies you used, the relatively high sputtering yield will indeed not permit a significant helium build-up for blister formation at higher doses, an effect which was verified experimentally by J. Martel et al. (J. Nucl. Mat. 1974. V. 53. P. 142) for niobium bombardment with helium at energies ranging from 1 to 15 keV.

However, it has been pointed out by other authors that one will have to expect relatively high fluxes of helium projectiles with energies  $E \gtrsim 100$  keV for D-T fusion reactors of various concepts (e.g. see R.D. Hazeltine et al., paper A 15-3; D. Dücks et al., paper A 17-1; M. Kaminsky, paper S 3-3). The sputtering yield decreases with increasing helium energy for the energy range discussed here, but the projected range of helium increases (and thereby the blister skin thickness) and we have shown that the blistering effect can become the dominant surface erosion process (e. g. see Nucl. Tech. 1974. V. 22. P. 373) — for 100 keV He bombardment of stainless steel at 450°C the erosion rate is 3 atoms/ion, a value which is more than two orders of magnitude higher than the calculated sputtering erosion rate of Nb at that energy ( $S \sim 0,01$ ).

To what degree blistering and sputtering will contribute to the surface erosion in a D-T fusion reactor will depend on the flux, the energy- and angular-distribution of the impinging projectiles, and on the likely occurrence of synergistic effects.

*R. Behrisch:* Blister formation has been observed for bombardment of Nb with He<sup>+</sup> ions of energies between 1 and 15 keV. However, the blisters disappear after further bombardment. Investigations on blistering at higher ion energies ( $\geq 100$  keV) have so far been concerned only with relatively low ion doses so that such an effect could not have been observed. If the model proposed to explain the disappearance of the blisters can be confirmed by further experiments, no blistering need be expected to occur at the first wall of a CTR. As the ions and charge-exchange neutrals bombarding the first wall will have a broad distribution of energies — presumably peaked around 100 eV — the range and damage profile obtained in the first wall will be similar to the range and damage profile achieved in bombarding a surface with one sharp energy and sputtering away a layer of the material approximately equivalent to the range of the incident ions in the solid. The measured sputtering yields published in the literature are mostly determined by weight loss. As the doses used in these measurements are generally much larger than the critical dose for blistering, this phenomenon is already included in the sputtering yields published.

*M. Kaminsky:* You stated in your paper that a heavy-atom impurity concentration of  $10^{-3}$  would be acceptable in D-T tokamak fusion reactor operations. While I agree that such an impurity concentration (fraction  $f$ ) would permit the ignition of a D-T tokamak, it would not allow the economic operation of such a reactor. For example, if for the economic operation of a D-T fusion reactor the fusion power loss due to bremsstrahlung alone should

not exceed 10%, then for such a heavy-ion (atom) impurity as niobium the impurity concentration fraction  $f$  should be less than  $10^{-4}$ , a value which is more than one order of magnitude less than the value you suggest for heavy atoms. For the value you quote, the larger part of the fusion power produced will be lost in bremsstrahlung and in addition will cause severe wall heat-loadings. Perhaps I should add that the value  $f < 10^{-4}$  which I quoted above assumes that the niobium is fully stripped. However, if the niobium is only partially stripped, the  $f$ -value will have to be even smaller.

*R. Behrisch:* We referred to the ignition criteria given by D. Meade and D. Eckhartl et al. In the figure it is not assumed that Nb is fully stripped.

*M. Kaminsky:* I believe that, in addition to the list of impurity atom sources you presented, a number of other sources should be considered. For example: (a) energetic photon impact can cause photo-decomposition of high-temperature stable metal oxides (e.g. certain niobium oxides), and thereby provoke the release of oxygen and, in some instances, photo-decomposed volatile metal oxides; (b) since the thin blister skins (e.g. for 100 keV Nb, skin thickness  $\sim 0,4\mu\text{m}$ ) are fairly well insulated from the bulk by the gas volume they enclose, they can be heated by photon and particle adsorption at power densities of  $> 100 \text{ W/cm}^2$  to such high temperatures that serious vapourization of the skin can occur, as we have pointed out earlier (see J. Appl. Phys. 1973. V. 44. P. 25).

*R. Behrisch:* Additional sources of impurities have been considered in Fig. 9 and in the text, but they have not been included in the formulae. As we do not expect blistering to occur, we cannot expect increased evaporation from blister covers. There may, however, be increased evaporation owing to reduced thermal conductivity of the highly damaged surface layer on the first wall.

*M. Kaminsky:* I wonder whether you have considered a scheme of plasma impurity reduction which we proposed earlier (Proceedings of International Working Session on Fusion Reactor Technology, Oak Ridge National Laboratory, US Atomic Energy Commission Report No. Conf. 719 624 (1971) 86). In this scheme we propose shaping the electron sheath which is being built up in near-surface regions of the first wall by secondary electrons (e.g.  $\gamma$ -rays, X-rays, bremsstrahlung can readily cause photoelectrons in the keV range), using auxiliary magnetic and electric fields to increase the ionization **efficiency**. The neutral particles released from the wall will be ionized by electron-ionization (and to some extent by photon-ionization) and can then be diverted away from the plasma region.

*R. Behrisch:* No, we did not consider this.

*M. Kaminsky:* You stated that you consider surface erosion due to ion (atom) sputtering to be more important than that due to neutron sputtering since the yield values for neutron sputtering are  $\sim 10^{-4}$  atoms/neutron (with the exception of our reported values of 0,2 atoms/neutron for stressed niobium with chunk emission). Firstly, as mentioned in my paper at this conference (S 3-3), other authors (F. Cafasso, N. Dudev and C. Johnson) have confirmed the chunk ejection of niobium by 14-MeV neutron impact. Secondly, many other authors have observed neutron sputtering yields greater than  $10^{-4}$  atoms/neutron. For example, for neutrons from a fission reactor (this implies a softer neutron energy spectrum than for a fusion reactor with a large 14-MeV neutron component and according to the collision cascade theory this should

mean lower sputtering yields for the first case than for the 14-MeV-neutron case) such high values as  $S = 5,7 \cdot 10^{-3}$  atoms/neutron have been observed for iron (*Baer et al.* // J. Appl. Phys. 1972. V. 43. P. 2453), and  $S = 1 - 6 \cdot 10^{-3}$  atoms/neutron for gold (*Kirk et al.* // J. Nucl. Mat. 1974. V. 53. P. 179). For 14-MeV-neutron bombardment of gold (unknown surface conditions in ductile material) Garber et al. reported  $S = 3 \cdot 10^{-3}$  atoms per neutron (JETP Lett. 1968. V. 7. P. 296).

If a sputtering yield of  $\sim 0,2$  atoms/neutron has to be expected for 14 MeV neutron-irradiated highly stressed niobium surfaces with a rough surface finish, then the surface erosion will be more serious than that caused by ion (atom) impact in reactor operations, as pointed out by Kulcinski et al. (J. Nucl. Mat. 1974. V. 53. P. 31) and by ourselves (Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32. P. 599).

*R. Behrisch:* We have shown that the contribution to impurity influx by neutron sputtering becomes severe only if the neutron sputtering yield  $S_n$  is about equal to or larger than the sputtering yield of the He ions. For Nb if we take  $S_n \lesssim 8 \cdot 10^{-4}$ , this means a plasma temperature of  $\lesssim 100$  eV near the first wall.

*J.P.F. Conrads:* With reference to the evaluation of your equation describing  $\eta_i/\eta_{D-T}$ , I would like to ask what assumptions you made concerning:

1. the plasma capture efficiency of the divertor;
2. the hold-up efficiency of the divertor;

3. the plasma parameters (e.g. plasma radius,  $\eta_{D-T}(r)$ ,  $T_{D-T}(r)$ ) and beam parameters (e.g. energy, divergency) regarding the refuelling?

*R. Behrisch:* It was assumed that the plasma capture efficiency of the divertor ( $1 - \eta$ ) is large (i. e.  $\simeq 90\%$ ), that backstreaming from the divertor is slight, that  $R_{D-T} \simeq 1$  and that  $A_1 \simeq A \simeq 0,3$  to  $0,5$ . The plasma radius and density  $\eta_{D-T}$  do not enter into the formula. For a more detailed calculation we also have to make assumptions about  $T_{D-T}(r)$  and the beam parameters. If no divertor is built in, the factor combined with  $S_{D-T}$  may become twice as large.

## ТОКАМАКИ И АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ \*)

В связи с успешным продвижением исследований по управляемым термоядерным реакциям на установках Токамак, на эти установки возлагаются большие надежды и существуют планы строительства токамаков более крупного масштаба. При этом возникает необходимость прогнозирования параметров плазмы в крупных установках, что требует подчас экстраполяции полученных экспериментально соотношений на порядки величин. Если бы была достигнута полная ясность в понимании протекающих в плазме явлений, то такая экстраполяция не представляла бы затруднений, так как все параметры можно было бы рассчитать теоретически. Однако в настоящее время такой ясности нет, и полная, согласующаяся с экспериментом теория поведения высокотемпературной плазмы в тороидальных ловушках отсутствует (в силу сложности протекающих в плазме коллективных нелинейных процессов). Поэтому в значительной мере приходится опираться на эмпирические закономерности, определенные в ограниченной области изменения параметров. В этой ситуации представляется не лишним интереса бросить несколько более общий взгляд на плазму токамака с точки зрения широко известного подхода, опирающегося на анализ размерностей.

Упрощенно говоря, токамак — это тороидальная камера с малым радиусом  $a$  и большим  $R$ , расположенная внутри катушек, создающих сильное продольное магнитное поле  $B_z$ . Камера заполнена квазинейтральной водородной или дейтериевой плазмой с плотностью частиц  $n$ , и по плазме протекает ток  $I$ , создающий азимутальное (точнее, полоидальное) магнитное поле  $B_\theta = 2I/(ca)$ . Плазма в тороидальных системах обычно находится в локальном термодинамическом равновесии, так что в каждой точке функции распределения частиц по скоростям близки к максвелловским, с температурами электронов и ионов  $T_e$ ,  $T_i$  и скоростями  $v_e$ ,  $v_i$  (в отдельных режимах возникают электронные пучки, но мы пока такие режимы исключаем из рассмотрения).

Рассмотрим теперь некоторую идеализированную ситуацию, а именно, предположим, что камера токамака заполнена чистой (без примесей) полностью ионизованной водородной плазмой с некоторыми идеальными стандартными условиями на стенках (например, полное поглощение поступающих на стенку заряженных частиц \*\*) или их возвращение в плазму с нулевой энергией и т. п.). Тем самым мы отвлекаемся от сложных (но представляющих побочными) явлений, связанных с присутствием нейтральных частиц и примесей. Другими словами, мы задаемся вопросом, как в токамаке должна была бы вести себя полностью ионизованная чистая плазма. Так как в такой постановке все квантовые явления (например, ионизация, излучение и т. д.) исключены, то поведение такой плазмы пол-

\*) Физика плазмы. 1975. Т. 1. Вып. 4. С. 531–535.

\*\*) При этом для поддержания плотности должен иметься объемный источник частиц.



ностью определяется классическими законами движения составляющих ее заряженных частиц и уравнениями Максвелла для электромагнитного поля. Будем считать, что плазма всегда покоится, т. е. у нее нет других скоростей, кроме медленной диффузии к стенкам и небольшого относительного движения электронов и ионов, создающего электрический ток. Тогда скорости  $v_e$  и  $v_i$  можно считать величинами производными, так что основными являются только следующие 11 величин:

$$a, R, B_z, B_\theta, c, e, m, M, T_e, T_i, n, \quad (1)$$

где  $e$  — заряд электрона,  $m$  — его масса,  $M$  — масса иона,  $c$  — скорость света. Здесь шесть последних величин являются чисто плазменными, а первые четыре определяются внешними условиями. Под  $T_e, T_i, n$  можно понимать средние по сечению значения, так как профили этих функций определяются теми же самыми параметрами (1).

Из одиннадцати величин (1) можно составить восемь безразмерных комбинаций, которые должны характеризовать параметры плазмы в не зависящей от выбранной системы единиц форме. Разумеется, эти безразмерные величины желательно выбрать таким образом, чтобы они отражали некоторое физическое содержание. Мы выберем следующие безразмерные параметры, которые сразу разобьем на три группы:

$$\text{I. } \nu = \frac{qR}{\lambda_e}, \quad K = \frac{\rho_\theta}{a}, \quad \beta_\theta = \frac{8\pi n(T_e + T_i)}{B_\theta^2}, \quad (2)$$

$$\text{II. } A = \frac{R}{a}, \quad \theta = \frac{T_e}{T_i}, \quad q = \frac{aB_z}{RB_\theta}, \quad (3)$$

$$\text{III. } \mu = \frac{m}{M}, \quad N = \frac{4\pi}{3} r_d^3 n, \quad (4)$$

где  $r_d$  — дебаевский радиус,  $N$  — дебаевское число (т. е. число частиц в дебаевской сфере экранирования),  $\nu$  — параметр бесстолкновительности электронов,  $\lambda_e \sim Nr_d$  — длина пробега электронов,  $\rho_\theta = Mcc_s/(eB_\theta)$  — средний ларморовский радиус ионов по электронной температуре в поперечном поле,  $c_s = \sqrt{T_e/M}$  — скорость звука,  $q$  — так называемый запас устойчивости по отношению к винтовой моде возмущений.

В первую группу (2) мы включили величины, соотношения между которыми представляют собой наибольший интерес. В группе (3) содержатся величины с ограниченным изменением (в наиболее интересных реальных условиях все эти величины удерживаются в интервале от 1 до 6). В третьей группе (4) содержится один очень малый параметр  $\mu = m/M$ , с ограниченным изменением, и один очень большой параметр  $N$ . Параметр  $N$  представляется нам «дежурным»: в обычных спокойных условиях без убегающих электронов он, скорее всего, не имеет никакого отношения к рассматриваемому здесь вопросу об удержании плазмы (другими словами, величина  $N^{-1} \rightarrow 0$  выпадает из группы основных параметров). Параметр  $N$  может проявиться только в необычных условиях, например, при аномальном сопротивлении из-за раскачки колебаний пучком убегающих электронов. (Заметим, что важный с этой точки зрения параметр  $u/c_s$ , где  $u$  — направленная токовая скорость электронов, а  $c_s$  — скорость звука, выражается через наши безразмерные параметры в виде  $u/c_s \sim K/\beta_\theta$ ).

Рассмотрим теперь обычные условия в токамаке, когда плазма нагревается джоулевым теплом протекающего по ней тока. В этих условиях

температуры электронов и ионов не являются независимыми, а определяются всеми остальными параметрами плазмы. Таким образом, два из безразмерных параметров (2)–(4) являются функциями остальных. В качестве зависящих величин естественно принять  $\beta_\theta$ ,  $\theta$ , так что имеем, в частности, для  $\beta_\theta$

$$\beta_\theta = \beta_\theta(\nu, K, q, \mu, A). \quad (5)$$

Здесь мы опустили зависимость от  $N$ , а кроме того, в (5) для водородной плазмы и фиксированного значения аспектного отношения  $A$  можно опустить зависимость от двух последних величин. Что касается зависимости от  $q$ , то она безусловно представляет практический интерес, но не является очень интересной с точки зрения обсуждаемого здесь вопроса далекой экстраполяции, так как  $q$  обычно изменяется в ограниченной области значений. Таким образом, главная зависимость —  $\beta_\theta = \beta_\theta(\nu, K)$ .

Разумеется, мы здесь не можем определить, какая из величин  $\nu$ ,  $K$ , или какая-то их комбинация является основной. В частности, не исключено, что очень важную роль играет «параметр замагниченности» электронов  $\Omega_e \tau_e$ , где  $\Omega_e = eB_z/mc$ ,  $\tau_e = \lambda_e \sqrt{m/T_e}$ . Этот параметр может быть выражен через наши безразмерные величины довольно сложным образом,  $\Omega_e \tau_e \sim qA/(\nu K \sqrt{\mu})$ , и видно, что он всегда велик.

Однако уже из полученного соотношения (5) вытекает одно очень интересное следствие. А именно, поскольку мы допустили, что один из параметров, а именно  $N$ , представляется несущественным, то среди величин (1) при заданных безразмерных параметрах (2), (3) и  $\mu$  одна является свободной. Выберем в качестве этой величины магнитное поле  $B$ . Тогда с помощью (2), (3) нетрудно получить следующие условия подобия, при которых безразмерные параметры остаются постоянными:

$$a \sim B^{-4/5}, \quad n \sim B^{8/5}, \quad T \sim B^{2/5}. \quad (6)$$

Таким образом, имеется однопараметрическое семейство токамаков, являющихся подобными во всех отношениях, кроме характеристик тех мелкомасштабных высокочастотных процессов, которые развиваются при пучково-плазменных неустойчивостях, и в которых проявляется дебаевское число  $N$ .

Заметим, что, согласно (6), в качестве количественной характеристики семейства подобных токамаков можно принять величину  $aB^{4/5}$ , которую приближенно можно заменить на  $I \sim aB$ . Другими словами, определяющим параметром токамака следует считать именно произведение  $aB$  или ток  $I \sim aB$ , а не продольное поле само по себе. Далее, согласно (6), энергия стабилизирующего поля  $W \sim a^3 B^2 \sim B^{-2/5}$  для подобных токамаков убывает с ростом  $B$ , но не очень быстро; параметр  $nT_E$  (см. (7)) также медленно возрастает с  $B$  как  $B^{2/5}$ .

Продвинуться дальше можно, опираясь на некоторые правдоподобные допущения. Введем в качестве масштабов длины, времени и массы соответственно  $a$ ,  $\tau_e$ ,  $m$ . С помощью этих величин и безразмерных параметров (2)–(4) можно составить величину любой размерности. С точки зрения проблемы удержания плазмы нас прежде всего интересует так называемое энергетическое время жизни  $\tau_E$ . Если считать, что утечка энергии носит диффузионный характер, т. е.  $\tau_E \sim a^2$ , то выражение для  $\tau_E$  естественно

выбрать в виде

$$\tau_E = \frac{\alpha \tau_e}{K^2}, \quad (7)$$

где величина  $\alpha$  может зависеть от безразмерных параметров. Л.А. Арцимович предположил [1], что энергия выносится по «электронному каналу», так что  $\tau_E$  определяется электронной теплопроводностью. Он допустил также, что электронная температуропроводность  $\chi_e$  определяется так называемой «псевдоклассической» зависимостью  $\chi_e \approx 5\mu\rho_\theta^2/\tau_e$ , что соответствует допущению  $\alpha = \text{const}$ . При этом из баланса джоулева тепла и потерь энергии следует  $\beta_\theta \sim \sqrt{\alpha} = \text{const}$ . Величина  $\beta_\theta$  в самом деле является довольно «вялой» функцией безразмерных параметров  $\nu$ ,  $K$ ,  $q$ : при изменении этих параметров в широком интервале значений величина  $\beta_\theta$  изменяется не более, чем в несколько раз.

Но  $\beta_\theta$  все же не является строго постоянной и, в частности, хотелось бы знать, как будет вести себя  $\beta_\theta$ , по мере повышения температуры и уменьшения параметра столкновительности  $\nu \sim T^{-2}$ .

Неоклассическая теория [2] предсказывает, что при  $\nu < A^{-3/2}$  мы вступаем в область так называемой «банановой» диффузии, и коэффициенты переноса будут убывать с  $\nu$ . Напротив, теория неустойчивостей на запертых частицах [3] предсказывает возрастание коэффициентов переноса в этой области. Существует также мнение [4], что при продвижении в глубоко бесстолкновительную область,  $\nu \rightarrow 0$ , может возникнуть диффузия типа бомовской, т. е. начнет играть роль параметр  $\Omega_e \tau_e \sim 1/(\nu K)$ . Разумеется, анализ размерностей не может исключить ни одну из этих возможностей, но он позволяет высказать некоторые соображения относительно возможных законов подобия.

Сделаем, например, правдоподобное допущение, что коэффициент  $\alpha$  в (7) зависит только от параметров  $\nu$ ,  $K$ , характеризующих свойства удержания плазмы вдоль и поперек магнитного поля, и не зависит от  $\beta_\theta$ . Если  $\alpha$  не зависит от  $\beta_\theta$ , то с точки зрения моделирования этой величины можно говорить уже о двухпараметрическом семействе подобных систем. Фиксируя все параметры, кроме  $N$  и  $\beta_\theta$ , мы получим следующие условия подобия (свободными величинами считаются  $n$  и  $B$ ):

$$a \sim \frac{n^{1/3}}{B^{4/3}}, \quad T \sim \left(\frac{n}{B}\right)^{2/3}, \quad \beta_\theta \sim \frac{n^{5/3}}{B^{8/3}}. \quad (8)$$

Таким образом, если мы хотим воспроизвести те же самые параметры  $\nu$ ,  $K$  и  $\alpha = \alpha(\nu, K)$  на модельной установке, то можно выбрать параметры этой установки согласно (8), но при этом мы должны иметь возможность варьирования  $\beta_\theta$ , например, с помощью дополнительных методов нагрева.

Если бы мы в качестве определяющих величин выбрали ток  $I$  и поле  $B$ , то вместо соотношений (8) получили бы  $T \sim I^2$ ,  $n \sim I^3 B$ ,  $\beta_\theta \sim I^4/B$ . Как мы видим,  $\beta_\theta$  должна быстро возрастать с  $I$ . Можно сказать, что меньшая установка с джоулевым нагревом моделирует большую установку с дополнительным нагревом.

Разумеется, не исключено, что  $\alpha$  может очень слабо зависеть от одного из параметров, например, от  $K$ , и тогда вся проблема сводится к определению функции  $\alpha(\nu)$  только от одного параметра  $\nu$ . Однако пока еще мы не располагаем данными для этого утверждения, а с точки зрения одной лишь теории размерностей зависимость от  $K$  исключена быть не может.

Например, в установке ТМ-3 в области малых частот столкновений время удержания пропорционально величине  $\tau_B/\nu$  [5], где  $\tau_B$  — боровское время, что приводит к зависимости  $\alpha \sim K$  и из соотношения  $\beta_\theta^2 \sim K$  следует хорошо установленная на ТМ-3 [6] эмпирическая закономерность  $T_e n^{4/3} \sim I^2$ .

Размерностный анализ позволяет высказать еще одно соображение. Заметим, что при фиксированных магнитном поле,  $q$  и  $A$  безразмерные параметры  $\nu \sim nR/T^2$ ,  $K \sim \sqrt{T}/I$ . Отсюда видно, что при одновременном увеличении размеров установки, тока и температуры эти параметры изменятся не так быстро, как при изменении только одной из этих величин. Например, при увеличении размера  $R$  на порядок и той же самой плотности, температура может быть увеличена втрое без изменения  $\nu$ , а следующее утроение температуры уменьшает  $\nu$  всего лишь на порядок величины. Точно также увеличение тока  $I$ , сопровождаемое ростом  $T$ , не столь сильно уменьшает  $K$ , как изменение одного лишь  $I$ . Таким образом, при переходе к более крупным установкам, когда одновременно увеличиваются и размеры, и температура, экстраполяция может быть не столь велика, как кажется с первого взгляда. Например, установка Т-10 при параметрах  $n = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 3 \text{ кэВ}$ ,  $a = 0,4 \text{ м}$ ,  $R = 1,5 \text{ м}$ ,  $I = 0,8 \text{ Ма}$  и установка Т-20 с предполагаемыми параметрами  $n = 5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $T = 10 \text{ кэВ}$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ,  $R = 5 \text{ м}$ ,  $I = 5 \text{ Ма}$  обладают одинаковыми  $\nu$  и лишь втрое различающимися  $K$ .

И, наконец, заметим, что среди основных безразмерных параметров есть несколько очень больших, например,  $N$ ,  $\Omega_e \tau_e$ ,  $a/\rho\theta$ . Не исключено, что при определенных условиях даже малые эффекты (например, взаимодействие со стенками или небольшие возмущения магнитного поля) в комбинации с этими большими параметрами могут приводить к заметным изменениям в плазме.

Другими словами, при наличии таких параметров не кажется удивительной сильная реакция плазмы на небольшие внешние возмущения, хотя для детального выяснения причин такой реакции требуется развить определенную физическую картину явлений.

#### Список литературы

1. Арцимович Л.А. // Письма ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 70.
2. Галеев А.А., Сагдеев Р.З. Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1973. Т. 7. С. 205.
3. Kadomtsev B.B., Pogutse O.P. // Nucl. Fus. 1971. V. 11. P. 67.
4. Okabayashi M., Schmidt Y., Sennis Y., Yoshikawa S. // Proc. of 5 Europ. Conf. on Contr. Fusion and Plasma Physics. Grenoble, 1972. V. 1. P. 92.
5. Kadomtsev B.B. // Sixth European Conf. on Contr. Fusion and Plasma Physics. Moscow, 1973. V. 2. P. 1.
6. Бобровский Г.А., Кузнецов Э.И., Разумова К.А. // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. С. 1103.

## О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СРЫВА В ТОКАМАКАХ \*)

Неустойчивость срыва (называемая в английской литературе «дизруптивной») представляет собой весьма необычный и очень интересный вид плазменной активности в токамаках. Она была открыта довольно давно [1], и за истекшее время накоплен очень большой объем экспериментальной информации на эту тему [2–8]. Известно, что неустойчивость срыва развивается при большой величине продольного тока, когда параметр запаса по винтовой устойчивости  $q = rB_z/(RB_\theta)$  ( $B_z$  — продольное,  $B_\theta$  — азимутальное поле,  $R$  — большой радиус тора,  $r$  — расстояние от магнитной оси) на границе плазмы становится не очень большим, скажем меньше  $3 \div 4$ . Неустойчивость проявляется либо в одиночных, либо в периодически повторяющихся резких изменениях параметров плазмы. Плазменный шнур вдруг резко, за 30–100 мкс, расширяется в радиальном направлении (по малому радиусу), внутри него происходит перераспределение тока, так что плотность тока понижается в центральной области и повышается на периферии. При таком перераспределении тока индуктивность шнура убывает, часть энергии магнитного поля тока передается плазме (а часть последней выбрасывается на стенку). Из-за изменения условий равновесия шнур смещается внутрь по большому радиусу.

Неустойчивость срыва, как правило, сопровождается отрицательными «пичками» на напряжении обхода, что отвечает выбросу из плазмы части полоидального потока магнитного поля. Часто неустойчивости срыва предшествует развитие винтовых мод на периферии шнура. Как показывают последние эксперименты, неустойчивость срыва сравнительно легко может быть «запущена» либо слабыми резонансными винтовыми возмущениями [5], либо достаточно большими внешними возмущениями [4].

Несмотря на целый ряд попыток теоретического объяснения неустойчивости срыва [9–12], удовлетворительной картины этого явления пока достигнуто не было. И в этом плане особый интерес представляет недавно выполненная экспериментальная работа Гёлера, Стодика, Саутхофа [8]. В этой работе с помощью исследования мягкого рентгеновского излучения плазмы была обнаружена так называемая внутренняя неустойчивость срыва. Эта неустойчивость проявляется в виде пилообразных колебаний рентгеновского излучения. Его изучение показало, что в небольшой области около центра шнура имеют место периодические колебания, которые можно описать качественно следующим образом. По измерению профиля температуры и при фиксированном параметре  $q_a = 4,6$  на границе шнура можно принять, что в области  $r < r_s \approx 2$  см величина  $q$  снижается до значений, меньше единицы. При этом, как видно по рентгеновскому излучению, в плазме развивается медленная неустойчивость моды  $m = 1$ ,  $n = 1$  ( $m$  — азимутальное,  $n$  — продольное число винтового возмущения). Эта неустойчивость нарастает с инкрементом  $\gamma \sim 3 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$  до амплитуды по-

---

\*) Физика плазмы. 1975. Т. 1. Вып. 5. С. 710–715.

рядка 10% от полного излучения, а затем она сменяется быстрым срывом, соответствующим резкому охлаждению центральной области ( $r < 2$  см) и нагреву периферии ( $2 < r < 4$  см). Этот срыв выглядит как симметричная мода  $m = 0$ ,  $n = 0$ . После срыва наступает медленный процесс релаксации к состоянию  $q < 1$  в центре и вся картина снова повторяется. Эти результаты естественно приводят к следующей, описываемой ниже картине явления.

Рассмотрим винтовые движения плазмы токамака конечной амплитуды и, учитывая факт  $q(0) < 1$ , будем считать, что эти движения соответствуют моде  $m = 1$ . В пренебрежении \*) малыми членами порядка  $r^2/R^2$

такие движения могут быть описаны [10] уравнениями магнитной гидродинамики для вспомогательного поля  $\mathbf{V}_* = \mathbf{V}_\perp - \frac{rB_z}{R} \mathbf{e}_\theta$ , где  $\mathbf{V}_\perp$  — поперечная компонента магнитного поля,  $\mathbf{e}_\theta$  — азимутальный единичный вектор,  $B_z$  — продольное поле. Распределение этого поля в исходном состоянии изображено на рис. 1а. Как мы видим, поле  $B_*$  обращается в нуль на резонансной поверхности  $q = 1$  (она изображена на рис. 1а штриховой линией). На этой поверхности силовые линии имеют в точности такой же шаг, как и шаг возмущения с  $m = 1$ ,  $n = 1$ , так что они беспрепятственно могут раздвигаться винтовым возмущением. Но по обе стороны от этой поверхности силовые линии имеют наклон разного знака по отношению к винтовому возмущению, что соответствует противоположно

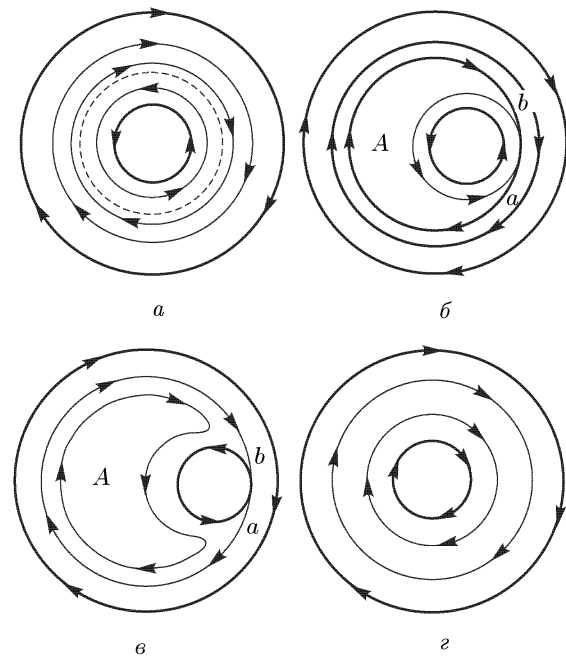


Рис. 1. Вспомогательное поле  $\mathbf{V}_*$  в шнура в исходном состоянии (а), после установления равновесия при  $\sigma = \infty$  (б), при перезамыкании из-за конечной проводимости (в) и после перезамыкания (г)

направленным полям  $B_*$  по разные стороны от резонансной точки  $r = r_s$ . Естественно считать, что поле  $B_*$  линейно изменяется с  $r$  по обе стороны от точки  $r_s$  (см. рис. 2а, где  $B_*$  — разность между  $B_\theta$  и  $(r/R)B_z$ ). С точностью до малых порядка  $r/R$  (включительно) винтовые движения шнура можно полностью описать в терминах  $\mathbf{V}_*$ , т. е. нам достаточно лишь рассмотреть движение проводящей несжимаемой жидкости с полем  $\mathbf{V}_*$  в одном только поперечном течении шнура.

Легко видеть, что в исходном состоянии внутренняя часть шнура,  $r < r_s$ , находится в состоянии почти безразличного равновесия. В самом

\*) Члены порядка  $r^2/R^2$ , важные в линейной теории устойчивости, для нашей нелинейной задачи оказываются несущественными.

деле, при приближении к точке  $r = r_s$  давление магнитного поля, пропорциональное  $B_*^2$ , квадратично убывает с  $r - r_s$ , так что около  $r_s$  нет сил, которые могли бы восстановить очень малое смещение внутреннего шнура в сторону. Но при достаточно большом смещении силовые линии вблизи точки  $r_s$  сгущаются, так что при  $\sigma = \infty$  имеется нелинейная стабилизация неустойчивости по отношению к сдвигу центральной части шнура, т. е. винтового возмущения.

Напомним теперь результаты теоретической работы [13], где была рассмотрена нелинейная стадия развития внутренней моды  $m = 1$  в приближении идеальной проводимости,  $\sigma = \infty$ . Авторы этой работы учли, что малые члены  $\sim r^2/R^2$  приводят к слабой неустойчивости центральной части шнура (см. также [14]). Плотность энергии этой неустойчивости  $\sim \left(\frac{\xi}{r_s}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_s}{R}\right)^2 \frac{B_*^2}{8\pi}$ , где  $\xi$  — смещение шнура, так что отклоняющая сила  $\sim \frac{\xi r_s B_*^2}{4\pi R^2}$ , где  $B_*^2$  — некоторое среднее значение квадрата поля  $B_*^2$  во внутренней области. Ясно, что при некотором смещении  $\xi$ , когда в области вблизи  $r_s$  встретятся поля  $\sim (r_s/R) B_*$ , давление этих полей прекратит дальнейшее смещение. Так как вблизи  $r_s$  поле меняется линейно с радиусом, то равновесное смещение будет порядка  $\xi \sim r_s^2/R$  (см. рис. 1 б). Нетрудно оценить инкремент этой неустойчивости. Так как вещество выдавливается только из тонкого слоя  $\sim r_s^2/R$ , то он несколько меньше, чем при простом смещении всего шнура как целого под действием отклоняющей силы:

$$\gamma \sim \left(\frac{r_s}{R}\right)^3 \frac{c_*}{r_s}, \quad (1)$$

где  $c_* = \sqrt{B_*^2/(4\pi n m_i)}$  — характерная альвеновская скорость для внутреннего шнура.

Итак, работа [13] достаточно хорошо объясняет, почему в плазме может нарастать внутренняя мода  $m = 1$  со сравнительно умеренным инкрементом (1) (он лишь в несколько раз больше экспериментально наблюдаемого). Однако она не описывает того, что происходит в плазме с конечной проводимостью.

Чтобы разобраться в дальнейшей эволюции нелинейного возмущения, обратимся к рис. 1 б. Как мы видим, за счет слабой неустойчивости в плазме образуется тонкий слой  $ab$  со встречными полями, т. е. с бесконечной плотностью тока между ними. Такой слой не может долго существовать в среде с конечной проводимостью. Из-за конечной проводимости силовые линии перезамкнутся, как показано на рис. 1 в. Но такое перезамыкание усиливает поле в области  $A$ , противоположной слою  $ab$ , куда перемещаются перезамкнувшиеся линии. Соответственно увеличится сила, которая прижимает внутренний шнур к противоположному полю, и поверхностный ток усилится. В результате процесс перезамыкания будет становиться все более интенсивным, и он не может остановиться до тех пор, пока вся внутренняя область силовых линий не перезамкнется с внешней и поле  $B_*$  не станет одного знака во всем шнуре. Другими словами, после перезамыкания  $q$  станет больше единицы во всей области, т. е. ток перераспределится от центра к периферии. Нам представляется, что именно это явление и происходит при внутренней неустойчивости срыва.

Оценим теперь характерное время процесса перезамыкания силовых линий. Учтем, что в силу вмороженности продольного поля течение плазмы с винтовой симметрией является несжимаемым. Поэтому при перезамыкании вещество из тонкого слоя толщины  $\delta$ , где происходит уничтожение встречных полей, должно уноситься в стороны и затем в область  $A$  перезамыкающимися силовыми линиями. Скорость выброса вещества из слоя  $ab$  определяется давлением магнитного поля в этом слое, т. е. она порядка  $c_*$ . А скорость смещения шнура к слою, очевидно, в  $r_s/\delta$  меньше. Время, за которое вылетает вещество из слоя  $t_0 \sim r_s/c_*$ , так что толщину слоя  $\delta$  можно оценить из соотношения  $\delta^2 \sim c^2 t_0 / (\pi\sigma) \sim c^2 r_s / (\pi\sigma c_*)$ . Теперь мы можем оценить полное время процесса перезамыкания  $t \sim \frac{r_s}{\delta} t_0 \sim \frac{r_s^2}{c_* \delta}$ :

$$t \sim r_s^{3/2} \left( \frac{\pi\sigma}{c^2 c_*} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Для параметров плазмы в эксперименте [8] эта оценка дает время порядка 30 мкс, что соответствует экспериментально наблюдаемому времени исчезновения моды  $m = 1$  и перестройки распределения температуры шнура.

Рассмотрим теперь несколько подробнее саму перестройку полей. Введем в рассмотрение функцию потока  $\psi$ , связанную с  $\mathbf{B}_*$  соотношением

$$\mathbf{B}_* = [e_z \nabla \psi], \quad (3)$$

где  $e_z$  — единичный вектор, направленный вдоль шнура. В исходном цилиндрически-симметричном состоянии  $\frac{\partial \psi}{\partial r} = B_{*\theta} = B_\theta - \frac{r}{R} B_z$ ,

и  $\psi$  имеет вид кривой 1 на рис. 2 для случая  $q < 1$  в области  $r < r_s$ . Величина  $\psi$  определяет магнитный поток вомогательного поля  $B_*$ . Как видно из рис. 1 б, при перезамыкании силовых линий магнитный поток между соседними линиями сохраняется, но после перезамыкания области с одним и тем же потоком  $\psi - \psi(r_s)$  с левой и правой стороны от точки  $r_s$  оказываются соединенными вместе (см. рис. 2 б).

После окончания перезамыкания две площади  $2\pi r_1 dr_1$  и  $2\pi r_2 dr_2$ , отвечающие величине  $d\psi$  на рис. 2 б, объединяются вместе в кольцевой слой площадью  $2\pi r dr$ . Таким образом, начальная  $\psi_0$  и конечная  $\psi_\infty$  функции потока оказываются связанными соотношениями

$$r_1 dr_1 + r_2 dr_2 = r dr, \quad \left. \frac{d\psi_0}{dr} \right|_{r_1} dr_1 = - \left. \frac{d\psi_0}{dr} \right|_{r_2} dr_2 = - \frac{d\psi_\infty}{dr} dr, \quad (4)$$

где  $r_1, r_2, r$  соответствуют одному и тому же значению  $\psi$ .

С помощью этих соотношений нетрудно найти  $\psi_\infty$  по  $\psi_0$ . Сама функция  $\psi_\infty$  выглядит, как показано на рис. 2 б, т. е. просто участок  $\psi_0(r)$  от

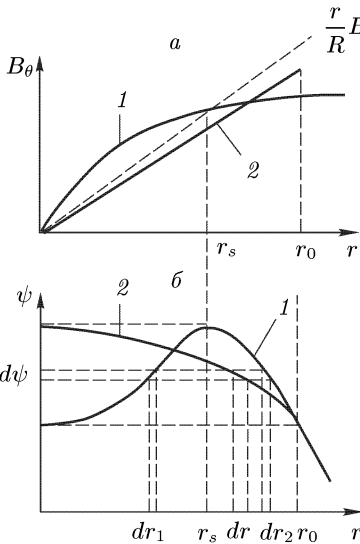


Рис. 2. Азимутальное магнитное поле (а) и функция потока (б) в исходном состоянии (1) и после перезамыкания (2)



точки  $r_s$  до точки  $r_0$ , где  $\psi(r_0) = \psi(0)$  растягивается на всю область от 0 до  $r_0$ , а в области  $r > r_0$  функция  $\psi$  сохраняет свое прежнее значение.

В качестве примера рассмотрим простой случай:

$$\psi_0 = \frac{\alpha r^2}{2} \left( r_s^2 - \frac{r^2}{2} \right), \quad B_\theta = \frac{r}{R} B_z + \alpha r (r_s^2 - r^2), \quad (5)$$

где  $\alpha$  — некоторая константа. При такой зависимости  $\psi$  от  $r^2$  величина  $r_0^2 = 2r_s^2$ .

С помощью соотношений (4) нетрудно найти  $\psi_\infty$ :

$$\psi_\infty = \frac{\alpha r_s^4}{4} - \frac{\alpha r^4}{16}, \quad B_\theta = \frac{r}{R} B_z - \frac{\alpha r^3}{4}. \quad (6)$$

Соответствующее перераспределенное поле  $B_\theta$  изображено кривой 2 на рис. 2 а. Как мы видим, величина  $B_* = B_\theta - \frac{r}{R} B_z$  во всей области перезамыкания значительно уменьшилась. Оказывается, что более 90 % магнитной энергии поля  $B_*$  исчезает, т. е. переходят в тепло за счет джоулева энерговыделения в слое  $ab$  рис. 1. В области  $0 < r < r_0$  ток после перезамыкания распределен практически однородно, а на границе области появляется тонкий слой со скачком поля  $B_\theta$ , т. е. с отрицательно направленным током в точке  $r_0$ . В последующие моменты времени этой слой будет расплываться со скиновым временем.

Итак, проведенное рассмотрение дает вполне правдоподобное объяснение внутренней неустойчивости срыва. Теперь кратко обсудим возможный механизм внешнего срыва.

Заметим, что внутренний срыв скорее всего происходит спокойно и не затрагивает периферии шнура только в том случае, если он очень глубоко «запрован» в глубь шнура, т. е. ограничен областью очень малых  $r_s \ll a$  ( $a$  — радиус шнура). Если на границе шнура  $q$  не очень велико, то внутренняя мода  $m = 1$  через кривизну шнура и свои собственные нелинейные гармоники может связываться с винтовыми колебаниями границы шнура. Грубо говоря, внутренняя мода «встряхивает» весь шнур. Далее, перераспределение тока, его более однородное распределение по радиусу и даже образование области с обратным током в точке  $r = r_0$  может резко ухудшить условия устойчивости для периферийных мод с большими  $m$ . В последних экспериментах Муховатова [3, 4], например, наблюдается одновременное развитие нескольких мод с различными  $m$  на периферии шнура. Появление этих мод и сильная несимметрия конфигурации может привести к аномальной диффузии плазмы на периферии шнура типа бомовской. Заметим, что скорость расширения границы шнура во время неустойчивости срыва имеет порядок величины бомовской диффузии.

Таким образом, нам кажется правдоподобным объяснение неустойчивости срыва как результата развития взаимодействующих между собой внешних винтовых мод и внутренней нелинейной неустойчивости  $m = 1$ , которые сопровождаются резким расширением шнура типа вспышки бомовской диффузии. При этом отрицательный пичок на напряжении обхода может быть связан с развитием мод, у которых резонансная точка  $q = m$  лежит снаружи от шнура, так что их развитие сопровождается вытеснением части полоидального потока из периферийной области. Для подробного рассмотрения всех затронутых вопросов требуется более детальный анализ экспериментальных данных.

Автор благодарен В.С. Муховатову за обсуждение изложенных выше соображений.

*Список литературы*

1. Горбунов Е.П., Разумова К.А. // Атомная энергия. 1963. Т. 15. С. 363.
2. Artsimovich L.A. // Nucl. Fusion. 1972. V. 12. P. 215.
3. Vlasenkov V.S., Krupin V.A., Leonov V.M., Merezhkin V.G., Mukhovatov V.S. // Proc of the 6th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics. Moscow, 1973. V. 1. P. 55.
4. Власенков В.С., Леонов В.М., Мережкин В.Г., Муховатов В.С. // Докл. А2-1 на V Конф. по УТС и физике плазмы. Токио, 1974.
5. Karger F., Wobig H., Corti S., Gernhardt J., Klüber O., Lisitano G., McCormick K., Meisel D., Sesnic S. // Ibid. A8-2. Tokyo, 1974.
6. Jacobson P.A. // Report MATT-1038. Princeton, 1974.
7. Prater R., Freeman R.L., Hamada J., Moeller C., Ohkawa T., Tamano T. // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 34. P. 1432.
8. Goeler S. von, Stodiek W., Sauthoff N. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 1201.
9. Ohkawa T. // Report GA-A13044. 1974.
10. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 575.
11. White R., Moticello D., Rosenbluth M.N., Strauss H., Kadomtsev B.B. // 5th Internat. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nucl. Fus. Res., paper A13-2. Tokyo, 1974.
12. Minardi E. // Ibid. A13-2. Tokyo, 1974.
13. Rosenbluth M.N., Dagazian R.Y., Rutherford P.H. // Phys. Fluids. 1973. V. 16. P. 1894.
14. Шафранов В.Д. // ЖТФ. 1970. Т. 40. С. 241.

## CROSS-FIELD THERMAL CONDUCTION AND TRANSPORT \*)

The IAEA Advisory Group Meeting on Cross-Field Thermal Conduction and Transport was held in Kiev, Ukrainian SSR, 21 to 25 November 1977. At the Meeting, the present status and prospects for understanding transport in magnetically confined plasmas were discussed. The Meeting was convened on the initiative of the International Fusion Research Council of the IAEA and organized by the Institute for Nuclear Research of the Ukrainian Academy of Sciences. Twenty-two participants from eight countries (ten from USA, three from UK, three from France, two from Japan and one each from FRG, Belgium, Netherlands and Sweden) came to Kiev to meet with fourteen participants and twenty observers from the USSR.

A wide range of problems was covered at the Meeting. The topics included transport of energy and particles (including impurities) in tokamaks, stellarators and other magnetic confinement devices; effects of impurities, instabilities, auxiliary heating, and boundary conditions on transport processes; and mathematical modelling of transport processes. The technical presentations on these topics were followed by detailed discussions. The following is an overview of the main conclusions of the Meeting:

**1.** Extensive experimental data are now available on transport phenomena in tokamaks, and, to a lesser extent, in stellarators, internal conductor systems, and mirrors. A theoretical understanding of many of the important transport processes now exists, but complete self-consistent theories of certain transport processes (e.g. electron heat conduction), consistent with the experimental data, remain to be developed.

**2.** Since theoretical models remain to be developed for some of the important transport processes, there is continued interest in finding empirical scaling laws for the total energy confinement time  $\tau_E$ . A number of empirical scaling laws are now available. Among these, the most popular are the ones obtained from T-4:

$$\tau_E \sim 1,5 \cdot 10^{-8} H_p \sqrt{\bar{n}} a^2 \text{ [seconds]} \quad (1)$$

(where  $H_p$  is the poloidal magnetic field in Gauss on the surface of the plasma column,  $a$  is the radius of the plasma column in centimetres, and  $\bar{n}$  is the plasma density in units of  $10^{13}$  particles·cm<sup>-3</sup>) as well as those from Alcator:

$$\tau_E \sim 1,6 \cdot 10^{-13} \bar{n} a^2 \sqrt{q} \text{ [seconds]}, \quad (2)$$

---

\*) Nuclear Fusion. 1978. N 18(4). P. 553-555.

where  $q$  is the safety factor, and  $\bar{n}$  is the density in units of particles·cm<sup>-3</sup>. If one takes into account the relation between  $\bar{n}$  and  $H_p$  (e. g.  $\bar{n} \sim n_{\text{crit}} \sim \frac{H_t}{Rq}$ ), these two scaling laws are compatible.

**3.** Scaling laws for  $\tau_E$  are being used to estimate the energy confinement time in devices that are planned or under construction. However, these estimates are not completely reliable because several different energy loss mechanisms contribute to  $\tau_E$ , e.g. ion and electron thermal conduction, diffusion, radiation, charge-exchange, and MHD-activity such as internal disruptions. For this reason, to describe the energy losses using an empirical description, it is necessary to separate the loss mechanisms and to examine the dependence of each mechanism on plasma parameters. Such a separation of mechanisms has already been carried out on some devices, but a wider parameter range should be investigated on a larger number of devices using different plasma heating methods.

**4.** The discussion of ion energy transport showed that energy transport in the range of collision frequencies corresponding to the neoclassical plateau regime is compatible with the predictions of neoclassical theory to within a factor of two or three. For high-temperature discharges in TFR, the measured temperature profiles show some discrepancy with those calculated from neoclassical theory. However, agreement between the collisional theory and experiments appears to be good in ORMAK, PLT, T-10 and Alcator. The fact that hydrogen plasma shows higher ion heat transport than deuterium plasma seems to be a result of deviations from neoclassical theory. The measured ion temperature in stellarators is a factor of two lower than that predicted by neoclassical theory.

**5.** To understand possible reasons for enhanced ion heat transport, especially in the banana regime, it is desirable to carry out experiments in this region of parameter space as soon as possible.

**6.** As for the electron channel of energy transport, it is found experimentally that the electron thermal conductivity,  $\chi_e$ , is higher than neoclassical by one or two orders of magnitude. Although some theoretical explanations of this anomalous behaviour were proposed (e. g. current-driven instabilities, magnetic surface destruction due to drift instabilities, i. e. magnetic fluttering, trapped-particle instabilities, etc.) a complete self-consistent theory has not been developed.

However, empirically derived local expressions for  $\chi_e$  give a uniform fit to most of the experimental tokamak data.

**7.** The measured particle diffusion coefficient is also anomalous but somewhat lower than the electron thermal conductivity. The inward transport of plasma induced by gas puffing at very high electron densities appears to be anomalous, compared with the Ware effect.

**8.** Behaviour of impurities:

The behaviour of impurities does not appear to be neoclassical: The theoretically predicted accumulation of impurities in the centre of the discharge is not observed, i. e. the life-time of impurities is finite. A term of the form  $D_z \frac{\partial n_z}{\partial z}$  should be added to the neoclassical flux value to explain the observed profiles for the various ionized species. Here, the anomalous diffusion coefficient  $D_z$  is of the order of the diffusion coefficient for protons.

The experiments on impurity control in DITE with divertors are encouraging.

New methods of conditioning of the walls (e. g. Ti-gettering and low-temperature discharge cleaning) allow the level of light impurity influx into the plasma to be decreased by an order of magnitude.

Two mechanisms for heavy impurity release from the walls were suggested: unipolar arcs and sputtering by light ions. To diminish the wall atom influx one can lower the temperature of the plasma boundary. Divertors or programmed puffing of the hydrogen gas seem to be suitable for this purpose.

**9.** MHD-unstable discharges with ( $m = 2$ ) helical perturbations lead to a decrease of the electron energy confinement time and, when their amplitude becomes relatively large, to disruptions. It appears possible to stabilize the  $m = 2$  perturbations by using external means to heat locally near the  $q = 2$  surface.

**10.** Neutral-beam injection in ORMAK, PLT and DITE has shown electron heating which does not differ very much from that obtained with Ohmic heating.

The clear dependence of anomalous electron thermal conductivity on the temperature profile was also observed, i. e. the heat conductivity coefficient  $\chi_e$  for the case of a peaked current profile appears to be lower than that for the case of a flat profile. An unexpected absence of plasma rotation during injection was discovered in ORMAK.

**11.** In the theory of MHD instabilities in toroidal plasmas, an effective method for predicting stability behaviour has been developed for the case of large shear.

A clear picture of the dependence of  $\beta$  limits shear has been obtained both analytically and numerically. Moreover, with the help of computer simulation, the disruptive-instability process is better understood.

**12.** There has also been recent progress in describing drift-wave instabilities, both in the linear and nonlinear regimes. Moreover, new developments in the theory of magnetic field line stochasticization and magnetic-fluttering phenomena have led to a deeper understanding of the importance of these processes in plasma transport.

Finally, the general conclusions of the Meeting can briefly be summarized as follows:

The ion heat transport in present tokamak experiments appears to be near neoclassical (within a factor of two or three). It is higher than neoclassical in stellarators, i. e. the measured ion temperature is a factor of two less than the predicted one.

The electron heat transport in tokamaks is anomalous and exceeds the neoclassical value by one or two orders of magnitude.

The diffusion of plasma in tokamaks and stellarators is anomalous with the enhancement factor somewhat lower in value than that for electron thermal conductivity.

The outward impurity diffusion appears to be much higher than predicted by neoclassical theory.

Detailed experimental measurements should be made of the local  $\chi_e$ ,  $D$  and  $D_z$ . If possible, a presentation of the data in terms of characteristic dimensionless parameters should be made.

MHD-activity (mode  $m = 2$ ) appears to enhance electron thermal transport.

To control the  $m = 2$  activity, local heating of the  $q = 2$  surface seems to be suitable. It is possible now to control this mode by external means.

Progress in the theoretical interpretation of gross disruptions has been demonstrated by numerically modelling the non-linear development of the internal  $m = 1$  and  $m = 2$  modes (sometimes accompanied by higher- $m$  mode bursts).

Experiments in the banana regime of collisions for both electrons and ions should be carried out as soon as possible.

There should be continued emphasis on improving experimental measurements and diagnostics in order to assure a meaningful comparison and testing of theoretical models.

This is essential for the development of reliable theoretical models that can be used for predictions in the design and planning of future-generation experiments.

No Proceedings of the Meeting will be published.

## ELECTRON HEAT CONDUCTIVITY OF THE PLASMA ACROSS A «BRAIDED» MAGNETIC FIELD \*)

Small perturbations of magnetic fields in toroidal magnetic traps can lead to a very complicated behaviour of magnetic field lines. These fields are considered to be random, and both magnetic line diffusion and electron heat conductivity produced by the diffusion of magnetic field lines are studied.

### 1. Introduction

Small perturbations of magnetic fields in toroidal magnetic traps can result in appreciable changes in the magnetic field line topology. «Magnetic islands» [1] or even regions with destroyed magnetic surfaces [2–4] may appear in a plasma. Particularly, such a destruction occurs near separatrix surfaces [5, 6]. A slight destruction of magnetic surfaces («magnetic flutter» [7]) can be produced by microinstabilities.

Spontaneous or outside-induced appearance of regions with a stochastic field followed by the destruction of magnetic surfaces can affect the transport processes in the plasma. The electron thermal conductivity appears to be especially sensitive to this effect [8, 9]. Here, we shall consider the effect in MHD-approximation in detail.

### 2. Magnetic-Field Diffusion

We start by considering the behaviour of a magnetic field line in the simplest case where a small transverse random field  $\mathbf{B}'$  is superimposed on a strong homogeneous magnetic field  $\mathbf{B}_0$ . We assume that  $b = \frac{B'}{B_0} \ll 1$  is a space-homogeneous random function and  $\langle b^2 \rangle = b_0^2$ . Let the  $z$ -axis of the orthogonal co-ordinates be directed along  $\mathbf{B}_0$ . Then, starting from the origin of the co-ordinates  $(0, 0)$  along the field line, we have for a transverse excursion of the field line  $\mathbf{r}_\perp$ :

$$\mathbf{r}_\perp = \int_0^z \mathbf{b}(z, \mathbf{r}_\perp) dz, \quad (1)$$

---

\*) *Kadomtsev B.B., Pogutse O.P.* // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. International Atomic Energy Agency. Vienna, 1979. V. I. P. 649–663.

where  $\mathbf{b} = \mathbf{B}'/B_0$ . The  $\mathbf{r}_\perp$ -vector in the integrand of expression (1) can be replaced by zero for  $b \ll 1$ . It is natural to call this approximation quasi-linear. On averaging we obtain for large  $z$ :

$$\langle r_\perp^2 \rangle = \int_0^z \int_0^z \langle \mathbf{b}(z', 0) \mathbf{b}(z'', 0) \rangle dz' dz'' = 4D_F z, \quad (2)$$

where

$$D_F = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{b}(z, 0) \mathbf{b}(0, 0) \rangle dz, \quad (3)$$

$D_F$  is the diffusion coefficient of the field lines [8]. Expression (3) may be written in dimensional form:

$$D_F = \frac{1}{4} b_0^2 L_0, \quad (4)$$

where  $L_0$  is the longitudinal correlation length determined by relations (3) and (4). As is easy to see, we have in the quasi-linear approximation, at  $z \gg L_0$ :

$$\langle r_\perp^2 \rangle = b_0^2 L_0 z. \quad (5)$$

Let  $\delta$  be the transverse correlation length of the magnetic fields. From expression (1), we see that the assumption  $\mathbf{r}_\perp = 0$  in the integrand is valid only when the field line is slightly displaced from its initial position over a length of  $L_0$ , i. e. when  $\langle r_\perp^2 \rangle_{z=L_0} = b_0^2 L_0^2 \ll \delta^2$ . Introducing the parameter  $R = b_0 L_0 / \delta$ , we write the condition for the quasi-linear approximation to be valid in the following form:

$$R = \frac{b_0 L_0}{\delta} \ll 1. \quad (6)$$

To understand what happens in the opposite case when  $R \gtrsim 1$  we first consider the limiting case  $R = \infty$ , i. e. a random field homogeneous in  $z$ . Since  $B_0 = \text{const}$ ,  $\text{div } \mathbf{b} = 0$  and, hence, we can introduce the flux function  $\psi$ :

$$\mathbf{b} = -[\mathbf{e}_z \nabla \psi], \quad (7)$$

where  $\mathbf{e}_z$  is the unit vector along  $z$ . Now, the equations of the field line walk are reduced to Hamiltonian-type equations:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (8)$$

When  $\psi$  is independent of  $z$ , expression (8) can be considered an «equation of motion» for particles with a random stationary Hamiltonian  $\psi$ ,  $z$  playing the role of time.

As is seen from expression (8), the field lines go along the lines  $\psi = \text{const}$  which can be considered to be the constant-level lines of «a topographical map», where  $\psi$  is the altitude above «water» level. If  $\langle \psi \rangle = 0$ ,  $\langle \psi^2 \rangle = \psi_0^2$ , the map appears to be composed of «hills» and «lakes», the averaged depth of lakes and height of hills being given by the  $\psi_0$ -value.

Let  $\psi$  be equal to  $a = \text{const}$ . If  $a > \psi_0$  then only the highest separate hills will be found at this level and the corresponding lines will be singly closed



loops. As the  $a$ -value decreases, the number of hills starts increasing, their dimensions increase, too, and then they start to coalesce, and at the instant of coalescence the  $\psi = a$  plane passes through «the passes», i. e. through hyperbolic points. The length of field lines will increase in such a process.

A similar situation prevails when the level  $\psi = a$  is chosen from the side of «the lakes», i. e. for  $a < 0$ .

The behaviour of the  $\psi = \text{const}$ -lines for a random  $\psi$  function has been analysed in the problem of current percolation in random inhomogeneous solids [10, 11].

It has been shown that  $\psi = a$ -lines are closed for all  $\psi = a \neq 0$ , but the mean length  $\ell_\psi$  of such line in the  $(x, y)$  plane tends to infinity as  $\ell_\psi \sim \psi^{-\gamma}$ , when  $\psi$  goes to zero. (Here,  $\gamma = \text{const} \approx 2.4$ ) [12]. Thus, the mean line length is  $\langle \ell_\psi \rangle = \int \ell_\psi P(\psi) d\psi = \infty$  ( $P(\psi)$  is the  $\psi$  distribution function). In other words, the field lines can walk any large distance on the average. The lines with small  $\psi$  which make the major contribution to the line «transport» over a large distance, wander at random, passing the hyperbolic points. Since the average «velocity» of the field line is  $b_0$  and the average distance between the hyperbolic points is proportional to  $\delta$ , the diffusion coefficient in the  $R \gtrsim 1$  region can be estimated to be of the order of magnitude of  $D_F \sim b_0 \delta$ .

To determine  $D_F$  more precisely (but still approximately) in the whole region of variation of  $R$  we shall use the following simplified picture. Let  $N$  be constant along the field lines:

$$\frac{\partial N}{\partial z} + \mathbf{b} \cdot \nabla N = 0. \quad (9)$$

This value can be considered to be some «density» of labelled field lines. We split  $N$  into two components: a slowly varying  $N_0$  and a fluctuating  $N'$ :  $N_0 + N'$ . Now, we average expression (9) over the stochastic field  $\mathbf{b}$ , assuming  $\langle N' \rangle = 0$ . We would like to derive a diffusion-type equation for  $N_0$ ; hence we assume that averaging Eq. (9) would yield:

$$\frac{\partial N_0}{\partial z} = -\text{div} \langle \mathbf{b} N' \rangle = D_F \Delta_\perp N_0, \quad (10)$$

where  $\Delta_\perp = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ . It is natural to expect an equation of this form because of the diffusional character of the walk of lines. From Eqs (9) and (10), we obtain for  $N'$ :

$$\frac{\partial N'}{\partial z} + \mathbf{b} \cdot \nabla N' - \langle \mathbf{b} \cdot \nabla N' \rangle = -\mathbf{b} \cdot \nabla N_0. \quad (11)$$

The equation for  $N'$  is of the same form as for  $N_0$  but there is a right-hand side. On a scale  $\geq \delta$ , the homogeneous expression (11) for  $N'$  would again be of the form of expression (10), with the only difference that the right-hand side of expression (11) «feeds» perturbations of the  $\delta$ -scale and «the diffusion coefficient» on such a scale can differ from  $D_F$ . If we neglect this difference and write approximately expression (11) in the form

$$\frac{\partial N'}{\partial z} - D_F \Delta_\perp N' = -\mathbf{b} \cdot \nabla N_0 \quad (12)$$

then Eqs (10) and (12) will form a closed set of equations to determine  $D_F$ . Equation (12) is easily solved by using a Fourier transformation. Substituting

this solution into Eq. (10), we find

$$D_F = \frac{1}{2} \int b_{\mathbf{k}}^2 (ik_z + D_F k_{\perp}^2)^{-1} d\mathbf{k}, \quad (13)$$

where the factor 1/2 is the result of averaging over the angles, and  $b_{\mathbf{k}}^2$  is determined from the following expression:

$$b_{\mathbf{k}}^2 = (2\pi)^{-3} \int \langle \mathbf{b}(0) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}) \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (14)$$

For small  $b^2$ ,  $D_F k^2$  in the denominator of Eq. (13) is small and we obtain from (13):

$$D_F = \frac{\pi}{2} \int d(k_z) b_{\mathbf{k}}^2 d\mathbf{k}. \quad (15)$$

This is just a quasi-linear expression coinciding with Eq. (3). On the contrary, when  $D_F k^2$  is large,  $k_z$  in the denominator of Eq. (13) can be neglected and then we have

$$D_F^2 = \frac{1}{2} \int \psi_{\mathbf{k}}^2 d\mathbf{k}, \quad (16)$$

where  $\psi_{\mathbf{k}}$  is the Fourier component of the correlation function for  $\psi$ :

$$\psi_{\mathbf{k}}^2 = (2\pi)^{-3} \int \langle \psi(0) \psi(\mathbf{r}) \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (17)$$

According to expression (16),  $D_F \sim b_0 \delta$ . So, for small values of  $R = b_0 L_0 / \delta$  the value of  $D_F$  increases as  $b_0^2$  with  $b_0$  and when  $b_0 L_0 / \delta > 1$ , the increase is only linear.

### 3. Electron Thermal Conductivity in MHD-Approximation

**3.1.** We now consider the behaviour of the electron thermal conductivity for the same case of a random stationary magnetic field. We assume that the longitudinal thermal conductivity  $\chi_{\parallel}$  substantially exceeds the transverse one,  $\chi_{\perp}$ , i. e.  $\Omega\tau = \sqrt{\chi_{\parallel}/\chi_{\perp}} \gg 1$  (at some stages we shall use the small parameter  $\gamma = 1/(\Omega\tau)$ ). The heat flux  $\mathbf{q}$  is equal to

$$\mathbf{q} = -\chi_{\parallel} \mathbf{h}(\mathbf{h}\nabla)T - \chi_{\perp} \nabla_{\perp} T, \quad (18)$$

where  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B_0 \approx \mathbf{e}_z + \mathbf{b}$ . We see from this expression that for  $b_0 \Omega\tau > 1$  the contribution of longitudinal thermal conductivity to effective heat transport across an averaged magnetic field can be substantially larger than that of transverse thermal conductivity.

We again start with a quasi-linear approximation. Let us suppose that  $T = T_0 + T'$  and  $T' \ll T_0$ . Under stationary conditions,  $\text{div } \mathbf{q} = 0$ . The linear part of this equation in the Fourier transformation when the gradient  $\nabla T_0$  is directed along the  $X$ -axis takes the following form:

$$(k_z^2 + \gamma^2 k_{\perp}^2) T' = ik_z b_x \frac{dT_0}{dx}. \quad (19)$$

We include, in the expression for the averaged heat flux, only the terms with the transverse conductivity:

$$\langle q_x \rangle = -\chi_{\parallel} \langle b_x^2 \rangle \frac{dT_0}{dx} - \chi_{\parallel} \left\langle b_x \frac{dT'}{dx} \right\rangle. \quad (20)$$

Substituting the expression for  $T'$  from Eq. (19) we obtain the value for the proportionality coefficient between  $\langle q_x \rangle$  and  $dT_0/dx$ :

$$\chi_F = \frac{1}{2} \chi_{\parallel} \int \frac{\gamma^2 k_{\perp}^2 b_k^2}{k_z^2 + \gamma^2 k_{\perp}^2} d\mathbf{k}. \quad (21)$$

The factor 1/2 again appears, owing to an averaging over angles since  $b^2 = b_x^2 + b_y^2$ . As was shown before, the validity condition for the quasi-linear approximation for a magnetic field is an inequality,  $b_0 L_0 / \delta \sim b_0 k_{\perp} / k_z \ll 1$ . On the other hand, it is sufficient to consider the region  $b_0 \Omega \tau > 1$ . Hence, in this region,  $\gamma k_{\perp} \ll k_z$  and Eq. (21) may be written as follows:

$$\chi_F = \frac{\pi}{2} \sqrt{\chi_{\parallel} \chi_{\perp}} \int k_{\perp} \delta(k_z) b_k^2 d\mathbf{k}. \quad (22)$$

Comparing with expression (15), we see that  $\chi_F = \sqrt{\chi_{\parallel} \chi_{\perp}} \langle k_{\perp} \rangle D_F$ , where  $\langle k_{\perp} \rangle$  is the averaged transverse wavenumber. By order of magnitude,  $\chi_F \sim \sqrt{\chi_{\parallel} \chi_{\perp}} b_0^2 L_0 \delta^{-1}$ . Let us recall that the Bohm diffusion coefficient is equal to  $D_B = (1/16) \sqrt{\chi_{\parallel} \chi_{\perp}}$ , so that the dependence of  $\chi_F$  on the plasma parameters is a Bohm-type one. For  $b_0 \sim \delta / L_0$ , we have  $\chi_F \sim 16 b_0 D_B$ .

Note that the expression for  $\chi_F$  can be written in the form:  $\chi_F = \bar{v} D_F$ , where  $\bar{v} = \chi_{\parallel} / L$ ,  $L \sim \delta \Omega \tau$ . The quantity  $\bar{v}$  plays the role of velocity of heat transport over a characteristic length  $L$ , i. e. the longitudinal correlation length for  $T'$ .

**3.2.** According to expression (22),  $\chi_F$  tends to zero as  $\chi_{\perp} \rightarrow 0$ , but this result does not seem to be reliable because we neglect the terms of higher order in  $b$  in Eq. (19). Let us consider, instead of Eq. (19), a more accurate equation with a «point» source with respect to  $z$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{b} \cdot \nabla \right)^2 T + \gamma^2 \nabla_{\perp}^2 T = \delta(z) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{\perp}}. \quad (23)$$

Neglecting the term with  $\mathbf{b} \cdot \nabla$  we could obtain an equation for the function of the point source. It is this function which was used in Eq. (19). The presence of the term  $\mathbf{b} \cdot \nabla$  implies that the point source function, while remaining a comparatively slow-varying function of the variable  $\ell$  along the field line, oscillates strongly in  $\mathbf{r}_{\perp}$ , owing to «braiding» of the field lines. The result of this is the increase of the term  $\nabla_{\perp}^2 T$  (see, e.g. Ref. [9]). We should include this effect.

Note that Eq. (23) can be derived from the variation principle  $\delta S = 0$ , where

$$S = \int \left\{ \left( \frac{\partial T}{\partial \ell} \right)^2 + \gamma^2 (\nabla_{\perp} T)^2 \right\} d\mathbf{r}. \quad (24)$$

Here,  $\partial / \partial \ell = \partial / \partial z + \mathbf{b} \cdot \nabla$ . We average expression (24) over  $\mathbf{b}$  and approximate

this by the following equation:

$$S' = \langle S \rangle = \int \left\{ \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + \Gamma^2(z) T^2 \right\} d\mathbf{r}, \quad (25)$$

where  $\Gamma(z)$  remains to be found. To do this, we should find  $\langle (\nabla_{\perp} T)^2 \rangle$  as a function of  $z$ . Let us write  $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T(x_2) - T(x_1)}{x_2 - x_1} \Big|_{x_2 - x_1 \rightarrow 0}$ . Here  $T(x, \ell)$  is a slowly varying function of  $\ell$  (since the longitudinal conductivity is high), so that the expression for  $\frac{\partial T}{\partial x}$  can approximately be written as follows:  $\frac{\partial T}{\partial x} = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 \cdot \frac{x_2^0 - x_1^0}{x_2 - x_1}$ , where  $x_i^0$  are co-ordinates of trajectories at  $z = 0$ . When the difference  $x_2 - x_1$  along the trajectory is small,

$$\frac{\partial}{\partial x} (x_2 - x_1) = b_x(x_2, z) - b(x_1, z) = \frac{\partial b_x}{\partial x_z} (x_2 - x_1). \quad (26)$$

From this, we find

$$x_2 - x_1 = (x_2^0 - x_1^0) \exp\left(\int_0^z \frac{\partial b_x}{\partial x} dz\right).$$

Assuming a Gaussian distribution for  $\mathbf{b}$  we find, for large values of  $z$ , for the  $T$  function, which is proportional to  $\exp(i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp})$  at  $z = 0$ , the following expression:

$$\left\langle \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = k_x^2 T^2 \exp(2kz),$$

where

$$k = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial b_x(0)}{\partial x} \frac{\partial b_x(z)}{\partial x} dz. \quad (27)$$

By order of magnitude,  $k \sim b_0^2 L_0 \delta^{-2}$ . In the region  $z < 0$ , we have to substitute  $\exp(2k|z|)$ . But since this exponent is essential only for large values of  $z$  we shall cover both positive and negative  $z$ -values by approximating the two exponents by the function  $\text{ch } 2kz$ . Thus,

$$S = \int \left\{ \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + \gamma^2 k_{\perp} T^2 \text{ch}(2kz) \right\} dz. \quad (28)$$

Varying this functional we obtain a modified Mathieu equation. An approximate value of  $T$  can, however, be found directly from expression (28). For small  $k$ , it naturally yields the former quasi-linear expression. For very small  $\gamma$ , we find the solution for  $T$  in the form  $1 - \alpha z$  at  $z < \alpha^{-1}$ ,  $T = 0$  at  $z > \alpha^{-1}$  ( $\alpha$  is the variable parameter). This is due to the exponentially strong «switching-on» of the transverse damping in expression (28). The variation of expression (28) with such a test function gives:

$$\alpha \approx k \left( \frac{\ln k}{\gamma k_{\perp}} \right)^{-1}. \quad (29)$$

By magnitude,  $\alpha \sim k \sim b_0^2 L_0 \delta^{-2}$ . As we see,  $k_z \sim k \alpha^{-1} \gg 1$  only when the logarithm in expression (29) is large, i. e. when

$$\Omega \tau b_0 \gg \left( \frac{b_0 L_0}{\delta} \right)^{-1}. \quad (30)$$

If we approximate the Green function for Eq. (23)  $[1/(2\alpha)](1 - \alpha|z|)$  by a simpler expression  $(1/2\alpha) \exp(-\alpha|z|)$ , then after substitution of the corresponding solution for  $T'$  into Eq. (20) we obtain an expression of the form (21) but with a term  $\alpha^2$  instead of  $\gamma^2 k_\perp^2$ . In the quasi-linear region  $b_0 L_0 \ll \delta$  we can again assume  $\alpha^2 \ll k_z^2$  ( $k_z$  is the characteristic wave number), so that, instead of expression (22), we obtain

$$\chi_F = \chi_{||} \alpha D_F \sim \chi_{||} b_0^4 L_0^2 \delta^{-2}. \quad (31)$$

This expression is valid in the region  $b_0 L_0 / \delta \ll 1$ ,  $\Omega \tau b_0 \gg (b_0 L_0 / \delta)^{-1}$ .

**3.3.** Let us now consider the region  $b_0 L_0 / \delta > 1$ , where a quasi-linear approximation is not valid. We again start with a simpler case where  $L_0 = \infty$ , i. e. a case of a random field homogeneous in  $z$ .

The problem in question is similar to that of current percolation in a two-dimensional solid with random inhomogeneous conductivity [11]. So, it seems reasonable to use a well-known method by Dykhne [14], which allowed him to obtain in a rather simple way, an expression for the effective electrical conductivity of an inhomogeneous substance. Let us write Eq. (18) in the following form:

$$q_\alpha = -\chi_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial x_\beta}, \quad (32)$$

where  $\chi_{\alpha\beta} = b_\alpha b_\beta \chi_{||} + \delta_{\alpha\beta} \chi_\perp$ , and the sum is taken over subscript  $\beta$ . When the averaged gradient is directed along the  $x$ -axis, Eq. (32), on averaging, takes the form:

$$\langle q_z \rangle = -\chi_F \frac{dT_0}{dx}, \quad (33)$$

where  $\chi_F$  is the value of the effective temperature conductivity to be found. Now, we rotate the whole picture of gradient and heat fluxes through an angle of  $90^\circ$  and introduce the following quantities:

$$\mathbf{q}' = A[\mathbf{e}_z \times \nabla T], \quad \nabla T' = B[\mathbf{e}_z \times \mathbf{q}], \quad (34)$$

where  $A$  and  $B$  are constants. Since  $\text{div } \mathbf{q} = 0$ ,  $\text{rot } \nabla T = 0$ , we have  $\text{div } \mathbf{q}' = 0$ ,  $\text{rot } \nabla T' = 0$ , i. e. the  $\mathbf{q}'$  and  $\nabla T'$  values can be considered as heat flux and temperature gradient in the turned plane. Now we try to choose values of  $A$  and  $B$  such that the turned picture is as close to the initial one as possible.

The linear relation between  $\mathbf{q}$  and  $\nabla T$  gives:

$$q'_\alpha = -\chi'_{\alpha\beta} \frac{\partial T'}{\partial x_\beta} \quad (35)$$

and an averaged heat flux is equal to

$$\langle q'_x \rangle = -\chi'_F \frac{dT'_0}{dx}. \quad (36)$$

Now we choose  $A$  and  $B$  such that, on the average, the heat transports in the initial and turned planes coincide or at least, are as close to one another as possible. For this purpose, the following requirements should be met:

$$\chi_F = \chi'_F, \quad \langle \chi_{\alpha\beta} \rangle = \langle \chi'_{\alpha\beta} \rangle. \quad (37)$$

Averaging expressions (34) and making use of Eqs (33), (36) and the first equation (37), we find

$$\chi_F = \sqrt{\frac{A}{B}}. \quad (38)$$

On the other hand,  $A/B$  can be found from the second equation (37). Taking into account that, according to Eqs (34) and (35),  $\chi'_{\alpha\beta} = A/B \chi_{\alpha\beta}^{-1}$  (where  $\chi_{\alpha\beta}^{-1}$  is the inverse matrix) we can find from the second equation (37):

$$\frac{A}{B} = \langle \chi_{xx} \rangle \left\langle \frac{\chi_{xx}}{\chi_{xx}\chi_{yy} - \chi_{xy}^2} \right\rangle^{-1} = \chi_{\parallel} \chi_{\perp} \langle b_x^2 \rangle \left\langle \frac{b_x^2}{b^2} \right\rangle^{-1} = \chi_{\perp} \chi_{\parallel} b_0^2. \quad (39)$$

Here, the explicit expression for the  $\chi_{\alpha\beta}$  tensor is included, and we have restricted ourselves to the case  $b_0 \Omega \tau \gg 1$ . Thus, according to expressions (38) and (39), we have

$$\chi_F = \sqrt{\chi_{\parallel} \chi_{\perp} b_0} \quad (40)$$

in the region  $b_0 L_0 / \delta \gg 1$ .

**3.4.** Formula (40) again gives  $\chi_F \rightarrow 0$  as  $\chi_{\perp} \rightarrow 0$  which may be invalid when  $L_0 \neq 0$ . So the region  $b_0 \Omega \tau \gg 1$  should be considered in more detail for large, but finite values of the parameter  $R = b_0 L_0 / \delta$ . To consider this more general case we first try to obtain expression (40) by using a simpler approach of the quasi-linear type. To do this, we write the expression for the heat flux (18) for a purely two-dimensional case in the following form:

$$\mathbf{q} = -\chi_{\parallel} \mathbf{b} b \frac{\partial T}{\partial s} - \chi_{\perp} \nabla T, \quad (41)$$

where  $b(\partial/\partial s) = \mathbf{b} \cdot \nabla$ , i. e.  $s$  is the co-ordinate along the field line projection on the  $(x, y)$ -plane. If we again suppose  $T = T_0(x) + T'(x, y)$  and average expression (41), we obtain, neglecting the second term:

$$\langle q_x \rangle = -\chi_{\parallel} \langle b_x^2 \rangle \frac{dT_0}{dx} - \chi_{\parallel} \left\langle b b_x \frac{\partial T'}{\partial s} \right\rangle. \quad (42)$$

The value of  $T'$  can be found from the linearized equation  $\text{div } \mathbf{q} = 0$ . Since  $\text{div } \mathbf{b} = 0$  this equation will read:

$$b^2 \frac{\partial^2 T'}{\partial s^2} + \gamma^2 \Delta_{\perp} T' = -b \frac{\partial}{\partial s} \left( b_x \frac{dT_0}{dx} \right). \quad (43)$$

When  $\chi_{\parallel} \gg \chi_{\perp}$ , the major contribution to the thermal conductivity comes from those field lines that wander through long distances (small «islands» and «lakes» practically do not contribute to the thermal conductivity). Along those lines that correspond to small  $\psi$  and can be considered unclosed, the value of  $s$  virtually varies from  $-\infty$  to  $+\infty$ . Thus,  $T'$  can be expanded over  $s$

in a Fourier integral. As for  $\Delta_{\perp}$ , this can be assumed to be equal to  $-k_{\perp}^2$  for a perturbation of the typical form  $\exp(i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp})$ . Thus, from Eqs (42) and (43), we obtain an expression similar to (21), with the only difference that here we have the term  $b^2 k_s^2$  instead of  $k_z^2$ :

$$\chi_F = \frac{1}{2} \chi_{\parallel} \int \gamma^2 k_{\perp}^2 b_{\mathbf{k}}^2 (b_{k_s}^2 + \gamma^2 k_{\perp}^2)^{-1} d\mathbf{k}, \quad (44)$$

where  $k_s$  is the wave number along  $s$ . For small  $\gamma$  in expression (44) we again see the occurrence of a  $\delta$ -function; thus, the expression will read:

$$\chi_F = \sqrt{\chi_{\parallel} \chi_{\perp}} \frac{\pi}{2} \int k_{\perp} \delta(bk_s) b_{\mathbf{k}}^2 d\mathbf{k}. \quad (45)$$

Since  $b_{\mathbf{k}}^2$  differs from zero in the region  $k_s \sim k_{\perp} \sim \delta^{-1}$ , expression (45) yields the same estimate as (40), i. e.  $\chi_F \sim \sqrt{\chi_{\parallel} \chi_{\perp}} b_0$ .

For  $L_0 \neq \infty$ , the heat can flow along the field lines, and this should contribute to  $\langle q_x \rangle$ . In the region  $b_0 L_0 / \delta \gg 1$ , the expression for the averaged flux can be taken in the form (42), the small gradient along  $z$  being neglected. Thus, it is sufficient to take into account additional damping due to  $\partial/\partial z$  only in Eq. (43). To do this, we again make use of the functional (24) and first average it over  $\mathbf{b}$ :

$$S' = \langle S \rangle = \int \left\langle b_0^2 \left( \frac{\partial T'}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial T'}{\partial z} \right)^{-2} + \gamma^2 (\nabla_{\perp} T')^2 \right\rangle d\mathbf{r}. \quad (46)$$

We have again introduced here the  $s$ -co-ordinate along the field line projection onto the  $(x, y)$ -plane and have «split» approximately the average squares of the functions in the first term in the integrand. Expression (48) can be considered to be a functional whose variation gives the point source function in the  $s$ -variable.

In expression (46), the second and third terms in the integrand are small and so  $T'$  in these terms can be considered almost constant in  $s$ , i. e. approximately  $T' \approx T'(\psi)$ . In this case, the average value of the second and third terms will be expressed in terms of correlation properties of  $\psi$ , i. e. expression (46) can be written as follows:

$$S' = \int \left\{ b_0^2 \left( \frac{\partial T'}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{a_1}{L_0^2} + \gamma^2 \frac{a_2}{\delta^2} \right) T'^2 \right\} d\mathbf{r}, \quad (47)$$

where  $a_1, a_2$  are numerical coefficients of the order of unity. When  $\Omega\tau > L_0/\delta$ , the term with  $\gamma^2$  can be neglected and the damping is determined by the value of  $a_1/L_0$ . If we now take a quasi-linear-type equation (44) and replace  $\gamma^2 k_{\perp}^2$  by  $a_1/L_0^2$  we approximately obtain:

$$\chi_F \approx \chi_{\parallel} b_0 \delta L_0^{-1}. \quad (48)$$

This expression is valid for the region  $b_0 L_0 / \delta > 1$ ,  $b_0 \Omega\tau > b_0 L_0 / \delta$ .

**3.5.** Figure 1 summarizes the results of our considerations. In this figure four regions are presented for  $\chi_F$  as a function of the parameters  $b_0 \Omega\tau$  and  $b_0 L_0 / \delta$ .  $b_0 \Omega\tau$  lies in the  $b_0 \Omega\tau > 1$  region and the value of  $b_0 L_0 / \delta$  may be arbitrary. In all four regions,  $\chi_F \approx \bar{v} D_F$ , where  $D_F$  is the field diffusion coefficient

and  $\bar{v} = \chi_{\parallel}/L$ , where  $L$  is the characteristic length over which the temperature perturbation is transported. In regions 1 and 4, the value of  $L \sim \delta\Omega\tau < L_0$ , in region 3  $L \sim L_0$ , in region 2  $L \sim L_0(b_0L_0/\delta)^{-2} > L_0$ . On the boundaries of the regions different dependences match.

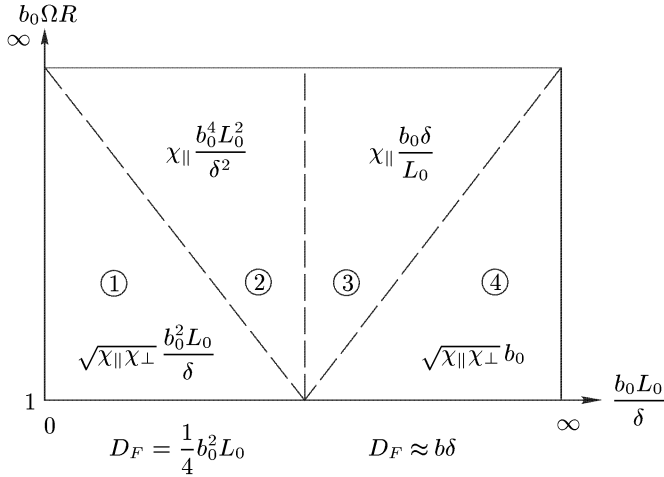


Fig. 1. Four regions displaying various dependences of heat conductivity in a «braided» magnetic field

The expression  $\chi_F = \bar{v}D_F$  for  $\bar{v} = \chi_{\parallel}/L$  is valid only at  $\bar{v} < v_{Te}$ , where  $T_e$  is the thermal electron velocity, i. e. in a hydrodynamic collisional regime,  $\lambda_e < L$ . For  $\lambda_e > L$ , as has been shown by Stix [8] and Rechester and Rosenbluth [9],  $\chi_F \approx v_{Te}D_F$ .

#### 4. Ohkawa Formula

In a high-temperature, high-electric-conductivity plasma, it is natural to expect a longitudinal field component  $B'_x$  to arise because of plasma displacements. It is also natural to assume that the displacement is of the order of the longitudinal correlation length, so that  $B' \sim B_0\delta/L_0$ . In other words, the most natural value of the parameter  $b_0L_0/\delta$  is unity. According to Fig. 1, at  $b_0L_0/\delta \sim 1$ ,  $\chi_F$  is virtually independent of  $\Omega\tau$  and equal to  $\chi_F \sim \chi_{\parallel}(\delta^2L_0^2)$  in a collisional regime, and to  $\chi_F \sim v_{Te}\delta^2L^{-1}$  in a collisionless regime. In tokamak-type systems, it is reasonable to assume that  $L_0 = qR$ , where  $R$  is the major torus radius, and  $q$  the safety factor. Hence, in the plateau (and banana) regimes,  $\lambda_e > qR$ , and we should use the expression  $\chi_F \sim v_{Te}\delta^2/(qR)$ .

To describe the anomalous electron thermal conductivity, Ohkawa has proposed the formula:

$$\chi_0 \approx \frac{c^2}{\omega_{pl}^2} \frac{v_{Te}}{qR} \quad (49)$$

which correspond to the assumption  $\delta \approx c/\omega_{pl}$  ( $\omega_{pl}$  is the Langmuir frequency). This formula is in good agreement with the experimental data.



Evidently, the Ohkawa formula corresponds to the assumption that magnetic surfaces are destroyed on the  $\delta \sim c/\omega_{pl}$  scale. This assumption may, to some extent, correspond to the hypothesis of a magnetic flutter [7]. In fact, if we take into account the fact that in drift oscillations the magnetic surfaces are frozen into the electrons, then the destruction of surfaces and reconnection of field lines in a tenuous plasma can be expected only on the scale of a collisionless skin layer,  $\delta \sim c/\omega_{pl}$ . That is why formula (49) seems to be quite reasonable in explaining the anomalous electron heat conductivity under the conditions of magnetic surface «flutter» in tokamaks.

### References

1. *Morozov A.I., Solov'ev L.S.* // Problems of Plasma Theory. 1963. V. 3. Atomizdat — in Russian.
2. *Kerst, D.W.* // J. Nucl. Energy. 1962. Part C4. P. 253.
3. *Rosenbluth M.N., Sagdeev R.Z., Taylor J.B., Zaslavskij G.M.* // Nucl. Fus. 1966. V. 6. P. 297.
4. *Rechester A.B., Stix T.H.* // Phys. Rev. Lett. 1976. V. 36. P. 587.
5. *Mel'nikov V.K.* // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1962. V. 144. P. 747; 1963. V. 148. P. 1257.
6. *Chirikov B.A., Zaslavskij G.M.* // Usp. Fiz. Nauk. 1971. V. 105.
7. *Callen J.D.* // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 39. P. 1540.
8. *Stix T.H.* // Phys. Rev. Lett. 1973 V. 30. P. 833.
9. *Rechester A.B., Rosenbluth M.N.* // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 40. P. 38.
10. *Kirkpatrick F.* // Rev. Mod. Phys. 1973. V. 45. P. 574.
11. *Shklovskij B.I., Efros B.I.* // Usp. Fiz. Nauk. 1978. V. 117. P. 401.
12. *Sykes M.F., Essam L.W.* // Phys. Rev. 1964. V. A 133. P. 310.
13. *Dykhne A.* // Zh. Ehksp. Teor. Fiz. 1970. V. 59. P. 110.

### Discussion

*S. Inoue:* If diffusion is governed by the parallel motion of electrons, then the confinement of runaway electrons must be worse than that of ordinary electrons. Is this consistent with experimental findings?

*B.B. Kadomtsev:* The behaviour of runaway electrons has been discussed by M. Rosenbluth. The magnetic drift of such electrons helps to prevent leakage along the field lines.

*J.D. Callen:* Could you please discuss in somewhat more detail why you have chosen  $c/\omega_{pe}$  as the transverse correlation length? In particular, could you indicate why you have not taken a larger scale length such as might arise from drift waves which can also, presumably, cause fluttering of the magnetic field lines?

*B.B. Kadomtsev:* If electron collisions are very rare, the drift-type waves will conserve magnetic surfaces, so that for a real reconnection of magnetic field

lines a smaller scale may be important — for instance  $c/\omega_{pe}$ , the collisionless skin-length.

*B. Coppi:* The numerical simulation of discharges obtained in Alcator and other devices has indicated that a combination of two diffusion coefficients is needed to reproduce the observed temperature profiles. One of these two coefficients controls the electron energy transport near the centre of the plasma column and has a form similar to the one you discussed, except that the exponent of the electron temperature has the opposite sign. The other gives an enhanced diffusion at the edge of the plasma column and has different dependences on  $n$ ,  $q$  and  $T$ . These conclusions have been confirmed recently by three other groups who have carried out analyses similar to ours.

*T. Ohkawa:* The same model can be applied to calculations of particle transport as well as heat transport, the resultant flow of particles being parallel to the magnetic field lines. Perhaps this might explain the lack of experimental observation of the bootstrap effect despite the fact that the transport rate is much greater than the neoclassical rate. Would you care to comment?

*B.B. Kadomtsev:* The problem of particle transport is more complicated than heat transport, owing to electric field perturbations. We have not considered this problem as yet.

*M. Dubois:* Do you explain this turbulence by fluttering of the lines of force? I would not have thought that this was likely, strictly speaking, to be a mechanism for turbulence.

*B.B. Kadomtsev:* Yes; it may not be true turbulence but simply small distortions of the magnetic surfaces.

*M. Dubois:* In the case of strong turbulence in the presence of a current gradient, it seems to me that the plasma would tend to shield itself, thus reducing the stochasticity. What do you think of this possibility?

*B.B. Kadomtsev:* There may be some effect of self-curing or self-restoring of the magnetic surfaces.

*F.R. Schwirzke:* If the thermal electron conductivity is determined by stochastic magnetic field «flutter» and related temperature fluctuations, do these processes also influence the electrical conductivity?

*B.B. Kadomtsev:* No, electrical conductivity is virtually unaffected by magnetic-field fluctuations.

## CLOSED MAGNETIC TRAP WITH RECTILINEAR SECTIONS \*)

We discuss here the possibility of a long stright sections in a plasma magnetic trap closed into a topological torus by means of special connectors, the linear sections being unperturbed by charge separation currents.

### Introduction

Studies in the fusion reactor concepts based on the magnetic confinement have shown advantages and disadvantages of the open (mirror) and closed (toroidal) magnetic traps. It is natural to ask whether it is possible to design a system which combine the best features of both, i.e. that which includes long stright sections with high  $\beta$  (the main operating section of the reactor) and curvilinear connectors, eliminating the problems associated with the mirror loss cones but having no effect on equilibrium and transport in the stright sections. We shall call such systems «dracon» (Russian abbreviation of the «long equilibrium configuration»). If the magnetic field strengts in the connectors is considerably greater than that in the linear sections, one can expect  $\beta = 5 \div 6\%$  for the connectors and  $\beta = 20 \div 25\%$  for the linear sections at the same time.

### Equilibrium connector

Feasibility of the «dracon» is associated with an idea of a special connector of the rectilinear elements (CREL). CREL realises if  $\varphi$ -angle turn transform of the straight magnetic field lines in the presence of plasma (Fig. 1). An equilibrium plasma pressure in «dracon» depends only on the CREL design no matter what the linear section length is. The condition for this is an equality of the integral  $\int dl/B$  for all field lines at a given magnetic surface. This one is reduced to a requirement [2, 3]:

$$\int_{-l/2}^{l/2} \left[ \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \cos(\delta - v) - \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} \cos(\delta + v) \right] kB^{-3/2} ds = 0 \quad (1)$$

\*) *Glagolev V.M., Kadomtsev B.B., Shafranov V.D., Trubnicov B.A.* // Controlled Fusion and Plasma Physics. Proc. 10<sup>th</sup> Europe. Conf. Moscow, 1981. V. 1. E-8.

in a paraxial approximation. Here  $s$  is the axis arc length accounted off from the CREL middle,  $B(s)$  is the axial magnetic field strength,  $v = \int_0^S \frac{\delta' - \varkappa}{\text{ch } \eta} ds$ ;  $k(s)$ ,  $\varkappa(s)$  are the curvature and torsion of the axis;  $\exp \eta(s)$  is the ratio of magnetic surface crosssection semiaxes,  $\delta(s)$  is an angle between the principal normal and small semiaxes. The functions  $B(s)$ ,  $k(s)$ ,  $\eta(s)$ ,  $\varkappa(s)$  are considered to be even while  $\delta(s)$ ,  $v(s)$  are odd ones.

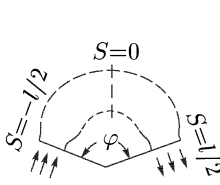


Fig. 1

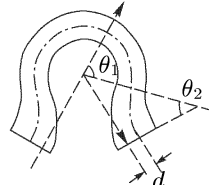


Fig. 2

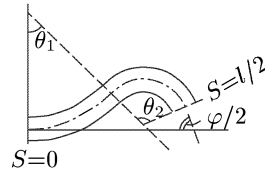


Fig. 3

Let's consider a simple case of the near circular magnetic surface crosssections,  $\eta \ll 1$ ;  $\text{ch } \eta/2 \approx 1$ ,  $\text{sh } \eta/2 \approx 0$ . In this case, eq. (1) is reduced to

$$\int_{-l/2}^{l/2} kB^{-3/2} \cos \iota(s) ds = 0, \tag{2}$$

where,  $\iota(s) = \delta(s) - v(s)$  is a rotational transform. Consider three types of the CREL.

**A planar axis CREL with nonuniform field**

The axis of this CREL, shown in Fig. 2, consists of three arcs with curvatures  $k_1 = \frac{1}{R_1}$ ,  $k_2 = -\frac{1}{R_2}$ . The angle openings (see Fig. 2) are  $\theta_1 = \frac{2\theta_c + \varphi}{4}$ ,  $\theta_2 = \frac{2\theta_c - \varphi}{4}$ ;  $\theta_c = \theta_1 + \theta_2$ . Neglecting the transition regions, the magnetic fields  $B_1, B_2$  can be related as follows:

$$\frac{B_2}{B_1} = \left( \frac{2\theta_c - \varphi}{2\theta_c + \varphi} \right)^{2/3}. \tag{3}$$

For example, at  $\theta_c = \varphi$  ( $\theta_1 = 3\varphi/4$ ,  $\theta_2 = \varphi/4$ ) we have  $B_1/B_2 = 2,1$ . Such CREL is feasible at a small or even at a zero rotation transform. It can be considered, as a separate unit of the Spitzer's scallops [4] or of the bumpy torus [1].

**A planar axis CREL with uniform field** is shown in Fig. 3. The curvature of its axis changes sign as above. The greater the sag of the CREL middle part the less the rotational transform providing necessary equilibrium properties of the CREL. The table 1 shows the parameters of the 180° CREL with

$$\iota_c \equiv 2(\iota_1 + \iota_2) \equiv \iota \left( \frac{l}{2} \right) - \iota \left( -\frac{l}{2} \right) = 3.$$

Ratio of the arc radii providing constant pitch of a helical winding is shown in the 4-th line of the table.

Table 1

$\iota_1$	1	0,9	0,8	0,75
$\iota_2$	0,5	0,6	0,7	0,75
$2\theta_1/\varphi$	0,61	0,72	0,82	0,86
$R_1/R_2$	5,26	3,57	2,54	2,16

A **CREL with a spatial (nonplanar) axis**, having an uniform field, should satisfy the condition

$$\int_{-l/2}^{l/2} k \cos \alpha ds = 0, \quad (4)$$

where,  $\alpha(s) = \int_0^s \varkappa ds$  is the turn angle of the principal normal counted off from

a strip  $\omega = \text{const}$  passing through the axis perpendicular to its normal cross-sections. The curvature of a nonplanar curve is considered to be positive. For the CREL composed of three toroidal sectors with angle openings  $\theta_0, \theta_1 = \theta_{-1}$  (negative index corresponds to  $s < 0$ ), it follows from (4)

$$\frac{1}{2} \theta_0 + \theta_1 \cos \alpha_0 = 0. \quad (5)$$

In case of the  $180^\circ$  CREL composed of three semitorii ( $\theta_0 = \theta_1 = \pi$ ), the angle  $\alpha_0$  between the semitorii planes is appeared to be equal to  $120^\circ$ . The «dracon» design based on this CREL as well function  $\alpha(s)$  are shown in Figs. 4, 5.

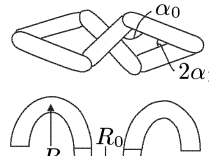


Fig. 4

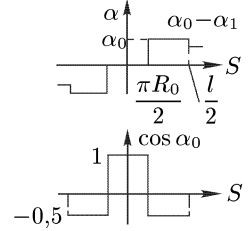


Fig. 5

## Equilibrium in a CREL with spatial axis

The displacement of the plasma column boundary satisfies the equation [5]:

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} = -\frac{1}{2} \beta \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) k \cos [\omega - \alpha(s)]. \quad (6)$$

Along the rectilinear sections,  $k(s) = 0$ ,  $d\xi/ds = \text{const}$ , the value of this constant being dependent on the integral  $\int k \cos \alpha ds$ . Thus, the displacement does not depend on the straight section length  $L$ , if the condition (4) is satisfied. In this case the maximal displacement (in straight sections) is

$$\xi_{\max} = \frac{\beta}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \frac{\cos \theta}{\sin \alpha_c/2} \int_0^{l/2} s k(s) \sin \alpha(s) ds. \quad (7)$$

Here,  $\theta$  is counted off from the principal normal,  $l$  is the CREL length. To estimate  $\beta_{eq}$ , we put  $\xi_{\max} = b - a$ ,  $a \approx b$ . Then

$$\beta_{eq} = b \sin \frac{\alpha_c}{2} \left( \int_0^{l/2} s k \sin \alpha ds \right)^{-1}. \quad (8)$$

The values of  $\beta_{eq}$  for the slightly different CREL designs with  $k(s) = \text{const}$ ,  $b = 1/(2k)$  are given in table 2.

Table 2

Type of a CREL	1	$\alpha_c$	$\beta_{eq}$ , %
Three semitori	$3\pi/k$	$202^\circ$	5,75
Helix semi-pitch with toroidal sectors at the ends	$2,7\pi/k$	$208^\circ$	6,7
Helix pitch with toroidal quarters at the ends	$2,5\pi/k$	$192^\circ$	7,6

## Conclusion

Feasibility of a closed trap with an arbitrary length of linear sections having rather high  $\beta$  is shown. Actually, finite  $\beta$  and some other effects can limit straight section length. The problem of stabilizing sections of fan type used in mirror devices as well as the problem of superbanana particles inside CREL remain to be solved.

## References

1. *Kadomtsev B.B.* // Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions (in Russian). — M.: USSR Academy of Sciences, 1958. V. 3. P. 285. (Pergamon Press, London, 1960).
2. *Shafranov V.D.* // Atomnaya Energiya. 1967. V. 22. P. 356.
3. *Lortz D., Nührenberg J.* // Nucl. Fusion. 1978. V. 18. P. 807.
4. *Bishop A.S.* // Project Sherwood, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1958. P. 46.
5. *Shafranov V.D.* // Nucl. Fusion. 1963. V. 3. P. 183; 1964. V. 4. P. 232.

## К СТРУКТУРЕ КОЛЕЦ САТУРНА \*)

В работе рассмотрена устойчивость кольца  $F$  Сатурна по отношению к развитию азимутально периодической структуры, которая была обнаружена спутником «Вояджер-1».

Пролетавший недавно вблизи Сатурна спутник «Вояджер-1» обнаружил азимутально периодическую структуру в наиболее удаленном от планеты кольце  $F$ . Внешне она выглядит как два переплетающихся рукава [1]. Представляет интерес рассмотреть возможность образования такого типа структуры под действием только сил гравитации планеты и вещества кольца.

Движение холодного вещества в плоскости кольца описывается уравнениями:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(\phi_0 + \phi), \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma\mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\phi_0 = -\frac{\gamma M_s}{r}, \quad \Delta\phi = 4\pi\gamma\sigma\delta(z), \quad (2)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность,  $\phi_0 + \phi$  — гравитационный потенциал,  $M_s$  — масса Сатурна,  $r$  — расстояние от центра Сатурна. В пренебрежении самогравитацией вещество кольца вращается с угловой скоростью  $\Omega = \sqrt{\gamma M_s/r^3}$ .

Пусть  $R$  — радиус кольца  $F$ . Считая кольцо узким, положим  $r = R + x$  и перейдем в систему координат, вращающуюся с угловой скоростью  $\Omega_0 = \sqrt{\gamma M_s/R^3}$ . В этой системе координат уравнения (1) для стационарного течения принимают вид

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} - 2[\mathbf{v}\Omega_0] = 2\Omega_0\nabla F, \quad \operatorname{div}(\sigma\mathbf{v}) = 0, \quad (3)$$

где  $F = \frac{3}{4}\Omega_0 x^2 - \phi/(2\Omega_0)$ .

Считая период структуры  $\lambda \ll 2\pi R$ , мы пренебрежем в (3) кривизной кольца и введем координату  $y = \theta R$  вместо азимута  $\theta$ . Предполагая, с другой стороны, что  $\lambda$  значительно больше ширины кольца  $\Delta$ , пренебрежем в  $x$ -компоненте уравнения (3) первым нелинейным членом слева по сравнению со вторым. В этом приближении получаем

$$v_y = -\frac{\partial E}{\partial x}. \quad (4)$$

Для узкого кольца,  $\Delta \ll \lambda$ , потенциал  $\phi$  в пределах кольца можно считать не зависящим от  $x$ , так что  $v_y$  близко к невозмущенному значению  $v_y \approx -\frac{3}{2}\Omega_0 x$ . Подставляя это выражение в  $y$ -компоненту первого уравнения (3), найдем

$$v_y = 4\frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{2}{\Omega_0}\frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (5)$$

Здесь под  $\phi$  можно понимать лишь переменную  $\tilde{\phi}$ , зависящую от  $y$  часть потенциала  $\phi$ . Согласно (4), (5) имеем  $v_y \approx v_y(x)$ ,  $v_x \approx v_x(y)$ , так что в этом

\*) Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. Вып. 7. С. 361–363.

приближении течение является несжимаемым,  $\operatorname{div} v = 0$ . Следовательно,  $\sigma = \sigma(\Gamma)$ , где функция потока  $\Gamma$  определена соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \Gamma}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Gamma}{\partial x}, \quad \Gamma = \frac{3}{4} \Omega_0 x^2 - \frac{2\tilde{\phi}}{\Omega_0}. \quad (6)$$

Здесь потенциал  $\tilde{\phi}$  определяется уравнением (2), или

$$\Delta \tilde{\phi} = 4\pi y \delta(z) [\sigma(\Gamma) - \langle \sigma(\Gamma) \rangle], \quad (7)$$

где  $\langle \sigma \rangle$  — усредненное по азимуту значение  $\sigma$ .

Точка бифуркации, т. е. потеря устойчивости однородного по азимуту кольца, определяется из условия появления собственного решения у линеаризованного уравнения (7). Допустим, что для кольца, состоящего из двух рукавов, невозмущенная плотность  $\sigma(x)$  может быть аппроксимирована выражением

$$\sigma(x) = \sigma_0 \left( \frac{x}{\Delta} \right)^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\Delta^2}\right), \quad (8)$$

где  $\sigma_0 = M_F(\pi^{3/2}\Delta R)^{-1}$ ,  $M_F$  — масса кольца.

Для периодически возмущенного кольца  $\sigma = \sigma(\Gamma)$ , так что под  $x^2$  в (8) нужно понимать  $4\Gamma/(3\Omega_0)$ . Подставляя (6) вместо  $\Gamma$  и линеаризуя (7), получим

$$\Delta \tilde{\phi} = -4\pi\gamma\delta(z)\sigma_0 \frac{8\tilde{\phi}}{3\Delta^2\Omega_0^2} \left(1 - \frac{x^2}{\Delta^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{\Delta^2}\right). \quad (9)$$

Для узкого кольца с логарифмической точностью находим отсюда условие бифуркации:

$$\frac{M_F}{M_S} = A \left( \frac{\Delta}{R} \right)^2, \quad (10)$$

где  $A = {}^{3/32} \ln(\lambda/\Delta)$ . Величина  $A$  не менее  $10^{-2}$ , и при наблюдавшейся [2] величине  $\Delta = 30 \div 50$  км по свечению оценка (10) (с учетом  $R = 10^5$  км) дает значение  $M_F/M_S \sim 10^{-9}$ . Учитывая, что масса всех колец не превышает  $10^{-6} M_S$ , значение  $M_F/M_S \sim 10^{-9}$  кажется возможным.

При переходе через точку бифуркации (10) в кольце должна начать развиваться периодическая структура, соответствующая последовательности сближений и раздвижений рукавов. Из структуры уравнения (7) можно усмотреть, что неустойчивость и появление периодического потенциала  $\tilde{\phi}$  связаны с уменьшением  $v_y$  и увеличением плотности  $\sigma$  вблизи  $x$  — точек сепаратриссы линий потока  $\Gamma = \text{const}$ . При захвате вещества в «острова» с  $\tilde{\phi} > 0$  неустойчивость должна насытиться на определенной амплитуде. Если при этом свечение максимально вблизи сепаратриссы, то будет видна картина двух переплетающихся рукавов. Таким образом, кажется, не исключена возможность объяснения видимой картины структуры кольца  $F$  одними только гравитационными силами.

#### Список литературы

1. Suttun C.S. // New Scientist. 1980. V. 88. P. 491.
2. Waldrop M. // Science. 1980. V. 210. P. 1107.



## ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТОКАМАКАХ \*)

### 1. Введение

Как известно, экспериментально измеренная поперечная электронная теплопроводность в плазме токамака существенно (на один-два порядка) превосходит значение, рассчитываемое по теории парных столкновений. В свое время Л.А. Арцимович [1], опираясь на ограниченный набор экспериментальных данных, заметил, что величина  $\beta_\theta$  — отношение давления плазмы к давлению полоидального магнитного поля — приблизительно постоянна. Соответственно при джоулевом нагреве плазмы им были предложены простые эмпирические выражения для электронной температуропроводности:

$$\chi_e \approx \frac{c^2}{2\pi\sigma} \approx 4\nu_e \rho_\theta^2, \quad (1)$$

где  $\sigma$  — электропроводность, равная  $e^2 n / (\nu_e m)$ ,  $\nu_e$  — частота столкновений электронов с ионами,  $n$  — плотность плазмы,  $\rho_\theta$  — средний ларморовский радиус электронов в полоидальном поле. Второе выражение в (1) получило название псевдоклассического, поскольку по форме оно сходно с классическим выражением для  $\chi_e$ , но значительно больше его по величине.

Впоследствии при проведении экспериментов в гораздо более широком диапазоне параметров плазмы было показано, что в высокотемпературной плазме  $\chi_e$  еще больше и зависимости типа (1) не оправдываются. В особенности четко это было продемонстрировано на установке Alcator, где при изменении плотности плазмы в широком диапазоне было показано, что электронная температуропроводность убывает обратно пропорционально плотности  $n$  и соответственно теплопроводность  $\kappa = n\chi$  не зависит от  $n$  [2]. Базируясь на этих результатах, удается провести моделирование [3], неплохо согласующееся с современными экспериментами при джоулевом нагреве плазмы токамака, при очень простом допущении:

$$\chi_e = \frac{5 \cdot 10^{17}}{n} \text{ см}^2/\text{с}. \quad (2)$$

Другими словами, в этом приближении  $\kappa = \chi n = \text{const} = 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ .

В условиях, когда температуры электронов и ионов равны и перенос по электронному каналу является доминирующим, соотношению (2) соответствует простое выражение для энергетического времени жизни  $\tau_E$ :

$$\tau_E = 2\tau_{Ee} = 5 \cdot 10^{-19} \bar{n} a^2, \quad (3)$$

\*) Физика плазмы. 1983. Т. 9. Вып. 5. С. 938–946.

где  $\tau_{Ee}$  — электронное время удержания энергии. В формуле (2)  $\bar{n}$  — средняя плотность (в  $\text{см}^{-3}$ ),  $a$  — радиус круглого плазменного шнура (в см) или эквивалентный радиус  $\bar{a} = \sqrt{ab}$ , если поперечное сечение вытянуто и величина  $k = b/a \neq 1$ .

Выражения (2), (3) получили название скейлинга ИНТОРА [4] (фактически это упрощенный алкаторный скейлинг). Они неплохо коррелируют с экспериментальными данными, хотя подчас обнаруживаются и довольно сильные расхождения. В особенности это относится к проведенной недавно серии экспериментов на ряде токамаков при наличии сильного дополнительного нагрева, более чем на порядок превышающего джоулев нагрев. При этом были обнаружены деградация удержания энергии электронов, ослабление зависимости  $\tau_E$  от  $n$  и появление зависимости  $\tau_E$  от тока в плазме  $I$  ( $\tau_E$  возрастает с  $I$ ). Все это побуждает провести более тщательный анализ эмпирических закономерностей.

Попытки нахождения зависимости  $\tau_E$  от параметров плазмы, таких как плотность, температура, размеры, магнитное поле и ток, предпринимались неоднократно, однако в предположении простых степенных формул для  $\tau_E$  разные авторы на одном и том же экспериментальном материале находили зависимости существенно различного вида. Частично это было связано с тем, что при джоулевом нагреве не удается выделить эту зависимость в чистом виде. Немалую роль играет и то обстоятельство, что в каждом эксперименте наряду с проявлением зависимости  $\chi_e$  от параметров плазмы всегда присутствуют побочные эффекты типа зависимости профилей  $n(r)$ ,  $T(r)$  от привходящих факторов, таких, как влияние пристеночных зон, макроскопических МГД-возмущений и т.д. Поэтому представляется разумным опираться на размерностный анализ.

## 2. Токамаки и анализ размерностей

В работах автора [5] и Коннора, Тейлора [6] было обращено внимание на то, что несмотря на всю сложность процессов, протекающих в плазме токамака, к ним применим универсальный прием анализа размерностей, являющегося следствием утверждения, что протекающие в природе процессы не должны зависеть от единиц измерения физических величин. Другими словами, связи между физическими величинами в каждом конкретном случае могут быть представлены в форме безразмерных соотношений. В применении к токамаку это означает, что  $\chi_e$ ,  $\tau_E$  могут быть выражены через естественные физические параметры и константы, которые характеризуют плазму токамака. В частности,  $\tau_E$  может быть выражена в виде произведения некоторой величины с размерностью времени, составленной из характерных параметров плазмы, умноженной на функцию независимых безразмерных параметров. Итак, нужно найти все безразмерные параметры.

В круглом токамаке с малым радиусом  $a$ , большим  $R$ , при средней плотности плазмы  $n$  и средней температуре  $T$ , тороидальном поле  $B_T$  и полоидальном  $B_\theta = 2I/(ca)$ , где  $I$  — ток в плазме, кроме указанных величин, к параметрам плазмы относятся заряд электрона  $e$ , его масса  $m$ , масса ионов  $M$  и скорость света  $c$ , которая входит в уравнения Максвелла. Таким образом, плазма характеризуется десятью размерными величинами.

Из этих величин можно составить семь независимых безразмерных комбинаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{a}{R}, \quad q = \frac{aB_T}{RB_\theta}, \quad \Pi_e = \pi a^2 n r_e, \quad \beta_T = \frac{16\pi n T}{B_T^2}, \quad \nu^* = \frac{qR}{\lambda_e} \varepsilon^{-3/2}, \\ \mu = \frac{m}{M}, \quad N = \frac{4\pi n}{3} \left( \frac{T}{4\pi e^2 n} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon$  — параметр тороидальности,  $q$  — запас устойчивости,  $\Pi_e$  — так называемый «погонный электрон»,  $r_e = e^2/(mc^2)$  — классический радиус электрона,  $\beta_T$  — отношение давления плазмы  $2nT$  к давлению магнитного поля,  $\nu^*$  — входящий в неоклассическую теорию [7] параметр столкновительности, равный  $\nu_e \omega_b^{-1} \varepsilon^{-3/2}$ , где  $\nu_e = v_e/\lambda_e$ ,  $v_e = \sqrt{2T/m}$ ,  $\lambda_e$  — длина пробега,  $\omega_b = v_e/(qR)$  — так называемая баунс-частота,  $\mu$  — отношение масс,  $N$  — дебаевское число.

Для простоты мы полагаем, что ионная и электронная температуры равны, точнее, что их различие не сказывается на транспортных свойствах электронной компоненты.

Последняя величина в (4)  $N \gg 1$  является показателем идеальности плазмы. В высокотемпературной плазме она не может входить в число характеристик транспортных процессов в плазме (если не считать ее присутствия под знаком логарифма в выражении для  $\lambda_e$ ).

Таким образом, (4) представляет собой полный набор безразмерных параметров плазмы токамака. В токамаке некруглого сечения к (4) следует добавить параметры вытянутости  $k = b/a$  и треугольности  $\delta$ .

Наряду с (4) можно было бы рассмотреть другие безразмерные параметры, которые иногда используются в приложении к токамакам. Однако все новые параметры не являются независимыми и могут быть выражены через (4). Например, полоидальное  $\beta_\theta = B_T^2 \beta_T B_\theta^{-2} = \varepsilon^{-2} q^2 \beta_T$ . Величина  $\xi = v_D/v_e$  — отношение средней дрейфовой скорости  $v_D = I/(\pi a^2 en)$  к тепловой выражается в виде

$$\xi = \frac{v_D}{v_e} = \frac{2}{(2\beta_\theta \Pi_e)^{1/2}}. \quad (5)$$

Полезно также иметь в виду, что средний ларморовский радиус электронов в полоидальном поле  $\rho_\theta = v_e/\omega_\theta$  может быть выражен в виде  $\rho_\theta = c\sqrt{\beta_\theta/2} \omega_{pe}^{-1}$ ,  $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$  — ленгмюровская частота, а  $\omega_\theta = eB_\theta/(mc)$  — ларморовская частота электронов в полоидальном поле. Еще одна безразмерная величина  $K_\theta = a/\rho_\theta$ , равная отношению радиуса плазмы к ларморовскому радиусу  $\rho_\theta$ , характеризует «степень замагниченности» электронов, т. е. их «упрятанность» в ловушку. Она также выражается через написанные выше величины:

$$K_\theta = \frac{a}{\rho_\theta} = 2\sqrt{\frac{2\Pi_e}{\beta_\theta}}. \quad (6)$$

Итак, если исключить из числа определяющих параметров  $N$  и ограничиться фиксированным  $\mu$  (для дейтерия), то мы будем иметь пять безразмерных параметров  $\varepsilon$ ,  $q$ ,  $\Pi_e$ ,  $\beta_T$  или  $\beta_\theta$ ,  $\nu^*$ .

Экспериментальные данные указывают на то, что электронная теплопроводность аномальна и в омическом режиме при  $\lambda_e > qR$  она практически не зависит от  $\lambda_e \sim T^2/n$ , а стало быть, и от  $\nu_*$ . Таким образом, для  $\chi_e$  в круглом токамаке мы имеем только четыре безразмерных параметра. Каждый из этих параметров степенным образом зависит от исходных физических величин — размеров, плотности, температуры, поля. Однако ниоткуда не следует, что и физические связи между безразмерными величинами должны быть степенными. Поэтому популярный поиск скейлингов в виде степенных функций от исходных физических величин а priori не оправдан. Ниже мы попытаемся определить эмпирические закономерности на основе размерностного анализа.

### 3. Скейлинги для $\chi_e$ и $\tau_{Ee}$ при омическом нагреве плазмы

Для поиска эмпирического выражения для  $\chi_e$  можно использовать огромный экспериментальный набор данных на различных токамаках. Однако осуществить такой поиск не просто, поскольку точность измерений на разных токамаках не одинакова, а кроме того, на каждом из них имеются свои привходящие факторы. Базироваться на данных только одного токамака, даже самого хорошего, тоже нельзя, так как мы хотим выяснить зависимость от многих факторов в широком диапазоне параметров плазмы. Поэтому представляется целесообразным произвести «пристрелку» по широкой базе данных, опираясь на макроскопическую характеристику — эпергетическое время жизни  $\tau_{Ee}$ .

Тем не менее мы начнем с  $\chi_e$ . Физически совершенно очевидно, что в силу высокой «замагниченности» электронов перенос ими энергии может осуществляться лишь в виде последовательности малых смещений поперек магнитного поля. Этот процесс может быть описан как теплопроводность с потоком тепла, пропорциональным градиенту температуры. Величина потока, вообще говоря, может зависеть как от локальных параметров плазмы  $n(r)$ ,  $T(r)$  и т.д., так и от макроскопического состояния плазмы в целом, поскольку уровень МГД-колебаний и дрейфовых шумов может зависеть от макроскопических неустойчивостей плазмы. Действуя чисто эмпирически, мы можем условно иметь в виду одни и те же макроскопические условия (например, оптимальные профили) и определить в этих условиях  $\chi_e$ . При этом в  $\chi_e$  войдут явно только локальные величины, но неявно могут оказать влияние и макроскопические параметры. При глобальном рассмотрении в терминах  $\tau_{Ee}$  различия между этими величинами можно не делать.

Начнем с упрощенного выражения (2). В отличие от (1) оно записано в виде, не содержащем естественных для плазмы размерных величин. Перепишем его в виде

$$\chi_e = \frac{c^2}{\omega_{pe}^2 \tau_0} = \frac{c^2 m}{4\pi e^2 n \tau_0}, \quad (7)$$

где  $\omega_{pe}$  — ленгмюровская частота,  $\tau_0$  — некоторая константа с размерностью времени, численно равная  $5,6 \cdot 10^{-7}$  с. Соответственно выражение (3) для  $\tau_E$  может быть записано в виде  $\tau_E \approx a^2 / (4\chi_e) = \tau_0 \Pi_e$ . Разумеется, величина  $\tau_0$  должна выражаться через плазменные параметры. Т. Окава первым обратил внимание на то, что подстановка  $\tau_0 \rightarrow qR/v_e$  приводит к

численному выражению (7), удовлетворительно согласующемуся с экспериментами. Это обстоятельство довольно естественно следует и из размерностных соображений.

В самом деле, энергетическое время жизни  $\tau_E$  должно выражаться в виде произведения некоторого характерного для плазмы времени  $\tau$  на произвольную функцию от безразмерных величин. Величина  $\tau$  должна иметь бесстолкновительный характер, вместе с тем она может быть связана только с движением вдоль силовых линий, так как эмпирическая величина  $\chi_e$  не зависит от магнитного поля. Поэтому единственно разумное выражение для  $\tau_E$  выглядит таким образом:  $\tau_E = \frac{qR}{v_e} F_1(\pi_e, \varepsilon, q, \beta_\theta)$ , где  $qR$  — естественная длина вдоль силовой линии. Предположение о диффузионном характере  $\tau_E \sim a^2$  дает дальнейшее упрощение этой зависимости:

$$\tau_E = \frac{qR}{v_e} \Pi_e F(\varepsilon, q, \beta_\theta), \quad (8)$$

где  $F$  — произвольная функция своих аргументов. Это выражение соответствует формуле (7), где следует положить  $\tau_0 = \frac{qR}{v_e} \Phi(\varepsilon, q, \beta_\theta)$ , причем  $\Phi$  — произвольная функция своих аргументов. Как правило, в более крупных установках и температура выше, поэтому предположение о постоянстве  $\tau_0$  в скейлинге ИНТОР<sup>а</sup> приближенно соответствует допущению  $\Phi \approx \text{const}$ .

Заметим, что плотность  $n$  в безразмерном виде может входить только в комбинации  $na^2$ . Поэтому наличие дополнительной зависимости  $F$  от  $n$  помимо  $\beta_\theta$  означало бы нарушение диффузионного характера переноса тепла электронами, что с учетом допустимости лишь малых смещений электронов относительно силовых линий кажется неправдоподобным. Поэтому для дальнейшего обсуждения мы примем зависимость (8), т. е. функции  $F$ ,  $\Phi$  будем считать не зависящими от  $\Pi_e$ .

Одна из наиболее аккуратных серий экспериментов по измерению  $\chi_e$  при омическом нагреве была проведена на установке Т-11 [8–12]. Экспериментально найденное выражение для  $\chi_e$  имеет вид

$$\chi_e \approx \frac{10^{-20} \sqrt{T}}{\sqrt{A} n q R} \varepsilon^{7/4} \text{ см}^2/\text{с}, \quad (9)$$

где  $T$  — выражено в эВ,  $n$  — в  $\text{см}^{-3}$ ,  $R$  — в см. В (9)  $A$  — атомный вес,  $\varepsilon = r/R$ ,  $q(r)$ ,  $n(r)$ ,  $T(r)$  — локальные значения соответствующих величин. Выражение (9) можно записать в принятых нами обозначениях в виде

$$\chi_e \approx \frac{1}{qR} \frac{\varepsilon^{7/4}}{nr_e} \sqrt{\frac{2T}{Am}}. \quad (10)$$

Следует заметить, что эффект лучшего удержания энергии в дейтериевых разрядах по сравнению с водородными проявляется во многих установках. Однако нередко это различие несколько меньше, чем следует из (10). Поэтому в дальнейшем мы не будем учитывать зависимости от  $A$ , полагая просто  $A = 2$  (для дейтерия).

Соответствующая (10) зависимость  $\tau_{Ee}$  от параметров плазмы, также полученная на Т-11, но коррелирующая со многими другими

экспериментальными данными, выглядит так:

$$\frac{1}{\tau_{Ee}} \approx 7 \cdot \varepsilon^{7/4} \frac{v_e}{qR} \frac{1}{\Pi_e}, \quad (11)$$

где под  $\varepsilon$ ,  $q$  понимаются значения на краю плазменного шнура, а  $v_e$  — среднее по сечению значение электронной тепловой скорости ( $v_e = \sqrt{2T/m}$ ).

Согласно (11)  $\tau_{Ee}$  зависит слабо от  $a$  и сильно от  $R$ , а именно  $\tau_{Ee} \sim R^3(a/R)^{1/4}$ . Разумеется, общая зависимость от куба линейных размеров при фиксированном  $a/R$  есть просто следствие допущения (8) о диффузионном характере переноса энергии, т. е. независимости  $F$  от  $\Pi_e$ . Что касается зависимости от  $a/R$ , то ее установить не просто, так как сравнение разных установок с различными  $a/R$  не дает хорошей точности, а в одной установке трудно менять  $a$  и  $R$ , не меняя условий на границе плазменного шнура. Недавняя серия такого рода экспериментов на Alcator C [13] показала зависимость  $\tau_{Ee} \sim aR^2$ . Поэтому в (10), (11) нельзя исключить более слабой зависимости от  $\varepsilon$ , например линейной. С учетом того, что во многих токамаках основная область вклада электронного теплопереноса находится при  $\varepsilon \sim 1/7$ , в (10), (11) вместо  $\varepsilon^{7/4}$  может быть также величина  $\varepsilon/5$ . Впрочем, это мало сказывается на величине  $\tau_E$  и во всех последующих рассуждениях. Точность выражений (10), (11) не очень велика: с точностью до двойки (10) согласуется с результатами измерений  $\chi_e$  на FT [14] и T-10 [15, 16]. Величина (11) согласуется со многими экспериментами при омическом нагреве. Она несколько более точна, чем просто по скейлингу ИНТОР'а  $\tau_{Ee} = \tau_0 \Pi_e/2$ , который не соответствует размерностному анализу.

#### 4. Скейлинги для $\tau_{Ee}$ при дополнительном нагреве

Хотя за последнее время было проведено много экспериментов по мощному дополнительному нагреву плазмы токамаков, соответствующая экспериментальная информация еще не очень обширна. В частности, она явно недостаточна для определения локальных значений  $\chi_e$ . Поэтому дальнейшее обсуждение мы проведем, привлекая в основном данные по энергетическому времени  $\tau_{Ee}$ .

Поскольку при дополнительном нагреве плазмы начинает играть роль теплоперенос по ионному каналу, нам для ориентировки следует представлять себе величину  $\tau_{Ei}$  (полное время  $\tau_E$  при  $T_e \approx T_i$  удовлетворяет соотношению  $2/\tau_E = 1/\tau_{Ee} + 1/\tau_{Ei}$ ). Согласно неоклассической теории, ионная температуропроводность приближенно равна

$$\chi_i \approx \frac{v_i}{qR} q^2 \rho_i^2 f(v_{*i}), \quad (12)$$

где  $v_i$  — ионная тепловая скорость, равная  $v_e \sqrt{\mu}$ ,  $\rho_i = \rho_e / \sqrt{\mu}$  — ионный ларморовский радиус, а функция  $f \approx 1$  в области плато  $1 < \nu_{*i} < \varepsilon^{-3/2}$ ,  $f \approx \nu_{*i}$  при  $\nu_{*i} < 1$  и  $f \approx qR/\lambda_i$  в области Пфирша–Шлютера  $\lambda_i < qR$ , т. е. при  $\nu_{*i} > \varepsilon^{-3/2}$ . Первые эксперименты на установках T-11, PLT в сравнительно редкой плазме показали, что неоклассическая теория хорошо описывает ионный теплоперенос в широкой области частот столкновений, включая  $\nu_{*i} \lesssim 10^{-2}$ . Эксперименты последнего времени проводились

в достаточно плотной плазме, в области плато, где  $f \approx 1$ . Учитывая, что  $\rho_i = \rho_e/\sqrt{\mu}$ , а  $\rho_e = \varepsilon\rho\theta q^{-1} = \varepsilon\beta_\theta^{1/2}c/(2q\omega_{pe})$ , выражение (12) можно записать также в виде

$$\chi_i = \frac{2v_e}{qR} \frac{\varepsilon^2}{nr_e} \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{\beta_\theta}{16\pi} f(\nu_*). \quad (13)$$

Для дейтерия  $16\pi\sqrt{\mu} \approx 1$ , так что в области плато (13) начинает превышать (10) при  $\beta_\theta \gtrsim 1/3$ . Для оценок можно принять

$$\chi_i \approx 3\chi_e\beta_\theta f, \quad \frac{1}{\tau_E} = \frac{1}{2\tau_{Ee}} (1 + 3\beta_\theta f), \quad (14)$$

где  $f \approx 1$  в области плато,  $f \approx \varepsilon^{3/2}\nu_{*i}$  в области Пфирша–Шлютера ( $\lambda_i = \lambda_e < qR$ ) и  $f \approx \nu_{*i} < 1$  в области редких столкновений  $\nu_{*i} < 1$ .

Заметим далее, что при нагреве плазмы с суммарной вводимой мощностью  $P$  имеет место уравнение баланса энергии:

$$\frac{3nT}{\tau_E} = \frac{P}{V}, \quad (15)$$

где  $V = 2\pi^2 a^2 R$  — объем плазмы.

Предполагая, что  $j \sim \sigma \sim T^{3/2}$  имеет заданный профиль  $(1 - r^2/a^2)^2$ , соотношение (15) при джоулевом нагреве можно приближенно записать в виде

$$\frac{3nT}{\tau_E} = \frac{P}{V} \approx \frac{4nT}{\beta_\theta} \varepsilon^{3/2} \frac{v_e}{qR} \frac{\nu_*}{\Pi_e}. \quad (16)$$

Отсюда следует, что при омическом нагреве в области ионного плато имеет место приближенное соотношение

$$\beta_\theta(1 + 3\beta_\theta) \approx 0,6\nu_*. \quad (17)$$

Видно, что при достаточно больших  $\nu_*$  величина  $\beta_\theta$  может быть порядка единицы. Именно к этой области не очень горячей плазмы и относились ранние эксперименты по токамакам, что дало основание для эмпирических соотношений (1).

Перейдем теперь к обсуждению режимов с дополнительным нагревом плазмы. Наиболее полно соответствующие результаты были представлены на Балтиморской конференции в докладах [17–21]. В целом ряде установок было обнаружено ухудшение времени жизни  $\tau_E$  при дополнительном нагреве. Часть этого эффекта может быть связана с тем, что профиль вклада энергии при дополнительном нагреве обычно хуже, чем при джоулевом нагреве. Однако полностью ухудшение удержания списать на этот эффект не удастся.

Пожалуй, наиболее четко вывод об ухудшении удержания плазмы при увеличении  $\beta_\theta$  до значений  $\varepsilon\beta_\theta \approx 0,6$  был сделан по результатам экспериментов на установке ISXB [17]. Авторы утверждают, что на этой установке обнаружен «мягкий предел» по  $\beta_\theta$ . А именно, при увеличении вводимой мощности  $P$  в плазму величина  $\beta_\theta$  при больших  $P$  возрастает гораздо слабее, чем по линейному закону —  $\beta_\theta \sim P^{1/3}$ . Это явление можно связать [17] с усилением электронного теплопереноса  $\sim \beta_\theta^2$ . В рамках нашего размерностного анализа для учета этого эффекта естественно выбрать зависимость

вида

$$\frac{1}{\tau_{Ee}} = C \frac{v_e}{R\Pi_e} \varepsilon^2 \beta_\theta^2, \quad (18)$$

в которую должна перейти (11) при увеличении  $\beta_\theta$ . Здесь  $C$  — некоторая константа, и в отличие от (11) мы опустили  $q$ , поскольку эксперимент не обнаруживает зависимости от  $B_T$  в величинах  $\tau_{Ee}$  и  $\beta_\theta$ .

Сравнение с экспериментом ISXB дает величину  $C \approx 3$ . Соответственно из уравнения баланса энергии электронов (в условиях эксперимента вся мощность идет в электроны), полагая приближенно  $v_e \approx \text{const}$ , можно получить эмпирические соотношения:

$$\beta_\theta \approx 0,1n^{1/3}R^{2/3}I^{-2/3}P^{1/3}, \quad (19)$$

$$\tau_{Ee} \approx 0,1n^{1/3}R^{4/3}I^{4/3}P^{-2/3}, \quad (20)$$

где  $n$  выражено в  $10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $I$  — в МА,  $R$  — в м,  $P$  — в МВт,  $\tau_{Ee}$  — в с.

Следует заметить, что сходные выражения получены на установке DITE [18, 22], причем авторы последней работы отмечают, что (19) неплохо согласуется и с экспериментами при джоулевым нагреве. Последнее утверждение есть лишь отражение того факта, что выражения (11), (18) не так сильно различаются между собой для экспериментов при повышенной плотности, когда  $q \sim 3$ ,  $\beta_\theta \sim 1$ . Первичными являются именно скейлинги (11), (18), а не их следствия (19), (20). При определении  $C$  в (18) мы не учитывали вклада ионной теплопроводности. Так как (18) больше (11) при  $\beta_\theta > \sqrt{3/q} \sim 1$ , когда существен ионный канал, то с учетом ионного канала величина  $C$  должна быть меньше.

Итак, результаты ISXB могут быть интерпретированы в рамках размерностного анализа как уменьшение  $\tau_{Ee}$  при больших  $\beta_\theta$ , согласно (18). Однако этот вывод нельзя считать универсальным и относящимся ко всем токамакам. В самом деле, с ним коррелирует пока только установка DITE. На установке D-III [19], где было получено рекордное значение  $\beta_T = 4,7\%$ , не наблюдается такого сильного замедления роста  $\beta$  с  $P$  (хотя и наблюдается изменение скейлинга в периферийных слоях плазмы: слабая зависимость  $\chi_e$  от  $n$  и благоприятная зависимость от  $B_\theta$ ). Хорошее удержание плазмы с  $\beta_0 \gtrsim 1$  имеет место также и в T-11 [12], JFT-2 [20]. Можно было бы попытаться связать различия между разными установками с тем, что в ISXB величина  $\varepsilon\beta_\theta$  достигает значения 0,6, а в T-11, JFT-2 и D-III она не превышает  $0,3 \div 0,4$ . Однако в установке ASDEX [21] наблюдается хорошее удержание энергии, в особенности в так называемом  $H$ -режиме, и при  $\varepsilon\beta_\theta \gtrsim 0,6$ . Таким образом, вывод из этих экспериментов заключается в том, что хотя и наблюдается ухудшение удержания энергии, но вместе с тем существуют режимы и с хорошим удержанием.

Обсудим теперь результаты на PDX [23], где наблюдается эффект насыщения  $\beta_T$  при увеличении мощности  $P$ . На установке были обнаружены всплески колебаний, которые получили жаргонное наименование «рыбьего хвоста». По мнению авторов, именно сбросом энергии горячей компоненты во время этих всплесков и обусловлено насыщение  $\beta_T$ . При теоретическом описании этого явления опять должны быть использованы безразмерные параметры (4), а кроме того, анизотропия горячей компоненты и отношение энергии инжектируемых ионов к температуре плазмы. Впрочем, экспериментальная информация о зависимости явления от последних пара-



метров отсутствует, поэтому явно мы их учитывать не будем. Кроме того, мы не будем принимать во внимание зависимости от плотности, так как в большинстве импульсов она поддерживалась постоянной или по крайней мере, когда она не контролировалась, определенных экспериментальных зависимостей от плотности найдено не было.

Экспериментальные данные на PDX суммируются в виде определенной зависимости  $q\beta_T = \Psi(PB^{-3/2})$ , где функция  $\Psi$  сначала линейно возрастает с аргументом, а затем достигает насыщения при  $q\beta_T \approx 5 \cdot 10^{-2}$  (мы используем выражение с округленными показателями степеней). Разумеется, в области насыщения точное выражение для аргумента  $\Psi$  теряет смысл, а в области линейности указанная выше зависимость означает, что  $\tau_E \sim B_\theta B_T^{-1/2}$  и не зависит от температуры. (Зависимость от плотности специально не исследовалась, в большей части экспериментов она поддерживалась постоянной на уровне  $4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ .) По абсолютной величине  $\tau_E$  неплохо согласуется с формулой Муховатова–Мережкина (11), отличаясь от нее раза в полтора. Однако зависимости от параметров, как мы видим, сильно различаются.

Для согласования с экспериментом в (11) можно ввести дополнительный фактор усиления теплопереноса вида  $\Phi q \cdot \beta_\theta^{1/4} \nu_*^{3/8}$ . В области линейной зависимости  $\beta_T$  от  $P$   $\Phi$  — просто некоторый коэффициент  $\sim 1,5 \div 2$  (напомним, что  $\tau_E \approx 2\tau_{Ee}$ ). Данную зависимость можно распространить и на все значения  $P$ , считая, что  $\Phi$  — есть некоторая функция  $q\beta_T$ , резко возрастающая при приближении  $q\beta_T$  к критическому значению. Разумеется, при этом мы включаем в потери и выброс горячих ионов.

Электронная теплопроводность в токамаках является аномальной, ее величина при омическом нагреве во многих установках в пределах фактора двойки согласуется с эмпирической формулой Муховатова–Мережкина (9). Эта формула в плазменных единицах записывается в виде (10). Она имеет определенное теоретическое обоснование [24, 25] базирующееся на представлении о разрушении магнитных поверхностей на внутреннем масштабе  $c/\omega_{pe}$ .

В экспериментах с дополнительным нагревом плазмы появляются некоторые новые особенности в теплопереносе электронов, причем меняются зависимости от параметров. Самым удобным подходом для обсуждения этих особенностей является размерностный анализ. Он показывает, что помимо (10) в игру могут вступать другие безразмерные параметры, а именно  $\beta_\theta$ ,  $\beta_T$ ,  $\nu_*$ . Зависимость от этих параметров может быть учтена в виде некоторого фактора усиления потерь по сравнению с потерями в омическом режиме.

Эффект повышения теплопереноса наблюдается не на всех установках, а если и наблюдается, то фактор его усиления по сравнению с омическим режимом не превышает величины масштаба двойки-тройки (даже в ISXB после вычета потерь по ионному каналу). Зависимость этого фактора от  $\beta_T$  и  $\beta_\theta$  похожа на проявление баллонной неустойчивости или по крайней мере ее резистивного варианта [26, 27]. Возможным показателем резистивной природы этого усиления может служить благоприятная зависимость фактора усиления теплопереноса от величины  $\nu_*$  — фактора столкновительности в PLT. На установке ISXB, для которой мы воспользовались

упрощенным фактором усиления  $\approx 1/3 q \beta_\theta^2$  (см. (18)), наблюдается корреляция экспериментальных данных с теоретической оценкой  $\chi_e$  на основе резистивной баллонной неустойчивости, которая также предсказывает благоприятную линейную зависимость от  $\nu_*$  [27]. Поэтому кажется вероятным, что при переходе к более высокотемпературной плазме, когда  $\nu_*$  станет еще меньше, наблюдаемое сейчас усиление  $\chi_e$  из-за баллонной резистивной неустойчивости будет меньше.

Тем не менее появление тенденции к усилению  $\chi_e$  побуждает поставить вопрос, что может происходить с  $\chi_e$  по мере перехода к более крупным установкам с плазмой при более высоких температуре и плотности. В терминах безразмерных параметров имеющиеся эксперименты уже сейчас покрывают достаточно широкую область значений  $\varepsilon$ ,  $q$ ,  $\beta_T$ ,  $\beta_\theta$ ,  $\nu_*$ ,  $\Pi_e$ . При более далекой экстраполяции на будущие крупные установки только  $\nu_*$  и  $\Pi_e$  могут существенно выйти за пределы этой области. Что касается зависимости  $\tau_E$  от  $\nu_*$ , то она слабая и, во всяком случае, благоприятная. Что же касается зависимости от  $\Pi_e$ , то в настоящее время  $\tau_E \sim \Pi_e$ , и в рамках представлений о диффузионном характере теплопереноса естественно считать, что и в дальнейшем  $\tau_E$  будет возрастать при увеличении размеров плазмы. Однако в этом пункте требуется определенная ясность. Дело в том, что величина  $\Pi_e$  характеризует отношение внешнего масштаба плазмы  $a$  к внутреннему  $\sim c\omega_{pe}^{-1}$ , определяющему величину характерного смещения электронов при диффузионном блуждании. А именно,  $a/(c\omega_{pe}^{-1}) \sim \Pi_e^{1/2}$ . Увеличение  $\Pi_e$  означает, что внутренний масштаб становится все меньше и меньше по сравнению с внешним. Это означает, что зависимость  $\tau_E \sim \Pi_e$  с ростом  $\Pi_e$  предполагает относительное уменьшение шага диффузионного смещения электронов по сравнению с  $a$ . Так как в существующих экспериментах уже появились тенденции к усилению  $\chi_e$  по сравнению с величиной (10), определяемой только внутренними масштабами, то можно сделать вывод, что масштаб  $c\omega_{pe}^{-1}$  не является, вообще говоря, универсальным, а может несколько возрастать при усилении шумов в плазме, например, из-за баллонной неустойчивости. Поэтому при увеличении  $\Pi_e$ , или попросту  $\bar{n}a^2$ , может потребоваться более тщательный контроль магнитных флуктуаций внутри плазмы и сведение их к минимуму, чтобы не выйти далеко за пределы скейлинга, определяемого только внутренними масштабами плазмы.

### Список литературы

1. *Artsimovich L.A.* // Nucl. Fus. 1972. V. 12. P. 215.
2. *Gondhalekar A. et al.* // VII Intern. Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Innsbruck, 1978 (IAEA, Vienna, 1979). V. 1. P. 655.
3. *Post D.E. et al.* // Ibid. IAEA, Vienna, 1979. V. 1. P. 471.
4. INTOR — report, Zero Phase. IAEA, Vienna, 1980.
5. *Кадомцев Б.Б.* // Физика плазмы. 1975. Т. 1. С. 531.
6. *Connor J.W., Taylor J.B.* // Nucl. Fus. 1977. V. 17. P. 1047.
7. *Галеев А.А., Сагдеев Р.З.* // В кн.: Вопросы теории плазмы / Под ред. Леонтовича М.А. — М.: Атомиздат, 1973. Вып. 7. С. 205.

8. *Vlasenkov V.S., Leonov V.M. et al.* // VII Intern. Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Innsbruck, 1978. IAEA, Vienna, 1979. V. 1. P. 211.
9. *Leonov V.M., Merezhkin V.G. et al.* // VIII Intern. Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. IAEA-CN-38/N-2. Brussels, 1980.
10. *Мережкин В.Г., Муховатов В.С.* // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. С. 463.
11. *Leonov V.M. et al.* // X Europ. Conf. on Contr. Fus. and Plasma Physics. Moscow, 1981. P. A-17.
12. *Barsukov A.G. et al.* // IX Intern. Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. IAEA-CN-41/A-6, Baltimore, 1982.
13. *Blackwell B. et al.* // Ibid., IAEA-CN-41/1-3.
14. *Alladio F. et al.* // Preprint 81.49./р. CNEN, Centro di Frascati, 1981.
15. *Аликаев В.В. и др.* // Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35. С. 136.
16. *Берлизов А.Б. и др.* // IX Междунар. конф. по Физике плазмы и УТС. IAEA-CN-41/1-6. Балтимор, 1982.
17. *Murakami M. et al.* // IX Intern. Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. IAEA-CN-41/A-4. Baltimore, 1982.
18. *Axon K.B. et al.* // Ibid., IAEA-CN-41/R-3.
19. *Nagami M., Overskei D. et al.* // Ibid., IAEA-CN-41/A-2.
20. *Yamamoto S. et al.* // Ibid., IAEA-CN-41/A-5.
21. *Wagner F. et al.* // Ibid., IAEA-CN-41/A-3.
22. *Lomas P.J. et al.* // X Europ. Conf. on Contr. Fus. and Plasma Phys. Moscow, 1981, paper A-1a.
23. *Johnson D. et al.* // Ibid., IAEA-CN-41/A-1.
24. *Kadomtsev B.B., Pogutse O.P.* // VII Intern. Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Innsbruck, 1978. IAEA, Vienna, 1979. V. 1. P. 649.
25. *Параил П.П., Погуце О.П.* // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32. С. 408.
26. *Kadomtsev B.B., Pogutse O.P., Yurchenko E.I.* // IX Intern. Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus., IAEA-CN-41/P-3. Baltimore, 1982.
27. *Carreras B.A. et al.* // Ibid., IAEA-CN-41/P-4.

# NON-LINEAR MHD EQUATIONS AND DISSIPATIVE BALLOONING MODES \*)

An investigation is made of the non-linear stage of the dissipative ballooning instability and its effect on transport processes in tokamaks. The analysis is made by using a simplified non-linear system of MHD equations which can describe both kink and ballooning instabilities of a non-ideal plasma. The equations were derived by expanding an initial MHD system in terms of reciprocal powers of the strong longitudinal field allowing for dissipation and ballooning effects. In addition to Alfvén oscillations, this system of equations can also take into account ion acoustic oscillations, which are important for dissipative ballooning modes.

As a result of the physical clarity and simplicity of this simplified system, the role of non-linear effects under conditions of strong turbulence can be identified and the transport coefficients as a result of the dissipative ballooning instability can be estimated.

## 1. Introduction

Progress achieved recently in the theory of instability and non-linear processes in a high-temperature tokamak plasma has been to a considerable extent due to the use of two simplified scalar non-linear MHD equations proposed in Refs [1, 2]. These equations have been used to develop a theory of the non-linear stage of ideal kink instability [1] and to construct a theory of first-mode reconnection [3] which has been fully confirmed experimentally.

In view of the physical clarity of the scalar equations, it has also been possible to develop a non-linear theory of the tearing instability [4], which shows good agreement with numerical calculations [5, 6].

The simplified system of MHD equations was derived specially to study instabilities excited by the longitudinal current, when effects associated with the plasma pressure are negligible.

As a result of success recently achieved with auxiliary methods of heating, the thermal energy of the plasma in tokamaks is comparable with the energy of the longitudinal current and, in this situation, ballooning instabilities excited by the plasma pressure may play an important role. It has thus become necessary to generalize the equations [1, 2] to the case of a finite-pressure plasma.

In the present paper, we derive a complete scalar system of non-linear MHD equations which generalizes the equations derived in Refs [1, 2] to the case of finite plasma pressure and enables both kink and ballooning instabilities to be investigated.

---

\*) *Kadomtsev B.B., Pogutse O.P., Yurchenko E.I.* // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1982. International Atomic Energy Agency. Vienna, 1983. V. 3. P. 67-75.

## 2. Non-Linear MHD Equations

In this section we shall give the derivation of the simplified non-linear equations by using the expansion applied in Ref. [7]. We shall assume that the plasma is situated in a strong toroidal magnetic field  $\mathbf{B}_0$  such that the thermal energy of the plasma and the magnetic field energy of the current are substantially less than the longitudinal field energy. In this situation, the thermal energy of the plasma and the field energy of the current are insufficient to perturb  $\mathbf{B}_0$ . In other words, we shall assume that the frequency of the magneto-acoustic oscillations  $k_{\perp}c_A$  is substantially higher than the frequency of the Alfvén oscillations  $k_{\parallel}c_A$  and the acoustic oscillations  $k_{\parallel}c_s$ . In this case, to a first approximation, the field lines can only be bent without becoming more crowded or more spaced out. These oscillations can be described by a single longitudinal component of the vector potential  $A_{\parallel}$ . Subsequently, it will thus be more convenient for us to use, rather than the magnetic and electric fields, the vector and scalar potentials:  $\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial A/(c\partial t)$ .

Using Ohm's law  $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + (1/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  and expanding this in terms of the parameter  $B_j/B_0$ , we can express the transverse velocity in terms of the scalar potential:  $\mathbf{v}_{\perp} = c\mathbf{B} \times \nabla\varphi/B^2$ . From the condition  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , we can express the transverse components of  $\mathbf{B}$  with respect to  $\mathbf{B}_0$  in terms of the magnetic flux function  $\psi$ :  $\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{e}_s \times \nabla\psi/h$ , where  $h = (1 - kr \cos \psi)$  is the Lamé coefficient in the quasi-cylindrical system of co-ordinates  $r, \omega, s$  [8]. From the longitudinal component of Ohm's law, using the relationship  $\psi = hA_{\parallel}$ , we then obtain an equation for  $\psi$ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla)\psi + c \frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\frac{c}{\sigma} h j_{\parallel}. \quad (1)$$

We obtain another relationship between  $\psi$  and  $j_{\parallel}$  from  $\text{curl } \mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{j}$ :

$$h\nabla_{\perp} \frac{1}{h} \nabla_{\perp} \psi = -\frac{4\pi}{c} h j_{\parallel}. \quad (2)$$

This is none other than the Grad-Shafranov equation.

An equation for  $\varphi$  (or, which is equivalent, for  $\mathbf{v}_{\perp}$ ) can be derived from the equation of motion

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

and the quasi-neutrality condition  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , expressing the current in the form of the sum  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\perp} + \mathbf{j}_{\parallel}$ . As a result of simple transformations, we obtain:

$$\frac{c^2}{B^2} \nabla_{\perp} \cdot \left[ \rho \left( \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla) \nabla \varphi \right) \right] - c\mathbf{B} \cdot \left( \nabla p \times \nabla \frac{1}{B^2} \right) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{j_{\parallel}}{B} = 0. \quad (3)$$

Equation (3) contains another unknown function — the pressure  $p$ . This is determined by using the energy equation, which we shall give in the form:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla)p + v_{\parallel} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla}{B} p + \gamma_0 p \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla}{B} v_{\parallel} = 0. \quad (4)$$

Here we have assumed that  $\text{div } \mathbf{v}_{\perp} = 0$ .

To close this system of equations, we require an equation for the longitudinal velocity component  $v_{\parallel}$ . This is obtained from the longitudinal component of the equation of motion and takes the following form:

$$\rho \left[ \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla) v_{\parallel} + v_{\parallel} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla}{B} v_{\parallel} \right] + \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla}{B} p = 0. \quad (5)$$

For the sake of generality, we shall also give the equation for the density:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla) \rho + \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla}{B} v_{\parallel} \rho = 0. \quad (6)$$

Equations (1)–(6) have a simple physical meaning. Equation (1) describes the entrainment of the magnetic flux by the plasma. Equation (2) is the conventional Ampère equation rewritten in a slightly different form. Equation (3) describes the propagation of vortices in a conducting fluid. The first term in this equation is the normal inertial term. The second term, which is related to the pressure gradient and the curvature of the magnetic field lines, is similar to the gravitational force in a normal fluid. In a plasma, this term describes flute and ballooning perturbations. The last term, which is proportional to the current  $j_{\parallel}$ , is responsible for kink instability and also describes the Alfvén waves. It gives a force which causes helical twisting of the plasma which can be seen from the operator  $\mathbf{B} \cdot \nabla / B$ ; for helical perturbations this operator vanishes. Equations (4) and (5) describe the propagation of perturbations along the field lines at the velocity of sound. Equation (6) is the normal equation of continuity which, together with Eq. (4), yields the relationship  $p \sim \rho_0^{\gamma}$ .

### 3. Linear Theory of Dissipative Ballooning Modes

Before presenting the results of linear theory, we shall generalize the linearized variant of Eqs (1)–(6) to some extent. To do this, we shall add to the right-hand sides of these equations terms of the type  $\nabla(D_0 \nabla \psi)$ ,  $\nabla(D_0 \nabla \varphi)$ , ... (depending on the equation). This is equivalent to replacing the linear-theory growth rate  $\gamma$  (all the perturbed quantities are assumed to depend on  $t$  in accordance with  $\exp(\gamma t)$ ) with the operator  $(\gamma - \nabla(D_0 \nabla))$ . This substitution follows logically from the structure of non-linear terms of the type  $(\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla \psi)$ ,  $(\mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla \varphi)$ , ..., if we assume that at the non-linear-stage collective plasma transport processes occur at right angles to the magnetic field. In this case, small-scale fluctuations cause efficient diffusion spreading of large-scale perturbations [7]. After making this substitution, we can use two approaches: 1) assuming that  $D_0 = 0$ , we can calculate the instability growth rates  $\gamma$  and the localization dimensions of  $1/k_{\perp}$ , which separately yield little information; 2) assuming that  $\gamma = 0$ , we can find  $D_0$ , which immediately gives us the combination  $\gamma/k_{\perp}^2$ , which has the dimensions of a transport coefficient. However, at this point we cannot state that  $D_0 \sim \gamma/k_{\perp}^2$  corresponds to the true transport coefficient. It will be shown subsequently that this is not always the case. The growth rates and localization dimensions were calculated in Ref. [9–12], and at this point we shall find the value of  $D_0$  required for the non-linear calculations.

The linearized equations allowing for  $D_0$  take the following form:

$$\left(\gamma - D_0 \Delta_{\perp} - \frac{a^2}{\tau_s} \delta_{\perp}\right) \tilde{\psi} = -c \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla}{B^s} \tilde{\varphi}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{B^2} \nabla_{\perp} [\rho(\gamma - D_0 \Delta_{\perp}) \nabla \tilde{\varphi}] - c \left( \nabla \times \frac{1}{B^2} \mathbf{B} \right) \nabla \tilde{p} - \\ - \frac{1}{\sqrt{g} B^s} \frac{d_{j\parallel}}{dr} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta} + \frac{c}{4\pi} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla}{B^s} \Delta_{\perp} \tilde{\psi} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$[(\gamma - D_0 \Delta_{\perp})^2 - c_s^2 (\mathbf{B} \cdot \nabla / B^s)^2] \tilde{p} = \frac{c p^1}{\sqrt{g} B^s} \left[ (\gamma - D_0 \Delta_{\perp}) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} + \frac{c_s^2}{c} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla}{B^s} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta} \right], \quad (9)$$

where  $\tau_s = 4\pi\sigma a^2/c^2$  is the skin time,  $a$  is the plasma minor radius (introduced for normalization). A system of co-ordinates  $z, \theta, s$ , with «straight» field lines is used here [8],  $B^s$  is the contravariant component of the steady-state magnetic field,  $g$  is the determinant of the metric tensor, and  $c_s = (\gamma_0 p / \rho)^{1/2}$  is the velocity of sound.

As a result of an investigation of higher harmonics of the ballooning modes using a technique developed in Refs [10, 12] and assuming that  $\gamma = 0$ , we obtain from Eqs (7)–(9) (for the Fourier harmonics):

$$\begin{aligned} S^2 \frac{\hat{D}_0}{1 + D_0} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \frac{\hat{D}_0^2}{N^2} (1 + t^2)^2 \varphi - \frac{\alpha V}{1 + t^2} p + \frac{1}{\hat{D}_0} \left[ \frac{\alpha^2}{2(1 + t^2)} + \frac{s\alpha^2}{(1 + t^2)^2} \right] \times \\ \times \left[ \hat{D}_0 + \frac{\hat{D}_0^2 (1 + t^2)^2}{\hat{C}_s^2 + D_0^2 (1 + t^2)^2} \right] p = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left[ \hat{D}_0^2 - \frac{s^2 \hat{C}_s^2}{(1 + t^2)^2} \frac{d^2}{dt^2} \right] p = \left[ \hat{D}_0^2 - \frac{\hat{D}_0 s^2 \hat{C}_s^2}{(1 + \hat{D}_0)(1 + t^2)} \frac{d}{dt} \frac{1}{1 + t^2} \frac{d}{dt} \right] \varphi. \quad (11)$$

Here we have

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 = \frac{D_0 \tau_s}{a^2}, \quad \hat{C}_s = \frac{c_s \tau_s}{Rq h^2 q^2}, \quad N = \frac{\tau_s}{\tau_{\theta} h^2 q^2}, \quad s = \frac{q^1 \tau}{q}, \quad \alpha = -\frac{8\pi p^1 R q^2}{B^2}, \\ q = \frac{B^s}{RB^{\theta}}, \quad \tau_{\theta} = \frac{Rq}{c_A} = \frac{a}{c_{\theta}}, \quad c_{\theta} = \left( \frac{B_{\tau}^2}{4\pi\rho} \right)^{1/2}, \quad V = \frac{\alpha}{2} + \varepsilon(1 - q^{-2}), \quad \varepsilon = \frac{\tau}{R}, \end{aligned}$$

$R$  is the major radius of the torus,  $n$  is the azimuthal number with respect to  $s$ . An analysis of these equations shows that the result depends strongly on the ratio of the velocity of sound to the skin penetration rate. For simplicity, we shall immediately analyse the two limiting cases  $c_s = \infty$  and  $c_s = 0$ .

**1.** The limit  $c_s = \infty$  corresponds to an incompressible plasma. It can be envisaged that in this case, ion-acoustic oscillations transfer the perturbations from the unstable region and the oscillations are more stable than for finite  $c_s$ . In addition, they have a pressure threshold. The corresponding expression for  $D_0$  is determined from

$$\hat{D}_0^{1/6} (1 + \hat{D}_0)^{1/6} = \frac{N^{1/3}}{4s^{5/3} (1 + 2q^2)^{1/6}} \left( \frac{s\alpha^2}{2} - \alpha V + \frac{\alpha^2}{2} \right). \quad (12)$$

The threshold  $\alpha_0$  is found from the condition

$$\alpha V - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{s\alpha^2}{2} = 0. \quad (13)$$

2. The limit  $c_s = 0$  naturally corresponds to more unstable conditions; in this limit there is no pressure threshold and  $D_0$  is determined from

$$\frac{\widehat{D}_0^{13/6}}{(1 + \widehat{D}_0)^{5/6}} \frac{4s^{5/3}(1 + 2q^2)^{1/6}}{N^{1/3}} + \left( \alpha V - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{S\alpha^2}{2} \right) \widehat{D}_0 - \frac{\alpha^2}{2} (1 + s) = 0. \quad (14)$$

Both cases are shown in Fig. 1. Curve 1 corresponds to the case of ideal ballooning modes and shows two stable zones at low and high pressures. Curve 2 corresponds to the case  $c_s = \infty$  and  $\sigma \neq \infty$ , and shows that, in this case, only one stable zone is found at low pressures (criterion (13)). In the case  $c_s = 0$  and  $\sigma \neq \infty$  (curve 3), the plasma is always unstable.

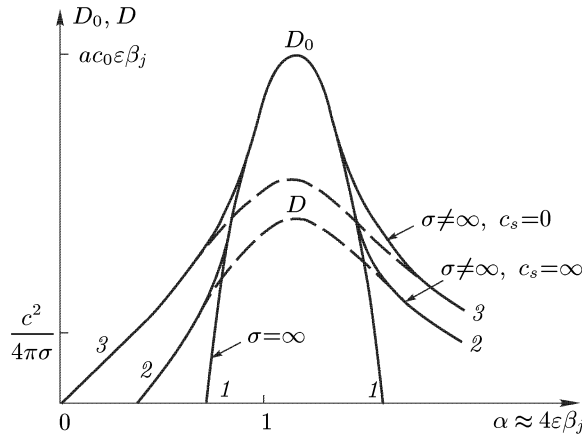


Fig. 1.  $D$  and  $D_0$  versus  $\alpha$  for  $c_s = 0$  and  $c_s = \infty$

Equations (12) and (14) are valid in the first stable zone in accordance with the ideal criterion. A model problem was solved for the second stable zone and in this zone curves 2 and 3 are qualitative.

At low pressures,  $\alpha \ll 1$ , where the oscillations can be considered to be potential, the typical value of  $D_0$  is of the order of the pseudo-classical value  $D_0 \sim \frac{c^2}{4\pi\sigma} \beta_j \left( \beta_j = \frac{8\pi\bar{p}}{B^2} \right)$ .

As  $\alpha$  increases in the region  $\alpha \approx \alpha_0$  (condition (13)), the oscillations become non-potential and the value of  $D_0$  begins to depend on the mode number ( $nq$ ), and when the criterion for the stability of ideal ballooning modes [12] ceases to be satisfied:

$$\frac{1}{2} s^2 + \alpha V - \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{1}{2} s\alpha^2 = 0 \quad (15)$$

it tends to the ideal value  $\gamma/k_{\perp}^2 \sim ac_0/(n^2q^2)$ .

This value of  $D_0$  cannot characterize real transport processes and indicates the formal nature of  $D_0$ .

#### 4. Collective Transport Processes due to Ballooning Modes

In the case of ideal conductivity, the expression for the velocity contained in Eqs (1)–(6) can be written in two different form:

$$v_x = i \frac{ck_y}{B} \varphi = -i \frac{c}{B} \frac{\gamma}{k_{\parallel}c} A_{\parallel}. \quad (16)$$

Here for simplicity we have introduced a local system of co-ordinates with the « $X$ »-axis at right angles to the magnetic field and we use the quasi-classical



approximation  $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ . The two variants (16) are derived from the frozen-in condition  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = B(-k_{\parallel}\varphi - (\gamma/c)A_{\parallel}) = 0$ , i. e.  $\varphi = \gamma A_{\parallel}/(k_{\parallel}c)$ . The first expression in Eq. (16) may be considered to be the velocity of the material whilst the second can be regarded as the ‘rate of displacement’ of the field lines. The velocity of interest to us is the rate of penetration of the plasma across the magnetic field, for which it is logical to take the difference between these expressions:

$$v_x^n = i \frac{ck_y}{B} \left( \varphi - \frac{\gamma}{k_{\parallel}c} A_{\parallel} \right). \quad (17)$$

In the case of ideal conductivity, Eq. (17) by definition vanishes. If  $\sigma \neq \infty$ , using the equation for  $A_{\parallel}$  (or  $\psi$ ) (1), we can express  $A_{\parallel}$  in terms of  $\varphi$  and obtain the following expression for the rate of penetration:

$$\overset{\infty}{v}_x^n = i \frac{ck_y\varphi}{B} \left( \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp}^2 + \gamma \cdot 4\pi\sigma/c^2} \right). \quad (18)$$

Here, we again assume that the oscillations are small-scale, and we use quasi-classical theory.

Equation (18) logically yields the estimate for the diffusion coefficient:

$$D = \langle v_x^2 \rangle \tau, \quad (19)$$

where  $\langle v_x^2 \rangle$  is the average characteristic velocity and  $\tau$  is the correlation time of the appropriate oscillations. Using eq. (18), we can write

$$D = D_0 \left[ \frac{1}{1 + \gamma \cdot 4\pi\sigma/(k_{\perp}^2 c^2)} \right]^2. \quad (20)$$

Here  $D_0 = (ck_{\parallel}\varphi/B)^2\tau = \xi^2/\tau$  is equal to the square of the characteristic displacement of a plasma element  $\xi$  in the wave field, divided by the correlation time.

If the plasma motion is turbulent,  $\gamma$  on the right-hand side of Eq. (20) can be replaced by  $Dk_{\perp}^2$ , where  $D$  is the unknown diffusion coefficient ( $(Dk_{\perp}^2)^{-1}$  characterizes the dispersal time for fluctuations with the scale  $k_{\perp}^{-1}$ ). As a result, we obtain the following equation:

$$D = D_0 \left( 1 + \frac{D}{D_s} \right)^2, \quad (21)$$

where  $D_s = c^2/(4\pi\sigma)$  is the pseudo-classical diffusion coefficient.

Thus, everything depends on the value of  $D_0$ .  $D_0 = \xi^2/\tau$  can be estimated for strong turbulence as  $(\gamma/k_{\perp}^2)_{\max}$  and this value was in fact determined in Section 3. Equation (21) then gives  $D = D_0$  for  $D \ll D_s$  and

$$D = D_0^{1/3} D_s^{2/3} \quad (22)$$

for  $D \gg D_s$ . Figure 1 also gives the real transport coefficient as a function of pressure.

At low pressures, the transport coefficient  $D$  is the same as  $D_0$ ; on approaching the region of ideal instability, it becomes increasingly lower than  $D_0$

and at its maximum reaches the values of  $D \approx (ac\theta\varepsilon\beta_J)^{1/3}[c^2/(4\pi\sigma)]^{2/3}$ . If the pressure is increased further, the transport coefficient  $D$  begins to decrease.

It should be noted that in the region, where the ideal criterion ceases to be satisfied and near this region the transport coefficient  $D$  increases as the mode number decreases,  $D \sim (1/nq)^{2/3}$ . In this case, the main contribution to the transport processes could be made by lower-order modes. It is, however, well known from analytical and numerical calculations for ideal ballooning modes that higher-order modes begin to develop preferentially. Thus, it may be considered that this result is also valid for non-potential dissipative ballooning modes and, in that case, the reasoning put forward above regarding the nature of the transport processes is valid.

This analysis has shown that in the so-called stable zone (for  $\sigma = \infty$ ) the transport processes due to dissipation remain finite whilst in the region of ideal transport instability they increase  $(\tau_s/\tau_\theta)^{1/3}$  times.

### References

1. Kadomtsev B.B., Pogutse O.P. // Zh. Ehksp. Teor. Fiz. 1973. V. 65. S. 575.
2. Kadomtsev B.B., Pogutse O.P. // Zh. Ehksp. Teor. Fiz. 1974. V. 66. S. 2075.
3. Kadomtsev B.B. // Fiz. Plazmy. 1975. V. 1. S. 710.
4. White R.B., Monticello D.A., Rosenbluth M.N. // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 39. P. 1618.
5. Waddell B.V., Monticello D.A., Rosenbluth M.N., White R.B. // Nucl. Fusion. 1976. V. 16. P. 528.
6. White R.B. et al. // In Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 6th Int. Conf. Berchtesgaden, 1976). IAEA, Vienna, 1977. V. 1. P. 569.
7. Kadomtsev B.B., Pogutse O.P. // In Problems of Plasma Theory. Moscow, Atomizdat, 1967. V. 5. P. 209.
8. Shafranov V.D., Yurchenko E.I. // Zh. Ehksp. Teor. Fiz. 1967. V. 53. S. 1157.
9. Mikhajlovskij A.B. // Nucl. Fusion. 1974. V. 14. P. 483.
10. Pogutse O.P., Yurchenko E.I. // Pis'ma Zh. Ehksp. Teor. Fiz. 1980. V. 31. S. 479.
11. Pogutse O.P., Yurchenko E.I. // In Controlled Fusion and Plasma Physics (Proc. 10th Europ. Conf. Moscow, 1981) B-21.
12. Pogutse O.P., Yurchenko E.I. // In Problems of Plasma Theory. Moscow, Energoizdat, 1982. V. 11. P. 56.

### Discussion

*F.W. Perkins:* With regard to the third part of our paper, the classical diffusion coefficient is introduced through use of the resistive form of Ohm's law. Have extensions to kinetic relations between  $j_{||}$  and  $E_{||}$  been considered?

*B.B. Kadomtsev:* No, we considered only the simpler resistive collisional mode of instability.

*B. Coppi:* The second stability region is of interest for high-temperature regimes, where the simple model you adopted is probably inadequate and

where your predictions are probably too pessimistic. Work we have carried out suggests that this region where there are no ideal MHD (e.g. shear-Alfvén) normal modes should be relatively quiet.

*M.N. Rosenbluth:* Professor Kadomtsev, would you not expect the magnetic field to become stochastic, enhancing the thermal conductivity far beyond your estimate and also inducing electron parallel viscosity, which plays a destabilizing role?

*B.B. Kadomtsev:* We considered the particle transport only. The stochasticization of magnetic fields may lead both to electron thermal conductivity and to parallel viscosity enhancement.

*R.J. Taylor:* Experiments show that the external forces involved in the plasma feed coupled with the rather free movement of the electrons determine the transport, which is dominated by convection under drive conditions. Did you consider the effects of the DC potentials, not just that of diffusion?

*B.B. Kadomtsev:* No, we did not consider these effects.

## ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ \*)

Для описания нелинейных низкочастотных колебаний в плазме токамака и других систем с сильным магнитным полем предлагается упрощенная система уравнений гидродинамического типа, справедливая при произвольном отношении поперечного масштаба неоднородности к ларморовскому радиусу ионов. Обсуждаются некоторые общие свойства этой системы и дается оценка аномальных коэффициентов электронной теплопроводности и диффузии плазмы.

Как показали эксперименты, в плазме токамака, удерживаемой и стабилизируемой сильным магнитным полем, всегда присутствует сложная активность коллективного характера. Она проявляется в наличии низкочастотных колебаний конечной амплитуды и в аномально высоких значениях диффузии и электронного теплопереноса. Для описания этих явлений удобно использовать упрощенные уравнения, в которых явно учитывается наличие очень сильного магнитного поля. В рамках магнитной гидродинамики такие уравнения были получены авторами [1] путем разложения МГД уравнений по обратным степеням продольного магнитного поля  $B_0$ . Эти уравнения оказались очень удобными для описания целого ряда коллективных явлений в плазме токамака: перезамыкание магнитного поля на моде  $m = 1$  [2], нелинейные тиринг-моды и неустойчивость срыва [3–8]. Однако для нахождения диффузии и теплопроводности, обусловленных мелкомасштабной турбулентностью, этих уравнений недостаточно и требуется их обобщение на масштабы, значительно меньше среднего ларморовского радиуса ионов  $\rho_i$ .

Чтобы получить уравнения нелинейной динамики в сильном магнитном поле, мы явно учтем, что продольная компонента магнитного поля  $B_0$  значительно больше поперечной  $B_\perp$ . Геометрию токамака мы смоделируем прямым цилиндром длины  $L = 2\pi R$ , где  $R$  — большой радиус тора. Ось  $z$  системы координат направим по  $B_0$ . Поле  $B_0$  остается практически постоянным при медленных течениях плазмы малого давления, поэтому условие  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  сводится к  $\operatorname{div} \mathbf{B}_\perp = 0$  и позволяет ввести функцию тока  $\psi$ :

$$\mathbf{B}_\perp = [\mathbf{e}_z \nabla \psi], \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ . В соответствии с (1) электрическое поле можно представить в виде

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi + \frac{\mathbf{e}_z}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2)$$

\*) Кадомцев В.Б., Погуце О.П. // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39. Вып. 5. С. 225–228.

Чтобы найти уравнение для  $\psi$ , воспользуемся дрейфовым кинетическим уравнением для электронов:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\parallel}(\mathbf{b}\nabla)f + \frac{c}{B_0}[\mathbf{e}_z\nabla\phi]\nabla f + \frac{e}{m}\left(\mathbf{b}\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B_0$ .

В токамаке функция распределения  $f$  близка к максвелловской  $f_0$ , поэтому можно положить  $f = f_0 + \tilde{f}$ , где  $\tilde{f}$  — мала, и поэтому относительно нее уравнение (3) можно линеаризовать. Уравнение для  $\psi$  можно получить умножением (3) на  $v_{\parallel}$  и интегрированием по  $v_{\parallel}$ .

Уравнение для  $\tilde{f}$  решается стандартным методом фурье-преобразования и дает

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = c\frac{\mathbf{B}}{B_0}\left(\nabla\phi - \frac{\nabla p_e}{en}\right) + \frac{c^2\hat{\eta}}{4\pi}\Delta_{\perp}\psi, \quad (4)$$

где  $\hat{\eta}$  представляет собой бесстолкновительное удельное сопротивление плазмы, которое в фурье-представлении находится из соотношения:

$$\eta_{\mathbf{k}\omega}^{-1} = \sigma_{\mathbf{k}\omega} = -i\frac{e^2n\omega}{T_e k_{\parallel}}\left\{1 + \frac{\omega}{k_{\parallel}v_e}Z\left(\frac{\omega}{k_{\parallel}v_e}\right)\right\}. \quad (5)$$

Здесь  $v_e = \sqrt{\frac{2T_e}{m}}$ ,  $m$  — масса электрона,  $Z$  — так называемая дисперсионная функция [8]. Так как в дальнейшем нам потребуется только действительная часть  $\hat{\eta}$ , то приближенно положим:

$$\hat{\eta} \approx \text{Re } \hat{\eta} \approx \begin{cases} \frac{mk_{\parallel}v_e}{e^2n} & \text{при } \omega^2 \leq k_{\parallel}^2v_e^2, \\ 0 & \text{при } \omega^2 > k_{\parallel}^2v_e^2, \end{cases} \quad (6)$$

где  $k_{\parallel}$  — характерное среднее волновое число для возмущений. В токамаке в силу тороидальности в  $k_{\parallel}$  появляется сателитная добавка  $\pm \frac{1}{qR}$  (\*), которая и будет вносить основной вклад в  $\text{Re } \hat{\eta}$ , если  $qR < \frac{v_e}{\omega}$ . Нас интересуют колебания, имеющие вид сильновытянутых вдоль магнитного поля возмущений. В таких колебаниях можно пренебречь продольным смещением ионов.

Интегрированием (3) по  $v_{\parallel}$  можно получить уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{c}{B_0}[\mathbf{e}_z\nabla\phi]\nabla n = \frac{c}{4\pi e}(\mathbf{b}\nabla)\Delta_{\perp}\psi. \quad (7)$$

Здесь мы заменили  $nv_{\parallel|e}$  на  $-j/e$ , где продольная компонента плотности тока равна согласно (1)

$$j = \frac{c}{4\pi}\Delta_{\perp}\psi. \quad (8)$$

Для ионов достаточно рассмотреть плоскопараллельные течения в потенциальном электрическом поле  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . Эксперимент показывает, что

\*) Амплитуда которой в  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = r/R$ ) раз меньше основной гармоники.

мелкомасштабные флуктуации плотности плазмы в токамаках практически изотропны, поэтому приближенно можно считать, что колебания ионов происходят на однородном фоне  $n_0 = \text{const}$ . Но в этом случае следующая из кинетического уравнения для ионов связь между флуктуациями плотности  $\tilde{n}$  и  $\phi$  хорошо известна:

$$\tilde{n} = -\frac{e}{T_i} n_0 \{1 - \exp(\rho_i^2 \Delta_{\perp}) I_0(-\rho_i^2 \Delta_{\perp})\} \phi, \quad (9)$$

где  $T_i$  — температура ионов,  $\rho_i^2 = \frac{T_i}{M\omega_{Bi}^2}$ ,  $\omega_{Bi} = \frac{eB_0}{Mc}$ ,  $M$  — масса иона,  $I_0$  — функция Бесселя от мнимого аргумента. Подставляя  $n = n_0 + \tilde{n}$  в (7) получим

$$Mn \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{c}{B_0} [\mathbf{e}_z \nabla \phi] \nabla \Gamma \right\} = \frac{\mathbf{B} \nabla}{4\pi} \Delta_{\perp} \psi, \quad (10)$$

где

$$\Gamma = -\rho_i^{-2} \{1 - \exp(\rho_i^2 \Delta_{\perp}) I_0(-\rho_i^2 \Delta_{\perp})\} \frac{c\phi}{B_0}. \quad (11)$$

Уравнения (4), (7) и (10) составляют основную систему уравнений динамики плазмы в сильном магнитном поле. Для температуры  $T_e$ , в зависимости от желаемой точности описания, можно либо положить приближенно  $\mathbf{b} \nabla T_e = 0$ , либо воспользоваться кинетическим уравнением (3).

Чтобы выяснить, что происходит с магнитными поверхностями удобным оказывается рассмотрение еще одного уравнения для поверхности  $\Phi$ , которая переносится вместе с плазмой:

$$\frac{d\Phi}{dt} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c}{B_0} [\mathbf{e}_z \nabla \phi] \nabla \Phi = 0. \quad (12)$$

Если выбрать в начальный момент  $\overline{\mathbf{B} \nabla \Phi} = 0$ , то в идеальном случае,  $\hat{\eta} = 0$ , силовые линии будут лежать на этой поверхности и в дальнейшем. Другими словами при  $\hat{\eta} = 0$  уравнение (12) совместно с (4) приводит к условию  $\frac{d}{dt} (\mathbf{B} \nabla) \Phi = 0$ . В случае же  $\hat{\eta} \neq 0$ :

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{B} \nabla) \Phi = \frac{c^2}{4\pi} [\nabla(\hat{\eta} \Delta_{\perp} \psi) \nabla \Phi]_z \quad (13)$$

для любой поверхности, удовлетворяющей уравнению (12). Теперь силовые линии, лежавшие при  $t = 0$  на поверхности  $\Phi = \text{const}$ , начинают со временем «протыкать» ее, что и приводит к переносу частиц и тепла поперек плазменного шнура.

Обратимся к уравнению непрерывности (7). Нетрудно убедиться, что при  $\hat{\eta} = 0$  оно сохраняет число частиц внутри поверхности  $\Phi = \text{const}$ , т. е. перенос отсутствует.

Точно также можно показать, что в силу  $\mathbf{B} \nabla T_e = 0$  отсутствует и поток тепла. Таким образом, конвективный перенос тепла и частиц в рассматриваемых колебаниях может происходить только за счет конечной проводимости.

Используя уравнение (12) можно получить выражение для потока частиц и тепла. Однако и без вычислений видно, что естественным масштабом для коэффициентов температуропроводности [7] и диффузии служит величина коэффициента «магнитной» диффузии  $c^2 \hat{\eta} / 4\pi$ , характеризую-

щим скорость просачивания силовых линий через плазму согласно уравнению (13):

$$D \sim \chi_e \sim \frac{c^2 \hat{\eta}}{4\pi} \varepsilon \approx \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \frac{v_e}{qR} \varepsilon, \quad (14)$$

$\varepsilon$  появилось здесь за счет баллонного эффекта, отмеченного ранее.

Именно такой масштаб имеют эти величины в токамаках при омическом нагреве и небольших давлениях плазмы, когда нет оснований ожидать очень высокого уровня колебаний.

#### Список литературы

1. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 575.
2. Кадомцев Б.Б. // Физика плазмы. 1975. Т. 1. С. 710.
3. Днестровский Ю.Н., Лысенко С.Е., Смит Р. // Физика плазмы. 1977. Т. 3. С. 18.
4. White R.B., Monticello D.A., Rosenbluth M.N., Straus H.R., Kadomtsev B.B. // In: 5-th Intern. Conf. on Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res. (Tokyo, 1974). Vienna IAEA, 1975. V. 1. P. 495.
5. Rosenbluth M.N., Monticello D.A., Straus H.R., White R.B. // Phys. Fluids. 1976. V. 19. P. 1987.
6. Wadell B.V., Rosenbluth M.N., Monticello D.A., White R.B. // Nucl. Fusion. 1976. V. 16. P. 528.
7. Парачил В.В., Погуце О.П. // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32. С. 480.
8. Шафранов В.Д. Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1973. Т. 3.

## АНОМАЛЬНАЯ ВЯЗКОСТЬ И ВРАЩЕНИЕ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ \*)

Получено выражение для коэффициента вязкости, связанного с микротурбулентностью плазмы. Соответствующая сила торможения пропорциональна энергетическому времени жизни и может объяснить anomalно быстрое затухание вращения плазмы в токамаке.

При наклонной инжекции частиц в плазму токамака наблюдается раскручивание плазменного шнура в тороидальном направлении [1, 2]. При выключении инжектора скорость вращения быстро затухает. Время затухания не может быть объяснено неоклассической теорией, и наиболее вероятным в настоящее время считается механизм торможения вращения при трении о нейтральный газ. Однако и в этом случае теоретическое время торможения в несколько раз превышает экспериментальное. Кроме того, таким механизмом торможения трудно объяснить экспериментальный факт, что время торможения порядка энергетического времени жизни плазмы.

В настоящей работе мы хотим предложить возможный механизм торможения, связанный с аномальной вязкостью плазмы в токамаке. Эта вязкость естественным образом следует из системы уравнений, недавно предложенной в работе [3] для самосогласованного описания процессов переноса в токамаке. Полученное выражение для времени торможения оказывается пропорциональным энергетическому времени.

Система уравнений [3] состоит из уравнения для обобщенного вихря

$$\rho_0 \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\rho_0 c}{B_0} [\mathbf{e}_z, \nabla \varphi] \cdot \nabla \Gamma = \frac{(\mathbf{B}, \nabla)}{4\pi} \Delta_{\perp} \psi, \quad (1)$$

где  $\Gamma = \frac{c}{B_0} \Delta_{\perp} \varphi = \text{rot}_z \mathbf{v}_{\perp}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + [\mathbf{e}_z, \nabla \psi]$ ,  $\Delta_{\perp} \psi = \frac{4\pi}{c} j_{\parallel}$ ,  $\rho_0$  — плотность плазмы, уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{c}{B_0} [\mathbf{e}_z, \nabla \varphi] \cdot \nabla n = \frac{c}{4\pi e} \frac{(\mathbf{B}, \nabla)}{B_0} \Delta_{\perp} \psi \quad (2)$$

и закона Ома

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c \frac{\mathbf{B}}{B_0} \cdot \left( \nabla \varphi - \frac{\nabla p_e}{en} \right) + \frac{c^2 \hat{\eta}}{4\pi} \Delta_{\perp} \psi, \quad (3)$$

где  $\hat{\eta} = \hat{\sigma}^{-1}$  — оператор удельного сопротивления плазмы,  $\hat{\sigma}$  — оператор проводимости [3]. К системе (1)–(3) можно добавить еще уравнение для  $T_e$ , но оно нам не понадобится. Несмотря на то, что в эти уравнения входит лишь  $\mathbf{v}_{\perp}$ , их можно использовать для описания тороидального вращения. Действительно, полоидальное вращение тормозится за время

\*) Кадомцев Б.Б., Морозов Д.Х., Погуце О.П. // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 40. Вып. 2. С. 80–82.



$\tau_p \sim \frac{\langle |\nabla\psi|^2 \rangle \rho_0}{\mu \langle (\mathbf{B} \cdot \nabla B / B_0)^2 \rangle}$  значительно меньше времени торможения тороидального вращения  $\tau_\phi$  [4] ( $\mu$  — неоклассический коэффициент вязкости, угловые скобки означают усреднение по магнитной поверхности). Для времени  $t \gg \tau_p$  полоидальные компоненты  $\mathbf{v}_\parallel$  и  $\mathbf{v}_\perp$  с точностью до членов, пропорциональных  $\nabla T$ , скомпенсированы, и уравнения (1)–(3) могут быть использованы для описания тороидального вращения.

В [3] показано, что за счет члена  $(\mathbf{B}, \nabla)j_\parallel$  в уравнении (2) при учете конечной проводимости возникает диффузия плазмы поперек магнитных поверхностей с коэффициентом порядка  $D \sim \frac{c^2 v_e}{\omega_{pe}^2 q R} \varepsilon^\alpha$  ( $1 \leq \alpha \leq 2$ ). Заметим, что в уравнении для вихря (1) в правой части стоит точно такой же член  $(\mathbf{B}, \nabla)\Delta_\perp \psi$ . В работе [3] рассматривается случай, когда отсутствовала средняя макроскопическая скорость вращения. При ее наличии в правой части (1) и (2) появляется поток завихренности, пропорциональный градиенту завихренности. Покажем это для простейшего случая плазмы с однородной плотностью и температурой (при учете градиентов  $n$  и  $T$  в потоках просто аддитивно добавятся члены, пропорциональные  $\nabla n$  и  $\nabla T$ , см. [3]). Введем, как и в работе [3], тороидальные поверхности  $\Phi = \text{const}$ , движущиеся вместе с плазмой

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c}{B_0} [\mathbf{e}_z, \nabla \varphi] \cdot \nabla \Phi = 0, \quad (4)$$

и расположим на них в начальный момент силовые линии:  $\mathbf{B} \cdot \nabla \Phi = 0$  ( $t = 0$ ). Тогда, как показано в [3], в последующие моменты времени мы будем иметь соотношение

$$\frac{d}{dt} (B, \nabla \Phi) = [\nabla \hat{\eta} \Delta_\perp \psi, \nabla \Phi]_z, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{B_0} [\mathbf{e}_z, \nabla \varphi] \cdot \nabla. \quad (5)$$

Теперь вычислим изменение завихренности внутри объема, ограниченного поверхностью  $\Phi = \text{const}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Phi=\text{const}} \Gamma dV = \int \frac{\partial \Gamma}{\partial t} dV + \int \Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int (\mathbf{B}, \nabla) \Delta_\perp \psi \frac{dV}{4\pi \rho_0} = \frac{1}{4\pi \rho_0} \int \Delta_\perp \psi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (6)$$

При дифференцировании в (6) мы учли, что сама поверхность  $\Phi = \text{const}$  смещается во времени согласно (4). В последнем интеграле (6) интегрирование ведется по поверхности  $\Phi = \text{const}$ . Учитывая, что  $d\mathbf{s} = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} ds$ , и соотношение (5), мы можем записать (6) как

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \Gamma dV = - \int \Pi ds, \quad (7)$$

где  $\Pi$  — поток завихренности из объема, ограниченного поверхностью  $\Phi = \text{const}$

$$\Pi = \frac{1}{4\pi \rho_0} \int_{-\infty}^t \Delta_\perp \psi(t') \frac{[\nabla(\hat{\eta} \Delta_\perp \psi(t')), \nabla \varphi(t')]_z}{|\nabla \Phi|} dt'. \quad (8)$$

Для малых флуктуаций и почти цилиндрических усредненных поверхностей

этот поток имеет только радиальную компоненту и равен

$$\Pi = \frac{1}{4\pi\rho_0} \int_{-\infty}^t j_{\parallel}(t) \frac{\partial}{r \partial \theta} \tilde{E}_{\parallel}(t') dt'. \quad (9)$$

Мы переписали выражение для потока  $\Pi$  через более наглядные величины: ток  $\tilde{j}_{\parallel} = (c/4\pi) \Delta_{\perp} \psi$  и электрическое поле  $\tilde{E}_{\parallel} = \tilde{\eta} \tilde{j}_{\parallel}$ . При вычислении (9) можно воспользоваться квазилинейным приближением и выразить  $\tilde{j}_{\parallel} \sim \tilde{E}_{\parallel}$  через  $\tilde{\varphi}$ , а затем через смещение плазмы  $\xi = [ck_y/(B\omega)]\tilde{\varphi}$ . В результате получим

$$\Pi = \hat{\nu} \frac{d}{dx} \Delta_{\perp} \varphi, \quad (10)$$

где  $\hat{\nu}$  — кинематическая турбулентная вязкость записывается через смещение  $\xi$  в виде

$$\hat{\nu} = \frac{c^2 \omega_{Bi}^2}{8\pi \omega_{pi}^2} \sum_{k, \omega} \frac{k_{\parallel}^2 k_{\perp}^4 \eta}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial k_x^2} |\xi|^2 - \left| \frac{\partial \xi}{\partial k_x} \right|^2 - k_{\perp}^{-4} \left| \frac{\partial}{\partial k_x} k_{\perp}^2 \xi \right|^2 \right), \quad k_x = \frac{\nabla \langle \Phi \rangle}{|\nabla \langle \Phi \rangle|}. \quad (11)$$

Сравнивая ее с коэффициентом электронной температуропроводности, находим

$$\hat{\nu} = \frac{m}{M} \chi_e. \quad (12)$$

В результате уравнение для вихря приобретает вид

$$\rho_0 \frac{d\Gamma}{dt} = (\mathbf{B}, \nabla) j + \nabla \hat{\mu} \nabla \Gamma, \quad (13)$$

где  $\hat{\mu} = \rho_0 \hat{\nu}$ . Последний член в (13) описывает диффузию завихренности за счет мелкомасштабной ( $k \sim (\omega_{pe}/c)$ ) турбулентности. Соответствующее время торможения вращения  $\tau_{\phi}$  связано с временем жизни плазмы  $\tau_{Ee}$  соотношением

$$\tau_{\phi} = \tau_{Ee} \beta \frac{M}{m}. \quad (14)$$

Для установки PDX оценка дает  $\tau_{\phi}^{\text{teor}} \approx 100$  мс, что совпадает с экспериментом ( $\tau_{\phi}^{\text{exp}} \approx 80 \div 100$  мс [2]). Для установки PLT  $\tau_{\phi}^{\text{teor}} \approx 80$  мс,  $\tau_{\phi}^{\text{exp}} \approx 20$  мс [1]. Учитывая оценочный характер формулы (14), и здесь наблюдается удовлетворительное согласие.

Интересной особенностью формулы (14) является сильная зависимость от плотности ( $\sim n^2$ ). На самом деле время торможения зависит от самосогласованных профилей плотности, скорости и температуры, которые могут нивелировать зависимость  $\sim n^2$ .

Авторы благодарны В.С. Муховатову за обсуждения.

### Список литературы

1. Suckewer S., Eubank H.P., Goldston R.J., McEnerney J., Sauthoff N.R. // Nucl. Fusion. 1981. V. 21. P. 1301.
2. Brau K., Bitter M., Goldston R.J., Manos D., Mcguire K., Suckewer S. // Nucl. Fusion. 1983. V. 23. P. 1643.
3. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. // Письма в ЖЭТФ. 1984. V. 39. С. 225.
4. Hirsman S.P. // Nucl. Fusion. 1978. V. 18. P. 917.

## SELF-CONSISTENT TRANSPORT THEORY IN TOKAMAK PLASMAS \*)

A new set of simplified equations is proposed for the description of microturbulence and enhanced transport in tokamak plasmas. These equations are similar to the reduced MHD equations in that the strong-longitudinal-magnetic-field approximation is used. The equations are obtained by reducing the collisionless drift kinetic equation for electrons and the kinetic equation for ions, together with the charge neutrality condition. They are suited to describe non-linear plasma motion on a scale much larger than the electron cyclotron radius and on arbitrary scale as compared with the ion cyclotron radius.

The consistency of these equations implies that they simultaneously describe the destruction of magnetic-field surfaces and enhanced thermal and particle transport.

### 1. Introduction

It is well known that there exists a complex activity of a collective nature in tokamak plasmas confined and stabilized by strong magnetic fields. This activity becomes manifest in MHD-oscillations of finite amplitude and in anomalously high diffusion and electron heat conduction. The view is widely held, at present, that small scale oscillations, together with the «island» structure of the magnetic surfaces due to large-scale MHD perturbations, are responsible for anomalous heat and particle transport.

So far, no consistent theory has existed of these processes, in which the magnetic-surface perturbations would be sufficiently correctly matched with the plasma oscillations and the motion of electrons and ions.

It seems to be convenient to use the simplified equations, in which a strong, longitudinal, magnetic field is taken into account from the very beginning, to see how the motion of particles and the magnetic field lines are correlated.

We have shown previously [1, 2] that large-scale plasma flows have a «quasi-2D» nature in conditions when the external magnetic field is much stronger than all fields induced in the plasma by currents passing through it. In this case, the MHD equations are substantially simplified and can be reduced to two scalar equations, one for a function of the current,  $\chi$ , and another one for the magnetic flux,  $\Psi$  (whose precise definition will be given below).

Physically, this corresponds to a neglect of fast magnetosonic oscillations and, in many cases, insignificant sonic oscillations. (Moreover, sets of

---

\*) *Kadomtsev B.B., Pogutse O.P.* // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. International Atomic Energy Agency. Vienna, 1985. V. 2. P. 69–79.

MHD-equations, set up in the spirit of Refs [1, 2], which include sonic oscillations, have been derived recently [3, 4]).

The set of equations [1] was widely used for simulating MHD-processes in a plasma. The non-linear stages of kink and tearing instabilities [5–7] were studied by this set of equations, a theory of mode reconnection was set up for the  $m = 1$  mode, and thus the mechanism producing sawtooth oscillations in a tokamak was explained. Nowadays, these equations are used to simulate the 3D-non-linear stage in the development of MHD-instabilities [9]; they are basic in the theory of major disruptions in tokamaks.

In spite of all advantages, the region of application of these equations is limited in that they are only valid for perturbations with wavelengths longer than the ion Larmor radius. As will be shown below, for a strong magnetic field, hydrodynamic equations, i. e. equations which depend on  $\mathbf{n}$  and on  $t$  only and are true for arbitrary plasma inhomogeneities, including short-scale ones, can be written down. They are a natural generalization of the equation from Ref [1].

These equations will be used to consider the phenomenon of field-line reconnection within a collisionless skin layer,  $c/\omega_p$  ( $\omega_p$  is the plasma electron frequency) and to explain the short-scale diffusion and heat conduction processes in a plasma.

## 2. Plasma Equations in a Strong Magnetic Field in Two-Fluid Hydrodynamics

We consider plasma motion within the framework of magnetic two-fluid hydrodynamics and, for simplicity, assume the ion temperature to be equal to zero.

The toroidal plasma column with minor radius  $r$  and major radius  $R$  is simulated by a straight cylinder,  $L = 2\pi R$  long, with identical ends. The  $z$ -axis is directed along the cylinder and the longitudinal field,  $B_0$ , is considerably greater than the transverse components of field  $B_\perp$ . Hence, one can expand the MHD equations in terms of inverse powers of  $B_0$ .

In this approximation the magnetic field can be represented as  $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z + [\mathbf{e}_z \times \nabla\Psi]$ ; where  $\Psi$  is the transverse magnetic flux function, and we may assume that the plasma has a plan-parallel flow within each layer [1]. Let us introduce the current function  $\chi$ , and the plasma curl density,  $\Gamma$ :

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_\perp = [\mathbf{e}_z \times \nabla\chi], \quad \Gamma = \text{rot}_z \mathbf{v} = \Delta_\perp \chi. \quad (2.1)$$

Here  $\mathbf{v}$  is the ion velocity.

$$Mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} = en\mathbf{E} + \frac{e}{c}n[\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (2.2)$$

$$\nabla P_e = -en\mathbf{E} - \frac{e}{c}n[\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}]. \quad (2.3)$$

Here,  $\mathbf{v}_e$  is the electron velocity, and  $P_e$  is the electron pressure. A small electron inertia term is neglected in Eq. (2.3).

Determining the transverse current component,  $j_\perp$ , from the sum of Eqs (2.2) and (2.3), and substituting it into the equation of quasi-neutrality,

$\text{div } \mathbf{j} = 0$ , we derive the equation for  $\Gamma$ :

$$Mn \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{(\mathbf{B}\nabla)}{c} j. \quad (2.4)$$

Here,  $M$  is the ion mass,  $n$  the density,  $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)$ ,  $j \equiv j_{\parallel} = c/(4\pi\Delta\Psi)$  the parallel current component, and the role of the current function,  $\chi$ , is played by the quantity  $(c/B)\varphi$ . The electric field is expressed in the form:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi + \frac{\mathbf{e}_z}{c} \frac{\partial\Psi}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Then, from Eq. (2.3), we obtain:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{c\mathbf{B}}{B_0} \cdot \left( \nabla\varphi - \frac{1}{en} \nabla P_e \right) = 0. \quad (2.6)$$

We may assume that  $(\mathbf{B}\cdot\nabla)T_e = 0$  for electrons, because of high thermal conduction along the magnetic field. Therefore,

$$\frac{(\mathbf{B}\cdot\nabla)}{n} P_e = (\mathbf{B}\cdot\nabla)(T_e \ln n).$$

Introducing

$$\lambda = \frac{c}{B_0} \left( \varphi - \frac{T_e}{e} \ln n \right),$$

we rewrite Eq. (2.6) in the form:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + [\mathbf{e}_z \times \nabla\lambda] \cdot \nabla\Psi = B_0 \frac{\partial\lambda}{\partial z}. \quad (2.7)$$

If we interpret the quantity  $[\mathbf{e}_z \times \nabla\lambda]$  as the magnetic surface transport velocity and remember that the operators  $d/dt$  and  $(\mathbf{B}\cdot\nabla)$  commute, the equation for the longitudinal magnetic flux,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + [\mathbf{e}_z \times \nabla\lambda] \nabla\Phi = 0 \quad (2.8)$$

will describe the deformation of the magnetic surfaces without violation of their topology. Note that the addition to  $\lambda$  of any function with  $C(\Phi)$ , such that  $(\mathbf{B}\cdot\nabla)C = 0$ , does not change the forms of Eqs (2.7) and (2.8).

We now consider the problem of possible convective particle and heat transport in the approximation under study. For this purpose, we invoke the continuity equation:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}_e) = 0. \quad (2.9)$$

Let us represent the electron velocity as  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{\perp e} + \mathbf{v}_{\parallel e}$ . The transverse component can be expressed from Eq. (2.3), the longitudinal component can be written in terms of the longitudinal current component,

$$\mathbf{v}_{\parallel e} = -\frac{[j_{\parallel}/(en)]}{B/B_0}.$$

Equation (2.9) can be rewritten in the form:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + [\mathbf{e}_z \times \nabla\chi] \nabla n = \frac{c}{4\pi e} \frac{(\mathbf{B}\cdot\nabla)}{B_0} \Delta_{\perp} \Psi. \quad (2.10)$$

Evidently, the last term in Eq. (2.10) does not describe particle transport across the magnetic surface, and the transverse component of the particle velocity in (2.10)  $[\mathbf{e}_z, \nabla\chi]$  differs from the field line transport velocity,  $[\mathbf{e}_z, \nabla\lambda]$  by an expression proportional to  $[\mathbf{e}_z, \nabla T_e]$ . This difference in the velocities is directed along the surface  $\Phi = \text{const}$ , as  $T_e = T_e(\Phi)$  is constant on the magnetic surface.

Thus, within the framework of two-fluid hydrodynamics, there is no plasma and heat transport across the magnetic surfaces.

It is easy to show that, when the plasma column touches the ideally conducting case such that the normal velocity and field components are equal to zero, Eqs (2.4), (2.7) and (2.10) possess the following energy integral:

$$\mathcal{E} = \int \left\{ Mn \frac{(\nabla\chi)^2}{2} + \frac{(\nabla\Psi)^2}{8\pi} + T_e n (\ln n - 1) \right\} dV. \quad (2.11)$$

### 3. Equations of Plasma Dynamics in a Strong Magnetic Field

As we have seen above, the problem of describing plasma motion in a strong magnetic field is divided into two parts: the description of plane-parallel ion flows and that of magnetic-surface behaviour. For large-scale flows, the motion occurs under conservation of the topology of the nested magnetic surfaces; it is not accompanied by particle or heat transport across the surfaces. One should use the smallest transverse scale in order to make dissipative effects play a role and to find these fluxes.

Assuming finite electric conductivity along the magnetic field, we obtain

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{c\mathbf{B}}{B_0} \left( \nabla\varphi - \frac{\nabla P_e}{en} \right) = \frac{c^2\eta}{4\pi} \Delta_{\perp}\Psi. \quad (3.1)$$

Here  $\eta = 1/\sigma$  is the resistivity, and  $\sigma$  — the electric conductivity of the plasma.

Strictly speaking, Eq. (3.1) is only true for perturbations that are so widely stretched along the magnetic field that the perturbation wavelength is much longer than the mean free path of the electrons. This is not the case in a high-temperature plasma, where the condition of non-collisionality is more likely to be satisfied. Therefore, using a drift kinetic equation should be more adequate for electrons:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\parallel}(\mathbf{B} \cdot \nabla)f + \frac{c}{B_0} [\mathbf{e}_z \times \nabla\varphi] \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \left( \mathbf{B} \cdot \nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = 0. \quad (3.2)$$

Here,  $f$  is the electron distribution function with respect to the longitudinal velocity,  $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B_0$ .

Integrating (3.2) with respect to the longitudinal velocity,  $v_{\parallel}$ , we obtain the familiar continuity equation (2.10), where  $\chi = (c/B_0)\varphi$  (the contribution of the ions to the longitudinal current vanishes in the approximation that we have adopted).

The Ohm's law also follows from the drift kinetic equation:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + [\mathbf{e}_z \times \nabla\lambda] \cdot \nabla\Psi - B_0 \frac{\partial\lambda}{\partial z} = \frac{c^2\hat{\eta}}{4\pi} \Delta_{\perp}\Psi, \quad (3.3)$$

where  $\hat{\eta}$  is the collisionless plasma resistivity, which is found, in its Fourier

representation, from the relationship:

$$\hat{\eta}_{\mathbf{k},\omega}^{-1} = \sigma_{\mathbf{k},\omega} = -i \frac{e^2 \omega n}{T_e k_{\parallel}} \left\{ 1 + \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_e} Z \left( \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_e} \right) \right\}. \quad (3.4)$$

Here  $v_e = \sqrt{2T_e/m}$ , where  $m$  is the electron mass, and  $Z$  is the dispersion function.

From physical considerations, it is evident that only the real (in the Fourier representation) part of the operator  $\hat{\eta}$  makes a contribution to the transport processes.

Remembering the properties of the function  $Z(x)$ , it is not difficult to show that in the range of high phase velocities,  $\omega \gg k_{\parallel} v_e$  the right-hand side of Eq. (3.4) takes the form  $(c^2/\omega_{pe}^2) \Delta_{\perp} \partial \Psi / \partial t$  where  $\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$ , which corresponds to a reversible displacement of electrons along the field lines. For  $\omega \lesssim k_{\parallel} v_e$ , the real part of  $\hat{\eta}_{\mathbf{k},\omega}$  is approximately equal to:

$$\text{Re } \eta_{\mathbf{k},\omega} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{m}{e^2 n} |k_{\parallel}| v_e \exp \left( -\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_e^2} \right) \approx \frac{m |k_{\parallel}| v_e}{e^2 n_0}. \quad (3.5)$$

It is sufficient to consider the planeparallel displacement of ions in the potential electric field,  $\mathbf{E}_{\perp} = -\nabla_{\perp} \varphi$ . The experiment shows that low-scale plasma density fluctuations in tokamaks are practically isotropic. Therefore, we may more or less safely assure that the ion oscillations occur before a uniform background,  $n_0 = \text{const}$ . In this case, however, the relationship between the density oscillations,  $\tilde{n}$ , and the potential  $\varphi$  is well known. It can be written symbolically:

$$\tilde{n} = -\frac{e}{T_i} n_0 \left\{ 1 - e^{\rho_i^2 \Delta_{\perp}} I_0(\rho_i^2 \Delta_{\perp}) \right\} \varphi. \quad (3.6)$$

Here,  $I_0$  is a Bessel function of imaginary argument,  $\rho_i^2 = T_i / (M \omega_B^2)$  is the square of the ion Larmor radius, and  $\omega_B = eB / (mc)$ .

We now substitute  $n = n_0 + \tilde{n}$  into the continuity equation (2.10). Then, assuming  $n_0 = \text{const}$  (for ions), we obtain an equation for the potential  $\varphi$  which is similar to (2.4) but has another  $\Gamma$ :

$$\Gamma = -\rho_i^{-2} \left\{ 1 - \exp(\rho^2 \Delta_{\perp}) I_0(-\rho^2 \Delta_{\perp}) \right\} \frac{c\varphi}{B_0}. \quad (3.7)$$

This equation generalizes the expression for a curl of the plasma velocity at the arbitrary ion Larmor radius. For the large-scale motions, when  $\rho_i^2 \Delta_{\perp} \rightarrow 0$ , we obtain the previous expression for  $\Gamma$ , i. e.  $\Gamma = (c/B_0) \Delta_{\perp} \varphi$ .

Equations (2.10), (3.3) and (2.4), together with (3.7), constitute the appropriate set of equations describing slow plasma oscillations in a strong magnetic field for an arbitrary transverse scale of oscillations that is, however, greater than the electron Larmor radius.

The law of energy conservation can be expressed as follows:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dV \left\{ M n \frac{(\nabla \chi)^2}{2} + \frac{(\nabla \Psi)^2}{8\pi} + \frac{M c_s^2 n^2}{2n_0} \right\} = \int dV \hat{\eta} j^2, \quad (3.8)$$

where

$$\chi = \left\{ \frac{1 - \exp(\rho_i^2 \Delta_{\perp}) I_0(-\rho_i^2 \Delta_{\perp})}{\rho_i^2 \Delta_{\perp}} \right\}^{1/2} \frac{c\varphi}{B_0}$$

and  $c_s^2 = T_e / M$ .

If we are interested in the processes of heat conduction through the electron channel, we should add an equation for  $T_e$ . This can easily be done, by using the kinetic equation (3.2):

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} nT_e + \frac{c}{B_0} [\mathbf{e}_z \times \nabla\varphi] \nabla(nT_e) \right) = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)}{B_0} q_{\parallel} + E_{\parallel} j_{\parallel}. \quad (3.9)$$

Here,  $q_{\parallel} = - \int \frac{mv_{\parallel}^2}{2} v_{\parallel} f dv_{\parallel}$ .

The longitudinal energy flux,  $q_{\parallel}$ , in the linear approximation may be expressed in terms of  $E_{\parallel}$  by the relationship  $q_{\parallel} = \hat{\mu} E_{\parallel}$ , which is similar to  $j_{\parallel} = \sigma E_{\parallel}$ . The operator  $\hat{\mu}$  is easy to calculate by using the kinetic equation (3.9).

#### 4. Anomalous Diffusion and Heat Conduction in a Strong Magnetic Field

We introduce a function  $\Phi$ , which satisfies Eq. (2.8) and assume that it coincides with the function of magnetic flux,  $\mathbf{B} \cdot \nabla\Phi = 0$  ( $t = 0$ ), at the initial instant of time. Calculating the commutator

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{B} \cdot \nabla\Phi) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{d\Phi}{dt}$$

we find (with due account for (2.8)):

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{B} \cdot \nabla)\Phi = \left\{ \nabla \frac{c^2 \hat{\eta}}{4\pi} \Delta_{\perp} \Psi \times \nabla\Phi \right\}_z, \quad (4.1)$$

i. e.

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{B} \cdot \nabla)\Phi \neq 0$$

and, consequently, the magnetic field lines start to «pierce» the  $\Phi = \text{const}$  surface.

For low dissipation ( $\hat{\eta} \rightarrow 0$ ), the surface  $\Phi = \text{const}$  can be used as an average magnetic surface, which becomes a precise magnetic surface when  $\hat{\eta} = 0$ .

We now calculate the density change inside the surface  $\Phi = \text{const}$  (moving with time):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Phi} n dV = \int_{\Phi} \frac{\partial n}{\partial t} dV + \oint_{\Phi} n \mathbf{V}_{\Phi} d\mathbf{S}, \quad (4.2)$$

where  $\mathbf{V}_{\Phi} = [\mathbf{e}_z \times \nabla\lambda]$ .

Using (2.10), we obtain:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Phi} n dV \equiv - \oint_{\Phi} \Gamma_n dS = \frac{1}{e} \oint_{\Phi} j \frac{\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{B_0} = \frac{1}{eB_0} \oint_{\Phi} j \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\Phi}{|\nabla\Phi|} dS, \quad (4.3)$$

where  $\Gamma_n$  is the particle flux.

The density change within  $\Phi = \text{const}$  is entirely due to the outflow of electrons along the field lines intersecting (according to (4.1)) the  $\Phi = \text{const}$  surface.



The change in thermal energy per unit volume can be calculated similarly. From (3.1), we easily obtain

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Phi} n T_e dV = - \oint_{\Phi} Q_{||e} dS, \quad (4.4)$$

where

$$Q_{||e} = -\frac{1}{B_0} q_{||} \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\Phi}{|\nabla\Phi|}. \quad (4.5)$$

We first consider the calculation of the diffusion coefficient (assuming  $T_e = \text{const}$ ). The combination  $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\Phi$  can be found from Eq. (4.1):

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\Phi = \int_{-\infty}^t [\nabla c \hat{\eta} j \times \nabla\Phi]_z dt', \quad (4.6)$$

where the integration is carried out along the trajectory  $d\mathbf{r}/dt = [\mathbf{e}_z \times \nabla\lambda]$ . Substituting expression (4.6) into (4.3), we obtain:

$$\oint_{\Phi} j \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\Phi}{|\nabla\Phi|} dS = c \int_{\Phi} d\mathbf{S} \int_{-\infty}^t dt' [\mathbf{e}_z j(t) \times \nabla \hat{\eta} j(t')]. \quad (4.7)$$

We can now use a quasi-linear approximation to calculate (4.7). We assume that the currents  $j'_{||}$  are perturbed and the surface  $d\mathbf{S}$  coincides with the initial cylindrical surface. Then the particle flux has a radial component only:

$$\Gamma_n = \frac{c}{eB_0} \int_{-\infty}^t j'(t) \frac{\partial}{r \partial \vartheta} \hat{\eta} j(t') dt' = \frac{c}{eB_0} \int_{-\infty}^t j \frac{\partial}{r \partial \vartheta} E'_{||} dt'. \quad (4.8)$$

It is now convenient to introduce a local rectangular system of co-ordinates  $w$  the  $x$ -axis along  $r$ , the  $y$ -axis along  $\vartheta$  and the  $z$ -axis remaining the same. Then,  $(1/r) \partial/\partial\vartheta = ik_y$ .

Expression (4.8) can be written in the Fourier representation as:

$$\Gamma_n = \frac{c^3}{eB_0(4\pi)^2} \sum_{k, \omega} \frac{k_y}{\omega} k_{\perp}^4 |\Psi'_{\mathbf{k}, \omega}|^2 \eta_{\mathbf{k}, \omega}. \quad (4.9)$$

Using the Eqs (2.10) and (3.3) in linearized form, we represent  $|\psi'_{\mathbf{k}, \omega}|$  in terms of the displacement  $\xi = -(ck_y/\omega B_0)\varphi$ :

$$|\Psi'_{\mathbf{k}, \omega}|^2 = \frac{B_0 k_{||}^2}{k_y^2} \frac{(\omega - \omega_*)^2 |\xi_{\mathbf{k}, \omega}|^2}{\left(\omega - \omega_* - \frac{k_{||}^2 T_e c^2 k_{\perp}^2}{4\pi e^2 n_0 \omega}\right)^2 + \left(\frac{c^2 k_{\perp}^2 \eta_{\mathbf{k}, \omega}}{4\pi}\right)^2}, \quad (4.10)$$

where

$$\omega_* = -\frac{cT_e k_y}{eB_0} \frac{d \ln n_0}{dr}.$$

Substituting (4.10) into (4.9), we obtain for the particle flux:

$$\Gamma_n = -D \frac{dn_0}{dr}, \quad (4.11)$$

where the diffusion coefficient,  $D$ , is expressed as

$$D = \frac{c^4 T_e}{(4\pi)^2 e^2 n_0} \sum_{\mathbf{k}, \omega} \frac{\omega}{\omega_*} \eta_{\mathbf{k}, \omega} \frac{k_{\perp}^4 k_{\parallel}^2 |\xi_{\mathbf{k}, \omega}|^2 \left(1 - \frac{\omega_*}{\omega}\right)^2}{\left(\omega - \omega_* - \frac{k_{\parallel}^2 T_e c^2 k_{\perp}^2}{4\pi e^2 n_0 \omega}\right)^2 + \left(\frac{c^2 k_{\perp}^2 \eta_{\mathbf{k}, \omega}}{4\pi}\right)^2}. \quad (4.12)$$

The ratio  $\omega/\omega_*$  is positive for a typical microturbulence which propagates in the direction of the electron diamagnetic drift.

The advantage of introducing  $\xi$  is that we have an estimate for  $\xi$ . In any case,  $\xi \leq 1/k_{\perp}$ , equality is reached for strong turbulence. This allows to the upper limit of the diffusion coefficient to be estimated.

Substituting (3.5) into (4.12) and assuming  $\xi$  to be equal to  $1/k_{\perp}$ , we say that  $D \lesssim D_0$ , where

$$D_0 \approx c_1 \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} |k_{\parallel}| v_e = c_1 \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \frac{v_e}{qR}. \quad (4.13)$$

This expression provides an assessment of the dimensionality of the problem; the constant  $c_1$  depends on the shape of the spectrum.

We have assumed  $|k_{\parallel}| \sim 1/(qR)$  in estimating expression (4.13). This quantity may be considerably smaller for a cylinder under real conditions (for strong localization of the perturbations near the singularities  $k_{\parallel}(r_s) = 0$ ).  $k_{\parallel}$  has an additional satellite term  $\pm 1/(qR)$ , whose amplitude is  $\varepsilon = r/R$ -times less than the fundamental harmonic, in a tokamak because of its toroidicity. It is exactly this term that will make the main contribution to  $\text{Re} \hat{\eta}$  if  $qR < v_e/\omega$ . Therefore, the more correct estimation for toroidal systems is as follows:

$$\chi \sim D \sim \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \frac{v_e}{qR} \varepsilon^{\alpha} \quad (1 \leq \alpha \leq 2). \quad (4.14)$$

If the electron temperature gradient  $\frac{dT_{e0}}{dr} \neq 0$  were taken into account, the expressions for the particle and heat fluxes would be as follows:

$$\Gamma_n = -D \left( \frac{dn_0}{dr} - \frac{1}{2} \frac{n_0}{T_{e0}} \frac{dT_{e0}}{dr} \right), \quad Q_{\parallel e} = -\kappa \left( \frac{dT_{e0}}{dr} + \frac{T_{e0}}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \right), \quad (4.15)$$

where  $D$  is given the relation (4.12), and the heat conduction coefficient is found to be:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{c^4}{e(4\pi)^2} \sum_{\mathbf{k}, \omega} \frac{\omega}{\omega_{**}} \mu_{\mathbf{k}, \omega} |\eta_{\mathbf{k}, \omega}|^2 \frac{k_{\perp}^4 k_{\parallel}^2 |\xi_{\mathbf{k}, \omega}|^2 \left(1 + \frac{\omega_{**}}{\omega}\right)}{\left(\omega - \omega_* + \frac{\omega_{**}}{2}\right)^2 + \left(\frac{c^2 k_{\perp}^2 \eta_{\mathbf{k}, \omega}}{4\pi}\right)^2}, \\ \omega_{**} &= -\frac{eT_e k_y}{eB_0} \frac{d \ln T_{e0}}{dr}, \\ \mu_{\mathbf{k}, \omega} &= -\frac{ien_0 \omega}{k_{\parallel}^2} \left[ \frac{1}{2} + \left(\frac{\omega}{k_{\parallel} v_e}\right)^2 \left(1 + \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_e} Z\left(\frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_e}\right)\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

A more precise calculation of the diffusion coefficient,  $D$  (and the diffusive  $\chi$ ) can be carried out on the assumption of an oscillation spectrum that is more realistic than  $\xi \lesssim 1/k_{\perp}$ .

## Addendum

The anomalous momentum transport is found from equations given in Ref. [11].

## References

1. Kadomtsev B.B., Pogutse O.P. // Zh. Ehksp. Teor. Fiz. 1973. V. 65. P. 575.
2. Kadomtsev B.B., Pogutse O.P. // Voprosy teorii plazmy. Moscow, Atomizdat, 1967. V. 5. P. 209.
3. Kadomtsev B.B., Pogutse O.P., Yurchenko E.I. // In Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 10th Int. Conf. Baltimore, 1982). IAEA Vienna, 1983. V. 3. P. 67.
4. Izzo R. et al. // Princeton PPPL-2007 (1973).
5. White R.B., Monticello D.A., Rosenbluth M.N., Strauss H.R., Kadomtsev B.B. // In Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 5th Int. Conf. Tokyo, 1974). IAEA, Vienna, 1975. V. 1. P. 485.
6. Dnestrovskij Yu.N., Zakharov L.E., Kukushkin A.S., Kostomarov I., Suzdaleva A.F. // Pis'ma Zh. Ehksp. Teor. Fiz. 1975. V. 1. P. 45.
7. Waddell B.V., Rosenbluth M.N., Monticello D.A., White R.B. // Nucl. Fusion. 1976. V. 16. P. 528.
8. Kadomtsev B.B. // Fiz. Plazmy. 1975. V. 1. P. 710.
9. Carreras B.A., Waddell B.V., Hicks H.R. // Nucl. Fusion. 1979. V. 19. P. 1423.
10. Parail V.V., Pogutse O.P. // Pis'ma Zh. Ehksp. Teor. Fiz. 1980. V. 32. P. 408.
11. Kadomtsev B.B., Morozov D.Kh., Pogutse O.P. // Pis'ma Zh. Ehksp. Teor. Fiz. 1984. V. 40. P. 80.

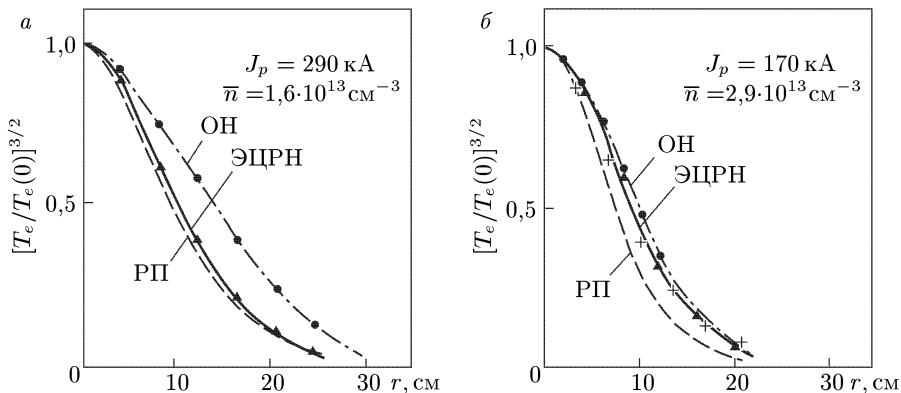
## ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТОКА В ТОКАМАКЕ \*)

Серия экспериментов по ЭЦР-нагреву плазмы в токамаке Т-10 показала, что по мере увеличения отношения плотности плазмы к току распределение плотности тока по радиусу стремится к некоторому предельному распределению, которое может быть найдено из простого вариационного принципа, соответствующего минимуму энергии плазмы и полоидального магнитного поля при заданном токе.

Ток в плазме токамака поддерживается вихревым электрическим полем  $E$ , а распределение плотности тока  $J$  по радиусу зависит от распределения температуры электронов  $T_e$ , поскольку  $J = \sigma E$ , а электропроводность  $\sigma = \sigma_0 T_e^{3/2}$ . Поэтому, казалось бы, профиль  $J(r)$  определяется профилем  $T_e^{3/2}(r)$ , а он зависит от баланса между нагревом и потерями тепла за счет теплопроводности, и в разных установках профили могли бы быть разными. Однако на самом деле профили  $T_e(r)$  в разных токамаках очень похожи друг на друга. Коппи [1], первым обративший внимание на это явление, назвал его «согласованность профиля». Наиболее ярко явление согласованности профилей  $J(r)$ ,  $T_e(r)$  проявилось на самых крупных установках ДЖЕТ [2] и ТФТР [3]. На ТФТР, например, профиль  $T_e(r)$  сохранял универсальную форму при дополнительном нагреве на периферии с вкладом мощности вплоть до  $r/a \approx 0,8$  ( $a$  — малый радиус плазмы). Аналогичное явление наблюдалось ранее на Т-10 при ЭЦР нагреве плазмы [4]. Оно было исследовано более подробно в недавней серии экспериментов на Т-10 при различных значениях тока и плотности плазмы с возможностью как центрального, так и периферийного вклада мощности от гиротронов. Эксперименты показали, что при омическом нагреве плазмы по мере повышения отношения  $\bar{n}/J_p$ , где  $\bar{n}$  — средняя плотность плазмы,  $J_p$  — ток, распределения температуры  $T_e(r)$  и плотности тока  $J(r)$  по радиусу стремятся к некоторому «предельному профилю». Этот профиль плазма старается сохранить и при дополнительном нагреве: изменение профиля вклада мощности не изменяет предельного профиля, вместо этого происходит такая перестройка коэффициента теплопроводности, что исходный профиль сохраняется. Рисунок иллюстрирует этот факт. На нем показаны профили  $T_e^{3/2}(r)$  при омическом и дополнительном ЭЦР-нагревах при двух значениях тока  $J_p = 290$  кА и  $J_p = 170$  кА. При токе  $J_p = 290$  кА дополнительный нагрев по центру обостряет профиль  $T_e(r)$ , и при этом он еще соответ-

\*) Есинчук Ю.В., Кадомцев Б.Б. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43. Вып. 12. С. 573–575.

ствуется расчетному (в предположении сохранения величины электронной теплопроводности). Однако при  $J_p = 170$  кА предельный профиль достигается уже в омическом режиме и при дополнительном нагреве он не меняется. При увеличении  $\bar{n}/J_p$  предельный профиль сохраняется еще более жестко.



Профили температуры  $[T_e(r)/T_e(0)]^{3/2}$  в омическом режиме (ОН) и при ЭЦРН. Режимы: а —  $J_p = 290$  кА,  $\bar{n} = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , б —  $J_p = 170$  кА,  $\bar{n} = 2,9 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ . РП — расчетный профиль в предположении  $k_e^{\text{ОН}} = k_e^{\text{ЭЦРН}}$ ,  $k_e$  — коэффициент электронной теплопроводности, + — оптимальный профиль (3)  $J/J_0 = (1 + r^2/a_*^2)^{-2}$

При сохранении предельного (оптимального) профиля во всем шнуре удержание электронной компоненты плазмы не хуже, чем при омическом нагреве, а при его нарушении происходит деградация удержания.

С теоретической точки зрения явление образования оптимального профиля тока естественно связать с неустойчивостью тиринг-мод [3], которые «чувствуют» все распределение тока по радиусу, а описать это явление, казалось бы, следует в духе теории Тейлора [5] релаксированных состояний в пинче с обратным полем. В прямом виде теория Тейлора к токамаку не применима, поскольку она предполагает полное перезамыкание силовых линий. Кроме того, в токамаке энергия тороидального магнитного поля  $B$  фиксирована. Будем считать, что релаксированное состояние в токамаке соответствует минимуму энергии (полоидального магнитного поля плюс тепловой) при заданном полном токе. Тогда можно воспользоваться вариационным принципом:

$$\delta F \equiv \delta \left[ \int \frac{B_\theta^2}{2} r dr + \frac{1}{\gamma - 1} \int P r dr + \lambda \int J r dr \right] = 0. \quad (1)$$

Здесь  $B_\theta$  — полоидальное магнитное поле,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $P$  — давление плазмы,  $J$  — плотность тока,  $\lambda$  — множитель Лагранжа. Величину  $F$  можно рассматривать как свободную энергию, минимум которой определяет наиболее устойчивое состояние. Варьировать  $F$  следует по возмущениям, качественно напоминающим нелинейные тиринг-моды, которые одновременно уплощают распределения  $P(r)$ ,  $J(r)$  и  $q(r)$  — запаса устойчивости вблизи рациональных точек  $q$  при сохранении магнитной конфигурации вдали от «магнитных островов». В соответствии с этим

полагаем в (1)

$$B_\theta = \frac{d\psi}{dr}, \quad P = P(\mu), \quad J = J(\mu), \quad \mu \equiv q^{-1} = \frac{R}{B} \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr}.$$

Варьирование (1) дает

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{B^2}{R^2} \mu + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dP}{d\mu} + \lambda \frac{dJ}{d\mu} \right] = 0. \quad (2)$$

Вместе с соотношением  $J/J_0 = (1/2r) d/dr(r^2\mu)$  уравнение (2) приводит к решениям простейшего вида

$$P = P_0\mu^2, \quad J = J_0\mu^2, \quad \mu = \left( 1 + \frac{r^2}{a_*^2} \right)^{-1}, \quad (3)$$

где мы выбрали константу интегрирования таким образом, что  $\mu(0) = 1$ . Величина

$$a_*^2 = \frac{R^2 J_p}{I_0} = \frac{R J_p}{5B}, \quad (4)$$

где  $I_0$  — полное количество ампер-витков тороидального магнитного поля.

В токамаке  $J \sim T^{3/2}$ , соответственно оптимальный профиль для  $J$  из (3) может быть наложен на рисунке. Как мы видим, он очень хорошо согласуется с «предельным» профилем на Т-10.

В минимуме свободная энергия  $F$  после подстановки  $\lambda$  равна

$$F = \frac{B^2}{2R^2} \int [r^2 + a_*^2] \mu^2 r dr. \quad (5)$$

Она не зависит от тепловой энергии плазмы, т. е. от  $\beta_p$ . Однако при отклонении от оптимума  $F$  возрастает и тем более круто, чем больше  $\beta_p$ . При отклонении от оптимума естественно ожидать ухудшения термоизоляции плазмы. Этот вывод хорошо коррелирует с результатами экспериментов на Т-10. А именно, по мере увеличения отношения  $\bar{n}/J_p$  (пропорционального  $\beta_p \sim n T a_*^2 / J_p^2$ ), с одной стороны усиливается тенденция к сохранению оптимального профиля, а с другой — облегчаются условия деградации удержания при отклонении профиля от оптимального (в частности, приближением лимитера к плазме). Заметим, что и на других токамаках отклонение скейлинга от имеющего место в омическом режиме возрастает по мере увеличения  $\beta_p$ .

#### Список литературы

1. Coppi B. // Comments Plasma Phys. Contr. Fusion. 1980. V.5. P. 261.
2. Bickerton R.J. // Invited paper on 12-th European Conf. on Contr. Fusion and Plasma Physics. Budapest, 1985.
3. T-10 Group. 12-th European Conf. on Contr. Fusion and Plasma Physics. Budapest, 1985. V. 1. P. 42,
4. Taylor J.B. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 1139.

# ELECTRON CYCLOTRON RESONANCE HEATING AND ELECTRON HEAT TRANSPORT IN A TOKAMAK \*)

Electron Cyclotron Resonance Heating, (ECRH), provides an opportunity of adding a local power contribution to the electron plasma component. Thus, the electron temperature profile can be varied at will and the dependence of electron heat losses on the shape of the profile can be studied.

## Introduction

At present, electron heat transfer is well known to be the principal channel of energy loss from a tokamak plasma. Electron transport is also known to be sensitive to the temperature profile. Transitions between the various regimes of heat loss are possible by varying the profile shape.

ECRH is a most convenient tool for studying the sensitivity of heat transport with profile. One can shift the ECR-zone along the major radius by small changes in the toroidal magnetic field and thus change the electron temperature profile. Experiments of this type have been carried out on T-10. The results of these experiments and their comparison with other experiments on electron energy confinement in tokamaks are discussed below.

## Preliminary Discussion

A self-consistent electron temperature profile is always set up in a tokamak in Ohmic heating conditions. The energy confinement with Ohmic heating is satisfactorily described by a general scaling law. A successful one is the so-called neo-ALCATOR scaling law:

$$\tau_{E, \text{OH}} = 7 \cdot 10^{-22} n_e R^2 a q, \quad (1)$$

where  $n_e$  is the mean electron density,  $R$  and  $a$  are the major and minor radii respectively, and  $q$  is the safety factor at the plasma boundary. Different regimes of confinement can be realized with auxiliary heating. The so-called L-regime, with a relatively poor confinement, is encountered most readily. With special plasma boundary conditions, one can realize the H-regime with better plasma energy confinement. Goldston [1] derived an empirical scaling law for regimes with auxiliary heating and obtained a relationship for the H-mode:

$$\tau_{E, \text{aux}} = 1,3 \cdot 10^{-7} K^{0,5} I_p P_{\text{tot}}^{-0,5} a^{-0,37} R^{1,75}. \quad (2)$$

Here,  $n$  [ $\text{cm}^{-3}$ ] is the plasma density,  $a$  [cm] the minor radius,  $R$  [cm] the major radius,  $K = b/a$  the elongation,  $I_p(A)$  the plasma current and  $P_{\text{tot}}(W)$  is the total power. The numerical coefficient in Eq. (2) is reduced a factor 2 for the L-regime.

---

\*) Plasma Physics and Controlled Fusion. 1986. V. 28. No. IA P. 125–131.

The confinement time in a particular case is approximately determined by the smaller value of Eqs (1) or (2), so that with a rise in  $I_p$ , even in the presence of auxiliary heating, or with a drop in  $n_e$ , a transition from Eq. (2) to Eq. (1) occurs.

The scaling laws Eqs (1) and (2) are purely empirical and they should be considered only as an empirical fit. They have no theoretical background in the form suggested. One can ask: what can one expect at the transition from the Ohmic heating situation to a non-Ohmic case? First, assume that a change in temperature is not so great that the dependence of  $\tau_E$  on  $T$  and a drop in the Ohmic heating power with a rise in temperature must be taken into account. Then, the total energy content in the plasma,  $W$ , with Ohmic heating is expressed as  $W_{OH} = \tau_{E, OH} \cdot P_{OH}$ . The energy content including auxiliary heating power  $P_b$  can be represented as  $W = \tau_{E, OH} P_{OH} + \tau_b P_b$ . Here  $\tau_b$  can be noticeably less than  $\tau_{E, OH}$  as the power of auxiliary heating, especially neutral injection, can be deposited at the plasma periphery, where the heat conduction is usually considerably greater than that in the plasma core. Let us introduce notations:

$$W = \tau_{E, aux} P_{tot}, \quad \text{where} \quad P_{tot} = P_{OH} + P_b.$$

Then one obtains

$$\tau_{E, aux} = \tau_b + \frac{\text{const}}{P_{tot}}, \quad \text{where} \quad \text{const} = (\tau_{E, OH} - \tau_b) P_{OH}. \quad (3)$$

One can see that a simple transition from the Ohmic regime to the regime of auxiliary heating shows a degradation in the confinement time with a rise in  $P_{tot}$ . In particular, it is related to the L-regime, where  $\tau_b$  is noticeably less than  $\tau_{E, OH}$ . Note that a dependence of the type in Eq. (3) satisfactorily describes some experiments on Doublet -III [2] on ASDEX and on some other machines.  $\tau_b$  is close to  $\tau_{E, OH}$  in the H-regime. Therefore,  $\tau_{E, aux}$  virtually coincides with  $\tau_b$ . The results from the H-regime on ASDEX can be fitted by a scaling law for the global energy confinement time:

$$\tau_E = 10^{-9} I_p R \sqrt{\frac{A_i}{2}}, \quad (4)$$

where  $A_i$  is the atomic weight of ions,  $I_p(A)$  is the plasma current, and  $R$  [cm] is the major radius. One can consider that Eq. (1) is related to an asymptotic value of  $\tau_{E, aux} = \tau_b$  at high  $P_{tot}$ .

Note that results from TFTR [3] within the L-regime can be represented by the relationship  $\tau_E = 10^{-7} I_p$ , that is, approximately a factor two lower than Eq. (1), as it usually occurs in the L-regime in comparison with the H-regime (TFTR has  $R = 250$  cm).

A value of  $\tau_b$  can include the dependence of energy confinement on the temperature profile. Moreover,  $\tau_b$  can depend on temperature. Then  $\tau_b$  is reduced with temperature. Thus, the scaling law [2] with a single power dependence of  $\tau_{E, aux}$  on  $P_{tot}$  cannot be considered as satisfactory, especially when extrapolated to very high  $P_{tot}$ . A more accurate determination of a scaling law for electron energy confinement is possible with ECRH, which also provides an opportunity to study the dependence of electron heat conduction on temperature and on its profile.



## ECRH on T-10

The first ECRH experiments on T-10 have shown this to be a highly efficient heating technique [4]. A rise in plasma energy confinement depends on the resonance zone up to  $\Delta R = R - R_0 = 20$  cm from the magnetic axis. Outside this region, the efficiency of heating abruptly drops. This means that the effective energy confinement time  $\tau_b$  can be found to be noticeably less than  $\tau_E$  for a wide energy deposition profile.

In the first experiments on T-10, a temperature profile effect on the electron energy confinement was recorded. The time dependence of the diamagnetic

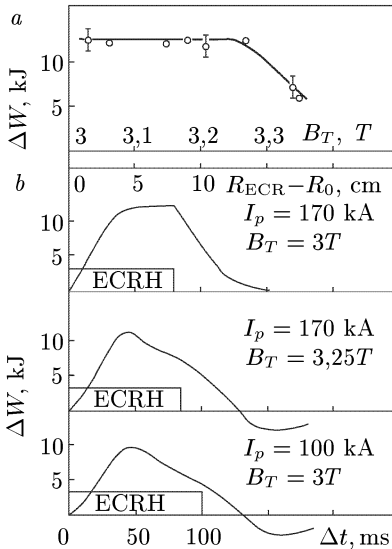


Fig. 1

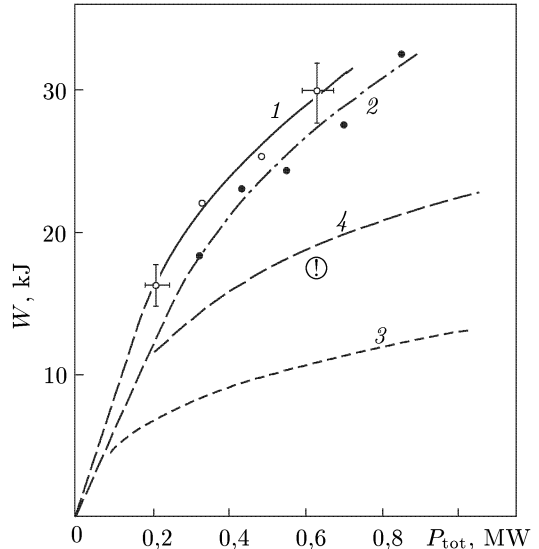


Fig. 2

Fig. 1. *a* — energy increment in plasma (measured 30 ms after ECRH-pulse start-up) versus the resonance position; *b* — diamagnetic effect as a function of time, during central ECRH and with ECRH-displaced 12,5 cm to the low field side of the torus ( $n_e = 3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ). Fig. 2. Energy content in plasma versus total deposited power  $P_{\text{tot}} = (P_{\text{OH}} + P_{\text{ECRH}})$  for two discharge currents  $I_p = 180$  kA (1) and  $I_p = 270$  kA (2) with central heating ( $n_e = 3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ); the point  $\textcircled{!}$  corresponds to the end of the ECRH-pulse with the resonant zone position displaced 12,5 cm to the low-field side of the torus; traces 3 and 4 correspond to the Key–Goldston scaling law for currents of 180 kA and 270 kA respectively.

signal during central heating ( $B_T = 3T$ ) and that at a displacement of the resonance zone by  $\Delta R = 12,5$  cm outwards (to the low-field side of the torus) ( $B_T = 3,25T$ ) are shown in Fig. 1. The energy increment for the first 30-40 ms of heating is sufficiently effective. Then, when a new equilibrium the resonance is displaced, ( $I_p = 120$  kA,  $B_T = 3,25T$ ), and when the plasma column is strongly contracted at ( $I_p = 100$  kA,  $B_T = 3T$ ). It is interesting to note that the point marked  $\textcircled{!}$  in Fig. 2, showing the dependence of energy deposition on power (corresponding to a new current density profile and worse plasma

confinement), fits well with the Kaye–Goldston scaling law. Thus Figs 1 and 2 show how the current profile variation can affect noticeably the electron energy confinement time.

## Electron Heat Transport Phenomenology

The electron heat transport can be described phenomenologically as a result of self-organisation of a plasma column; the current profile is self-adjusted so that the anomalous heat transport is sustained at a level sufficient for controlling the optimal current density profile. The plasma maintains a definite level of fluctuations and the corresponding magnitude of electron thermal conductivity adjusts to provide optimal temperature and current density profiles, so that the «profile consistency» advocated by Coppi [5] should indeed take place. A small perturbation from the optimum can cause a nonlinear response: both the profiles and the transport rearrange self-consistently to provide a new stable pattern. Large perturbations can destroy the plasma by disruption. This point of view means that it is not so easy to develop a quantitative theory of the anomalous transport for different modes of confinement. However, a qualitative discussion can be carried out.

We assume that the plasma, controlled by neoclassical transport only, would inevitably evolve into an unstable state. Therefore, its real state assumes the presence of some level of perturbations produced by a slightly excited instability. This instability can be of either the kink, ballooning or drift type or any mixture. It can be localized near the boundary of the plasma, but in spite of that, the instability can pump the magnetic noise in the bulk plasma. The simplest mechanism for pumping is the magnetic island stirred by helical modes. Such stirring can be produced by the modes with different helicities at the expense either of the thermal plasma energy or the energy of the poloidal magnetic field. Both of these are of the same order of magnitude and it makes no difference in the qualitative discussion. Using the dimensional approach, we can construct the expression for the noise power pumping simply as:

$$P = \frac{\mu\omega_*B^2}{8\pi}. \quad (5)$$

It is proportional to the poloidal magnetic field density and to the drift frequency  $\omega_*$  in the pumping region (i.e. near the plasma boundary). We can estimate  $\omega_*$  as  $\omega_* \approx \frac{C_S\rho_{\theta S}}{aR}$ , where  $C_S = \left(\frac{T_S}{M}\right)^{1/2}$  is the sound velocity,  $\rho_{\theta S} = \frac{M_C C_S}{eB_\theta}$  is the poloidal Larmor radius.  $T_S$  is the plasma temperature near the plasma edge. A small factor,  $\mu \ll 1$ , takes into account both the small scale of the helical mode energy compared with the plasma energy and the small size of islands.

Now we can estimate the level of the magnetic noise,  $\tilde{B}^2$ . We assume that the  $\tilde{B}^2$ -spectrum in  $K$ -space is a broad one. Its region is restricted by the relationships:  $K_{\parallel} \lesssim qR$ ;  $K_{\perp} \lesssim \omega_{pe}/C$ . The last inequality means that the small scale perturbations of magnetic field can hardly be produced by plasma natural motion. We believe that inside this region the different modes of the magnetic noise can exchange energy so that  $\tilde{B}^2$  can be limited by the averaged-

over spectrum decay rate,  $\gamma$ . It is given approximately by the relation:

$$\gamma = C^2 \omega_{pe}^{-2} V_{th} \langle K \rangle \langle K_{\perp} \rangle = q^{-1} R^{-1} V_{th}. \quad (6)$$

Here,  $V_{th}$  is the electron thermal velocity.

Eq. (6) is a collisionless analog of the resistive decay rate,  $\gamma_S = C^2 \eta K_{\perp}^2 / (4\pi)$  (in CGS units).

Now, using the relation  $P = 2\gamma \tilde{B}^2 / 8\pi$ , we can estimate the value

$$b^2 = \frac{\tilde{B}^2}{B_T^2} = \frac{\mu}{2} \frac{C_S}{V_{th}} \frac{a \rho_{\theta S}}{q R^2}. \quad (7)$$

The presence of the magnetic field perturbations does not mean immediately that they produce enhanced transport. The magnetic fluctuations can be associated simply with the small deformations of the nested magnetic surfaces. For transport enhancement the reconnection of the magnetic field lines is important, so that we should estimate the level of reconnections.

Let us start with the high density case, when  $bqR > C/\omega_{pe}$ , i.e. the displacement of the magnetic field line over the distance  $qR$  is larger than the minimal transverse scale  $C/\omega_{pe}$ . In this case the magnetic field lines are stochastic. They diffuse with the diffusion coefficient  $D_F = b^2 qR$ , i.e. the characteristic displacement  $\Delta X$  depends upon length  $Z$  as  $(\Delta X)^2 = 2D_F Z$ . Free streaming of electrons along the field lines leads to the thermal diffusivity

$$\chi_e = V_{th} D_F = V_{th} b^2 qR. \quad (8)$$

After substitution of Eq. (7) in Eq. (8), we obtain by the order of magnitude;

$$\tau_{E, \text{aux}} = \frac{a^2}{4\chi_e} = \frac{e I_p R}{\mu T_s C^2}. \quad (9)$$

Expressing  $T_S$  in eV,  $I_p$  in A and  $R$  in cm, we can express Eq. (9) in the form

$$\tau_{E, \text{aux}} = (\mu T_S)^{-1} \cdot 10^{-9} I_p R. \quad (10)$$

It can be compared with the experimental relationship in Eq. (4) for  $\tau_{E, \text{aux}}$  for H-regime in ASDEX. We see that  $\mu T_S \sim 1$ , i. e.

$$\mu \sim 10^{-3} \text{ at } T_S \sim 10^3 \text{ eV}. \quad (11)$$

Now, we consider the low density case,  $bqR < C/\omega_{pe}$ . In this case only very elongated perturbations with the longitudinal wavelength  $L > qR$  can reconnect magnetic field lines. Formally, we can estimate  $L = C/(\omega_{pe} b)$  and hence  $D_F = b^2 L = C^2 \omega_{pe}^{-2} L^{-1}$ . However, the value of  $D_F$  is determined not by the averaged value  $b^2$  but by a spectrum at small  $K_{\parallel} \sim L^{-1}$ . For small  $K_{\parallel}$ , the collisionless resistivity is proportional to  $V_{th} K_{\parallel} = V_{th} L^{-1}$  which is smaller than  $V_{th}/(qR)$  so that  $b^2$  in the formula for  $D_F$  should be increased by the factor,  $L/(qR)$ . Therefore,

$$D_F = \frac{C^2}{\omega_{pe}^2} \cdot \frac{1}{qR}. \quad (12)$$

Now we can estimate  $\chi_e$ . In principle,  $\chi_e \sim D_F V_{th}$ . However, the magnetic perturbations in a tokamak plasma with  $K_{\perp} \sim C/\omega_{pe}$  correspond to the so-called kinetic Alfvén waves. They have dispersion  $\omega = K_{\parallel} V_{th} C K_{\perp} / \omega_{pe}$ . Their

phase velocity,  $\omega/K_{\parallel}$ , is comparable with the electron thermal velocity. Hence  $\chi_e$  is diminished as compared with  $D_F$  by the factor  $\exp[-\omega^2/(K_{\parallel}^2 V_{\text{th}}^2)]$ . If this factor is small enough, then the input from the satellite harmonic with smaller amplitude,  $r/R$ , can be important, so that

$$\chi_e \sim \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} \frac{C^2}{\omega_{pe}^2} \frac{V_{\text{th}}}{qR}, \quad (13)$$

where  $1 < \alpha < 2$ . If the value  $\alpha = 1$  is taken, then Eq. (13) leads to the Neo-ALCATOR scaling corrected by inclusion of the temperature dependence

$$\tau_{E, \text{OH}} \sim aR^2 qnV_{\text{th}}^{-1}. \quad (14)$$

We have used traditional notations  $\tau_{E, \text{aux}}$  and  $\tau_{E, \text{OH}}$  in Eqs (9) and (14). However, the low and high density regimes may have different scalings even with Ohmic heating. We see that the transition between Eqs (9) and (11) takes place at  $bqR = \omega_{pe}^{-1}C$ . Auxiliary heating can increase the noise level. It displaces the transition point to lower density and decreases the confinement time  $\tau_{E, \text{aux}}$ . As for  $\tau_{E, \text{OH}}$ , it is not sensitive to the level of magnetic noise. The value  $\tau_{E, \text{OH}}$  decreases with the pumping level.

The level of noise depends upon many factors: temperature and current density profiles, plasma-wall interactions, direct noise from the auxiliary heating, etc. Hence the  $\tau_{E, \text{aux}}$  value can vary from one regime to another and corresponding scalings can be slightly different. We do not intend to discuss here this difference. The concrete  $\tau_E$  value may depend upon the skill of an experimenter who diminishes empirically the noise level.

### References

1. Goldston R. // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion. 1984. V. 26. P. 82
2. Burrell K.H. et al. // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA, Vienna, 1985. V. 1. P. 131,
3. TFTR Group, presented by Murakami M. at Sixth Topical Meeting on the Technology Of Fusion Energy. San Francisco, 1985.
4. Alikaev. V.V. et al. // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA, Vienna, 1985. V. 1. P. 1419.
5. Coppi B. // Comments Plasma Physics and Controlled Fusion. 1980. V. 5. P. 261.

## BALL LIGHTNING AS A PHENOMENON OF SELF-ORGANIZATION\*)

A model of ball lightning is proposed in which both magnetic and electric field generation is considered as a kind of dust plasma self-organization, and the ball lightning matter represents a sort of gas accumulator that can generate self-consistent fields.

### 1. Introduction

Ball lightning is a natural phenomenon and has been observed many times over. It looks like a luminous sphere with a volume of several litres. Energy that it stores can be released in the form of a small-scale explosions accompanied by an electric discharge akin to a tiny flash of lightning. Observers estimate the energy of ball lightning at the order of several kilojoules, with a large spread from event to event.

Ball lightning floats in air, so that its mass density is not very much different from air density. Hence, its mass is of the order of a few grammes. The energy carried by ball lightning is probably of chemical origin. For instance, the energy of water vapour condensation is about 2 kJ per gramme, and the energy of explosives is about 4 kJ per gramme.

The most striking feature of ball lightning is its stable spherical shape, which is retained almost rigidly even in the presence of external perturbations. This feature looks like the result of a kind of surface tension that forces the conservation of the spherical shape with a minimum surface area. We will attempt to explain this mysterious feature.

The starting idea is that ball lightning possesses electric or magnetic fields generated at the expense of the chemical energy [1]. Generation of such fields reflects some kind of self-organization of dust plasma. The paper discusses both types of self-organization, electric and magnetic. The assumption made is that ball lightning matter represents a kind of gas accumulator that generates self-consistent fields.

### 2. Gas accumulator phenomenology

Let us assume that the active matter of ball lightning is capable of generating electric fields and currents. This means that the matter can be considered as being a kind of electrical accumulator.

---

\*) J. Moscow Phys. Soc. 1991. V. 1. P. 335–340.

The main difference that sets this accumulator apart from a usual one is its isotropy. Let us imagine what the current-voltage characteristics of such an accumulator would be.

We start with the current-voltage characteristics of the common chemical accumulator (storage battery). Instead of the total current  $I$  and voltage  $V$

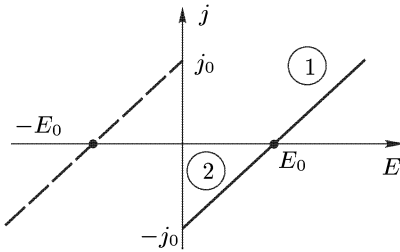


Fig. 1. The current-voltage characteristic of the chemical accumulator: 1—charging of the battery, and 2—discharging of the battery

in the external circuit we will employ the current density  $j = I/S$  and the internal effective electric field  $E = -V/d$ , with  $S$  the electrode surface area, and  $d$  the distance between the electrodes. The full line in Fig. 1 depicts the  $E$ -dependence of  $j$  for an ordinary accumulator. The  $E_0 = V_0/d$  value corresponds to the voltage when the battery is disconnected. As the battery is discharged, the voltage diminishes and the current increases as the resistance drops. At the crowbar point the current reaches the value  $j_0S$  and the voltage vanishes.

The branch of characteristics denoted by '1' corresponds to the charging of the battery. If we interchange the electrodes, the cathode and the anode, the characteristics correspond to the broken line.

An isotropic gas accumulator should possess both features, represented by the full and broken lines. Hence, for the current-voltage characteristics we should take the combination of both lines. Two possible characteristics, called the N-type and the S-type, can be envisioned (Fig. 2).

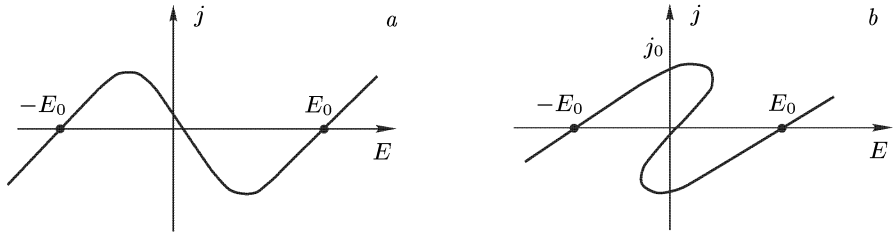


Fig. 2. The current-voltage characteristics of the N-type (a) and S-type (b)

As we will shortly see, the N-type characteristics can lead to electrostatic field self-organization and the S-type to magnetic field self-organization.

### 3. Electrostatic field self-organization

Electrostatic self-organization for the case of N-type characteristics was discussed in [1]. Figure 2a shows that the initial state without an electric field is unstable since for low  $j$  and  $E$  the linear dependence  $j = -\sigma_S E$  with a negative conductivity perturbation is valid. An initially low electric field builds up to a value  $E = E_0$ , which fills the entire volume of the active matter.

The energy of the electrostatic field plays the role of surface tension. Namely, the electrostatic field energy reaches its minimum for the spherical shape that the active matter acquires when the electric field is directed radially and is equal to  $E_0$ . Any deviation from spherical symmetry produces an

external electric field that tends to restore the spherical shape. The characteristic time of the restoring process can be estimated at  $\tau \approx a/V_E$ , where  $a$  is the ball radius, and  $V_E = E_0(4\pi\rho)^{-1/2}$ , with  $\rho$  the mass density of matter. For a reasonable value of the spherical shape restoring time  $\tau \approx 1$  s, for  $a < 10$  cm, and for  $\rho = 10^{-3}$  g cm $^{-2}$ , a value of  $E_0$  of the order of 1 esu = 300 V cm $^{-1}$  is sufficient. The energy of the field occupying a volume of the order of several litres is of the order of  $10^{-6}$  J.

For the active matter to maintain an electric field there must be a driving force, and chemical reactions can produce this driving force. In the presence of an electric field an Ohmic current  $j_d = \sigma_0 E_0$  has to flow inside the matter, and this leads to energy density dissipation with a rate  $\dot{\epsilon} = -8\pi\sigma_0\epsilon$ , where  $\epsilon = VE^2/8\pi$ ,  $V$  is the total volume, and  $\sigma_0$  is the ordinary conductivity. If the ball plasma consists of negatively and positively charged ions at room temperature (the ball's luminosity is assumed to be produced by chemical luminescence rather than by thermal), its conductivity can be estimated at  $\sigma_0 = e^2n/(n_0m\sigma_a c_s)$ , with  $n$  the plasma density,  $m$  the ion mass,  $\sigma_a$  the atomic collision cross section, and  $c_s$  the speed of sound, and  $\sigma_0$  can be estimated as being of the order of  $10^{14}n/(n_0s^{-1})$ . If the plasma density  $n$  is of the order  $10^{13}$  cm $^{-3}$  and  $n_0$  of the order of  $10^{19}$  cm $^{-3}$ , the rate of energy decay,  $\dot{\epsilon}$ , is of the order of  $-10^9\epsilon$ , which is about 1 kW for  $E$  of the order of 1 esu. Thus, for an initial energy capacity of the order of several kilojoules the electric-field energy dissipation yields a lifetime of the order of several seconds. If the plasma density is below  $10^{13}$  cm $^{-3}$ , the lifetime of ball lightning with electrostatic self-organization is greater than this value.

#### 4. Magnetic field self-organization

Now let us consider S-type current-voltage characteristics (Fig. 2 b). Small perturbations now have positive resistivity, with the result that they are damped, but if an electrostatic field was generated, current perturbations build up in time in the region where  $jE < 0$ .

The steady state is reached when  $j = j_0$  and  $E = 0$ , that is, a constant current density is maintained at zero electric field. At first glance the matter resembles a superconductor, but in fact the current is maintained by a driving force of chemical origin.

An elementary current loop, which can be produced locally, generates a magnetic field  $B \approx lj_0/c$ , where  $l$  is the linear size of the current loop (in term of esu units). If  $l$  is not extremely small, the magnetic forces can influence the plasma's motion. As is known, a simple current ring with a poloidal magnetic field is unstable under kink-type MHD-perturbations. This instability leads to a toroidal magnetic field being generated, so that a tiny spheromak [2] is created.

Such local current generation can produce many spheromaks. Each elementary spheromak tends to restore its shape in spite of any external perturbations. Indeed, if a perturbation occurs at the frozen magnetic fluxes, the toroidal flux  $\Phi_{\parallel}$  and the poloidal flux  $\Phi_{\perp}$ , the total magnetic energy  $\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp} \propto \Phi_{\parallel}^2 R^2 V^{-1} + \Phi_{\perp}^2 R^{-1}$  for a given spheromak volume  $V$  reaches its minimum at a value of  $R$  corresponding to a compact spheromak configuration.

Each elementary spheromak appears from the outside as a small magnet with a magnetic moment  $M$ . Such magnets attract each other, but when they touch, they merge due to magnetic field reconnections. Therefore, there appears a mechanism that tends to combine all the elementary spheromaks into a single large spheromak encompassing the entire plasma.

Similar configurations have been investigated by Koloc [3], who, however, attempted to explain the entire ball lightning energy as being solely of magnetic origin. It seems more realistic to believe that magnetic energy is needed only for ball lightning elasticity, while the main energy stored is of chemical origin.

Thus, we can assume that a magnetic field restores the spherical shape and a value of the Alfvén velocity  $v_A = B(4\pi\rho)^{-1/2}$  of the order of  $10 \text{ cm s}^{-1}$  is sufficient for the ball's stability. This means that  $B$  must be of the order of 1 G and that elementary-spheromak coalescence can be influenced but not eliminated completely by the Earth's magnetic field.

For a volume of several litres the magnetic-field energy is again of the order of  $10^{-6}$  J. Here, too, the plasma resistivity can lead to energy dissipation. The rate of this dissipation  $\dot{\epsilon}$  can be estimated by employing the formula  $\dot{\epsilon} = -e^2\varepsilon/(4\pi\sigma_0L^2)$ , with  $l$  the linear size of the ball lightning. At  $B \approx 1$  G and  $V \approx 10^3 \text{ cm}^3$  the value of  $\dot{\epsilon}$  is of the order of  $10^{-5}n_0/n$  kW. At  $n \approx 10^{-5}n_0 \approx 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  the amount of chemical energy stored in the lightning is of the order of several kilojoules and the lifetime is of the order of 1 s. Thus, for  $n < 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  electrostatic self-organization prevails, while for  $n > 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  this is the case with magnetic self-organization.

## 5. Dust plasma as a gas accumulator

Let us now see how chemical reactions can generate electric currents. Imagine a mixture of tiny accumulators immersed in a medium that is capable of conducting current. We arrive at a mixture of dust and plasma that is called dust plasma. At first let us consider an extremely simple situation. Let  $n$  be the ion density,  $e$  the ion charge, and  $\sigma_a$  the ion-neutral (atom) cross section. In the presence of an electric field  $E$  the usual plasma current  $j_d = \sigma_0 E = e^2 n E / (n_0 m \sigma_a c_s)$  is generated. Let  $n_D$  be the dust particle density and  $\sigma_D$  the cross section of the dust particles. It is assumed that every ion can chemically interact with dust particles and after interaction is ejected with a velocity  $v_0$  much higher than thermal velocity. Thus, each dust particle produces a current of fast ions with a rate of  $\xi e v_0 (n_D \sigma_D n c_s)$ , where  $\xi$  is an asymmetry factor. If the fast ions have a slow-down time  $\tau_0$ , the fast-ion current is  $j_* = \xi e v_0 \tau_0 (n_D \sigma_D n c_s)$ . It is also assumed that the electric field produces such orientation of the dust particles that the fast-ion current flows in the direction, opposite to the usual one. Then the net current is  $j = [1 - \xi v \tau_0 / (v_D \tau_S)] e^2 n / (n_0 m \sigma_a c_s)$ , with  $v_D = eE / (m n_0 \sigma_A c_s)$  the drift velocity of ions, and  $\tau_S^{-1} = n_D \sigma_D c_s$  the rate of collisions of ions with dust particles. The ratio  $\tau_0 / \tau_S$  is less than unity but  $v_0 \gg v_D$ , so that if  $\xi > v_D / v_0$ , the sign of the current may be negative, that is, the net current flows against the applied electric field. This means that such a mechanism manifests itself as an isotropic gas accumulator.



Let us consider another example of gas accumulation. Smirnov [4] has suggested that ball lightning could be filled by fractal dust particles. It is assumed that such particles resemble interlinked branches with different materials on both ends (Fig. 3).

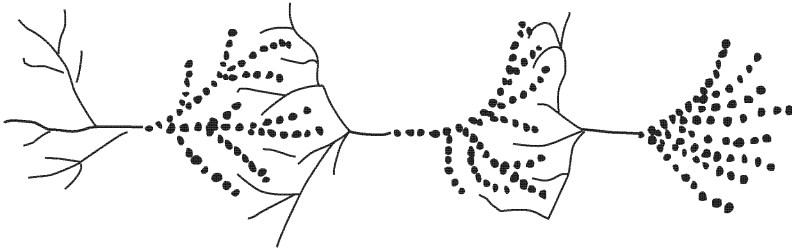


Fig. 3. Fractal dust particles attached to each other and having chemically different ends. Full and broken lines correspond to different materials

If the fractal particles overlap, as shown in Fig. 3, we have a battery of accumulators with the full lines corresponding to one electrode and the broken lines to the other, while the plasma acts as an electrolyte. If dust particles can conduct the current, the «microbattery» shown in Fig. 3 can generate a current even when there is no external electric field. Thus, fractal dust particles can simulate S-type current-voltage characteristics necessary for «superconductor» simulation.

The microspheromaks generated locally by these currents merge in the course of self-organization with such an orientation of the elementary «batteries» of Fig. 3 that they become aligned in the same direction. Thus, self-organization generates the net current of a single large spheromak.

## 6. Conclusions

Dust plasma, that is, a mixture of chemically active dust particles with an ion plasma, can be considered as being an isotropic gas accumulator. Such a medium can have current voltage characteristics of either the N- or S-type depending on the structure of the dust particles and their chemistry. If the active medium can generate either electric or magnetic fields, such an object resembles ball lightning, that is, a spherically shaped «chunk» of matter with an energy that can be suddenly released in the form of a small explosion. The origin of the energy contained in the ball is chemical and fields are responsible only for controlling the spherical shape.

## References

1. *Kadomtsev B.B.* // Comments Plasma Phys. Contr. Fus. 1990. V. 5 P. 277.
2. *Rosenbluth M.N., Bussac M.N.* // Nucl. Fusion. 1979. V. 19. P. 489.
3. *Koloc P.M.* // The plasma configuration and ball lightning. Science of Ball Lightning / Ed. Y.H. Ohsaki. — Singapore: World Scientific, 1989.
4. *Smirnov B.M.* // Usp. Fiz. Nauk. 1990. V. 160. P. 45.

# PLASMA TRANSPORT IN TOKAMAKS \*)

A new theoretical approach to plasma transport in tokamaks is proposed, which takes into account the marginally stochastic behaviour of both ions and electrons in a magnetic configuration with broken symmetry. Magnetic noise is damped by electrons and is pumped up by ions via electrostatic fluctuations. The transport resulting from such a mechanism displays a parametric dependence of the L- and H-modes of plasma confinement.

## 1. Introduction

It is a familiar fact that experiments on large and medium sized tokamaks revealed the phenomenon of plasma confinement degradation with increasing auxiliary heating power. Following the famous Goldston scaling [1], several empirical scalings for energy confinement time were proposed [2].

New empirical confinement scaling laws have been developed by the ITER team using the worldwide tokamak database, both for L-mode plasmas [3] and, more recently, for H-mode plasmas [4]. Additional experiments have been carried out on several of the world's large tokamaks, aimed at resolving previously uncertain dependences in the scaling laws.

The new empirical scaling laws now correspond fairly well to the experimental data and are dimensionally correct. In spite of this, however, a theoretical background for these scalings has yet to be provided. The purpose of this paper is to give a physical picture that can explain qualitatively the mechanism which may be responsible for the anomalous plasma behaviour in tokamaks.

The basic idea is related to the spontaneous breakdown of axial symmetry in the tokamak magnetic configuration. Thus, we consider first the breakdown of symmetry and then go on to discuss the anomalous transport of plasma.

## 2. Spontaneous Breakdown of Symmetry

We intend to show that the high temperature plasma in a tokamak, being practically in the collisionless regime, destroys by itself the symmetrical pattern of the nested toroidal surfaces. This breakdown of symmetry is similar to other examples of physical phenomena involving broken symmetry, such as ferromagnetism, type II superconductivity and rotating He II. However, there is an essential difference, because in a tokamak plasma the breakdown of symmetry occurs in a highly non-equilibrium state and has the appearance of a self-organization phenomenon.

Let us start with a small perturbation of cylindrical symmetry. If the amplitude of the magnetic field perturbations is very low, it can be considered as a superposition of Fourier modes such as  $\exp(im\theta - in\phi)$ , where  $m$  and  $n$

---

\*) Nuclear Fusion. 1991. V. 31. № 7. P. 1301–1314.

are azimuthal numbers,  $\theta$  is the poloidal angle and  $\phi$  is the toroidal angle. Each mode can be considered as a very small one everywhere except at the so-called rational surface where  $q(r_s) = m/n$ . Here,  $q$  is a local safety factor ( $q(r) = B_T r / (B_\theta R)$ , with  $B_T$  being the toroidal magnetic field,  $B_\theta$  the poloidal magnetic field,  $r$  the minor radius and  $R$  the major radius).

Near the rational surface, a small magnetic perturbation leads to a distortion of the initially symmetrical magnetic configuration (Fig. 1) and a helical pattern of filaments is produced (Fig. 2). Let us consider a single pattern in greater detail. We start with a perturbation in the case of a straight cylinder, using a cylindrical frame of reference with the variables  $r$ ,  $\theta$  and  $z = R\phi$ . The perturbation is assumed to be helical and so it is dependent on  $r$ ,  $m\theta - n\phi$ ,  $t$ .

To describe the plasma motion, we use a set of reduced two-fluid MHD equations [5, 6]. For an ideal plasma, the MHD equations in Gaussian units (which are preferable for the purposes of theoretical description) take the following form:

$$nm_i \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p_i = en\mathbf{E} + \frac{en}{c} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{curl } \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{curl } \mathbf{E}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}_e) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{n} \nabla(nT_e) = -\mathbf{E} - \frac{e}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}. \quad (6)$$

Here, the following notations are used:  $m_i$  is the ion mass,  $\mathbf{v}$  is the ion velocity,  $p_i = nT_i$  is the ion pressure,  $p_e = nT_e$  is the electron pressure,  $\mathbf{E}$  is the electric field,  $\mathbf{B}$  is the magnetic field,  $c$  is the velocity of light,  $\mathbf{j}$  is the current density,  $\mathbf{v}_e$  is the electron velocity and  $n$  is the electron and ion density (we assume a charge number  $Z = 1$ ). The main idea in simplifying the MHD equations lies in using the so-called tokamak ordering, in which  $B_T$  is considered to be a very large value and ion motion is allowed in the transverse direction only. Thus, we have  $\text{div } \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{B}_\perp = 0$ , so that a poloidal magnetic flux  $\psi$  can be introduced:

$$\mathbf{B} = B_T \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \times \nabla \psi. \quad (7)$$

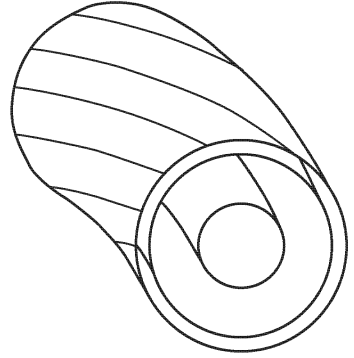


Fig. 1. Family of nested toroidal surfaces in ideal axial symmetry

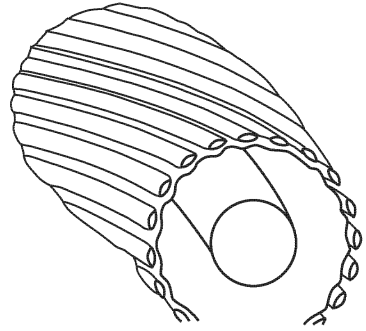


Fig. 2. When the axial symmetry breaks down, a family of helical filaments looking like an island chain appears in the cross-section of the toroidal magnetic configuration

With the help of relation (4) we obtain:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi' + \frac{1}{c} \mathbf{e}_\phi \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (8)$$

where  $\varphi'$  is the electric field potential. In addition to  $\varphi'$  we use the notation  $\varphi$  for the normalized potential:

$$\varphi = \frac{e}{T_e} \varphi'. \quad (9)$$

The electron temperature can be considered as a constant along the magnetic field lines, so that

$$\mathbf{B} \cdot \nabla T_e = 0. \quad (10)$$

If we now substitute Eq. (8) for the electric field in Eq. (6) and then take its component in the magnetic field direction, we obtain

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{e}_\phi \times \nabla\lambda \cdot \nabla\psi = \frac{B_T}{R} \frac{\partial\lambda}{\partial\phi}, \quad (11)$$

where

$$\lambda = \frac{cT_e}{eB_T} (\varphi - \ln n). \quad (12)$$

In the electron continuity equation (5) we can use for the longitudinal component  $v_{e\phi}$  the relation

$$nv_{e\phi} = -\frac{j}{e} = -\frac{c}{4\pi e} \Delta_\perp\psi. \quad (13)$$

The transverse component of the electron velocity can be found from Eq. (6), so that the density continuity equation takes the form

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{c}{B_T} \nabla n \cdot \mathbf{e}_\phi \times \nabla\phi' = \frac{c}{4\pi e B_T} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \Delta_\perp\psi. \quad (14)$$

We assume that the transverse dimension of the filament structure [7–9] is much less than the mean ion Larmor radius but larger than the mean electron Larmor radius. For such very short wavelength perturbations we have to use the Vlasov kinetic equation for ions instead of the MHD equation (1). In the first approximation the ions can be considered as being in equilibrium with the Boltzmann distribution function, so that for the density we can use the following expression:

$$n = n_0 \left( 1 - \kappa x - \frac{e\varphi'}{T_i} \right), \quad (15)$$

where  $\kappa = -\frac{dn_0}{dx} \frac{1}{n_0}$ ,  $T_i$  is the ion temperature and  $x = r - r_s$  is the distance from the rational surface where  $q(r_s) = \frac{m}{n}$ . Substituting this relation for the density in Eqs (11), (12) and (14), we obtain a closed set of two equations for the functions  $\psi$  and  $\varphi = \frac{e\varphi'}{T_e}$ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + v^* \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{1+\tau}{\tau} D_B (\mathbf{B} \cdot \nabla) \varphi, \quad (16)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - v^* \tau \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -L (\mathbf{B} \cdot \nabla) \Delta_\perp\psi. \quad (17)$$

Here we have introduced the following notations:

$$\begin{aligned} v^* &= \frac{cT_e}{eB_T} \kappa, \\ D_B &= \frac{cT_e}{eB_T}, \\ \tau &= \frac{T_i}{T_e}, \\ L &= \frac{c\tau}{4\pi enB_T}. \end{aligned}$$

Equations (16) and (17) can be used to describe nonlinear plasma perturbations with helical symmetry. These equations have an energy integral and to find this, we must multiply Eq. (16) by  $\Delta_\perp \psi$  and Eq. (17) by  $(1+\tau)D_B\varphi/(\tau L)$ , and sum the results. We then have

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\varphi + \mathcal{E}_\psi = \int \left\{ \frac{1}{8\pi} (\nabla_\perp \psi)^2 + \frac{1}{2\tau^2} p_0 \varphi^2 \right\} 2\pi r dr, \quad (18)$$

where  $p_0 = n_0(T_e + T_i)$ ,  $\varphi = \tau e\varphi'/T_i = -\tau\tilde{n}/n_0$ , with  $\tilde{n}$  being the density perturbation. The total energy  $\mathcal{E}$  consists of the magnetic energy  $\mathcal{E}_\psi$  and the electrostatic energy  $\mathcal{E}_\varphi$ .

We shall consider later the stationary rotating pattern of the helical island chain structure in which all the variables are functions  $f(\theta - n\phi/m - uv_*r^{-1}t)$ , with  $u$  being the dimensionless phase velocity. For such perturbations we can estimate the quantity  $\varphi \sim k\tau\kappa\psi/(k_\parallel B)$ , where  $k_\parallel$  is the wave number along the magnetic field. With the help of this relation we can estimate the coupling between  $\mathcal{E}_\psi$  and  $\mathcal{E}_\varphi$ :  $\mathcal{E}_\psi \approx \mathcal{E}_\varphi kw/\beta_\theta$ , where  $k = m/r$  is the wave number,  $w$  is the transverse dimension of the helical island chain and  $\beta_\theta$  is the ratio of the plasma pressure to the poloidal magnetic field pressure.

We are interested in so-called soft modes where the value of  $mB_\theta/r - nB_T/R$  is small. This means that  $x = r - r_s$  is also small. Let us now introduce an artificial magnetic field  $\mathbf{B}^*$ , the  $\theta$  component of which is equal to

$$B_\theta^* = B_\theta - \frac{nB_T r}{mR} \approx -\frac{B_\theta S x}{r},$$

where  $S$  is the «shear»:  $S = r dq/q dr$ . In addition, we introduce the flux function  $\psi^*$ , so that  $\mathbf{B}^* = \mathbf{e}_\varphi \times \nabla\psi^*$ . Near the rational surface the equilibrium value of  $\psi^*$  is

$$\psi_0^* = -\frac{B_\theta S}{2r_s} x^2. \quad (19)$$

Equations (16) and (17) will not be changed if the variables  $\mathbf{B}^*$  and  $\psi^*$  are used instead of  $\mathbf{B}$  and  $\psi$ , and the derivative  $\partial/\partial z$  can be omitted when  $\mathbf{B}^*$  and  $\psi^*$  are used.

Now let us introduce the following normalized variables

$$\psi_\alpha = \frac{r_s}{B_\theta S} \psi^* \quad \text{and} \quad \varphi_\alpha = \frac{1+\tau}{\kappa\tau} \varphi.$$

Omitting the index  $\alpha$ , we obtain in place of Eqs (16) and (17)

$$\nabla\varphi \times \nabla\psi = (u - 1) \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad (20)$$

$$-\nabla(\Delta_{\perp}\psi) \times \nabla\psi = (u + \tau)\gamma_0 \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad (21)$$

where the constant

$$\gamma_0 = \frac{4\pi n T_e}{(1 + \tau) B_0^2} \left( \frac{\kappa r_s}{S} \right)^2$$

and the variable  $y$  is determined by the expression  $y = r(\theta - n\varphi/m) - uv_*t$ . The equilibrium function  $\psi_0$  is equal to  $\psi_0 = -x^2/2$ . In equations (20) and (21) and later on, only the  $z$ -component of the vector product is used in two-dimensional formulas.

Equation (20) can easily be solved:

$$\varphi = (u - 1)x + P(\psi), \quad (22)$$

where  $P(\psi)$  is an arbitrary function  $\psi$ . With the help of relation (22), Eq. (21) can be written in the form

$$\Delta_{\perp}\psi = -\gamma_0(u + \tau)x \frac{dP}{d\psi} + F(\psi), \quad (23)$$

where  $F(\psi)$  is an arbitrary function of  $\psi$ .

We shall seek a solution of these equations in the form of a periodic island chain. For this purpose we can write

$$\psi = \psi_0 + \tilde{\psi} = -\frac{x^2}{2} + \alpha \cos ky, \quad (24)$$

where  $\alpha$  is the perturbation amplitude and  $k$  is the wave number,  $k = m/r_s$ . The amplitude  $\alpha$  might itself be dependent on  $y$ , but in our approximation we can omit the higher harmonics in  $y$  — in other words we can assume that  $\alpha$  is independent of  $y$  and is a function only of  $x$ . Let us also agree to regard  $\alpha(x)$  as approximately equal to its maximum value,  $\alpha_0 = \alpha(x = 0)$  within the magnetic islands. The curves for  $\psi = \text{const}$ , including the island structure, are shown in Fig. 3. In fact, these curves represent the cross-section of the new magnetic surfaces for helical symmetry. Since the electrons and ions follow a Boltzmann distribution, we have what might be described — by comparison with simple cylindrical equilibria — as a broader class of equilibria.

Fig. 3. Structure of magnetic island chains in an axisymmetric plasma (a) and in a toroidal plasma (b)

From Eq. (24) it will be seen that magnetic islands form at the points  $ky = 2\pi\ell$ , where  $\ell$  is an integer including  $\ell = 0$ . The value of  $\psi = \psi_s$  on the separatrix (separating the islands from the toroidal magnetic surfaces) can be found as a value of  $\psi$  for  $x = 0$ ,  $ky = \pi$ :

$$\psi_s = -\alpha_0. \quad (25)$$

Accordingly, the half-width of the magnetic island,  $w$ , can be determined if

we put in Eq. (24)  $\psi = \psi_s$ , at  $y = 0$  and  $x = w$ :

$$w = 2\sqrt{\alpha_0}. \quad (26)$$

Thus, the island width increases with perturbation amplitude as the square root of the amplitude.

We need to construct a solution, at least an approximate one, of the non-linear equation (23), taking into account relation (22). In tackling this problem, it is natural first to consider the region far from the islands where a linear approximation is valid. It is more convenient to linearize Eqs (20) and (21) on the assumption that  $\tilde{\psi}$  and  $\varphi = \tilde{\varphi}$  are small quantities periodically dependent on  $y$ . Neglecting the quadratic terms, we obtain

$$x\tilde{\varphi} = (u - 1)\tilde{\psi}, \quad (27)$$

$$\Delta_{\perp}\tilde{\psi} = -\frac{u + \tau}{x}\tilde{\varphi} = -\frac{\Gamma}{x^2}\tilde{\psi}, \quad (28)$$

where  $\Gamma = \gamma_0(u - 1)(u + \tau)$ . As we can see, Eq. (28) has the form of the Schrödinger equation with a potential  $U = -\Gamma/x^2$ . Since  $\Delta_{\perp}\psi = ((d^2/dx^2) - k^2)\psi$ , our task reduces to one of seeking a bound state with energy  $-k^2$  in the potential well  $U(x)$ , which outside the island structure behaves like  $-\Gamma/x^2$ .

If  $\Gamma < 1/4$ , then in the region of small  $x$  there are no solutions with nodes, and hence we can seek a single ground state. For large  $x$ , the Laplacian  $\Delta_{\perp}\psi \rightarrow 0$ , so that our approximate solution takes the form

$$\tilde{\psi} = \alpha_0 e^{k|x|} \cos ky. \quad (29)$$

We may adopt the approximation that Eq. (28) is true for  $x$  greater than the average half-width of the island structure, i.e.  $x > w$ . If the potential  $U$  is taken to be equal to  $-\Gamma/x^2$  for  $x > w/2$ , and if for  $x < w/2$  we use the same linear equation but with  $U = 0$ , then for small  $\Gamma$  we can use the matching condition

$$\Delta' = \int_{-\infty}^{+\infty} U dx \approx -\frac{4\Gamma}{w}, \quad (30)$$

where

$$\Delta' = \frac{1}{\tilde{\psi}} \frac{d\tilde{\psi}}{dx} \Big|_{x=+\infty} - \frac{1}{\tilde{\psi}} \frac{d\tilde{\psi}}{dx} \Big|_{x=-\infty} = -2k$$

is the difference between the logarithmic derivatives of the asymptotic solutions, familiar to us from tearing mode theory. Therefore, in accordance with expression (30), the half-width of the island is defined in terms of  $\Gamma$ :

$$kw \approx 2\Gamma = 2\gamma_0(u - 1)(u + \tau). \quad (31)$$

If  $\Gamma$  is small, i.e. if the phase velocity  $u$  of the island chain is close either to the electron drift velocity ( $u = 1$ ) or to the ion drift velocity ( $u = -\tau$ ), then the islands are narrow with small  $kw$ .

More exact relationships can be obtained with the help of an approximate solution of the non-linear equation (23), taking expression (22) into account. The function  $\varphi$  should tend to zero far from the island structure, since there is no equilibrium electric field in the frame of reference we have chosen. Furthermore, since for large  $x$  the flux function tends to  $\psi_0 = -x^2/2$ , the function

$P(x)$  must be close to  $\pm(u-1)\sqrt{-2\psi}$ , where the different signs before the root refer to the regions on either side of the separatrix. Thus, in order for the root to vanish at the separatrix, the function  $P(\psi)$  must be proportional to  $\sqrt{2(\psi_s - \psi)}$ , where  $\psi_s$  is the value of  $\psi$  at the separatrix. Hence

$$\varphi = x(u-1) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2(\psi_s - \psi)}{x^2}} \right\}. \quad (32)$$

This expression refers only to the region outside the separatrix where  $\psi < \psi_s$ . Within the separatrix, we consider  $\psi = \alpha_0 \cos ky$ , so that in accordance with Eq. (22) we have simply

$$\varphi = x(u-1) \quad \text{at} \quad \psi > \psi_s. \quad (33)$$

In other words, the square root in Eq. (32) vanishes at the separatrix and continues to be zero in the region within the separatrix. Thus, we know  $P(\psi)$ , which can be inserted into Eq. (23). Within the separatrix,  $P = 0$ , so that  $\Delta_{\perp}\psi = F(\psi)$  there. In the approximation we have adopted,  $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$  within the separatrix,  $\psi = -x^2/2 + \alpha_0 \cos ky$ , so that  $\Delta_{\perp}\psi = -1 - k^2\alpha_0 \cos ky$ . Since  $\alpha_0$  is of the same order as  $w^2$  the second term in the expression for  $\Delta_{\perp}\psi$  is negligible as compared with unity at  $w^2k^2 \ll 1$  and we can put  $F(\psi) = -1$ , i.e. the equilibrium value. Outside the separatrix, where  $\psi < \psi_s$ , the expression found above for  $P(\psi)$  can be inserted into Eq. (23), as a result of which we obtain

$$\Delta_{\perp}\psi = -\Gamma \left( \frac{x}{2(\psi_s - \psi)} \right)^{1/2} + F(\psi). \quad (34)$$

Far from the island,  $\Delta_{\perp}\psi$  tends to its equilibrium value, which is equal to minus unity, so that from Eq. (34) we get an extremely simple expression for the function  $F$ , namely  $F(\psi) = -1 + \Gamma$ . Now, Eq. (23) can be used for a more exact calculation of the matching condition in Eq. (30). To find the matching condition, we integrate the right-hand side of Eq. (34) over  $x$ . The integral of the root on the right-hand side, together with the corresponding contribution in  $F$ , is equal to  $-\Gamma x_s$ , where  $x_s = 2\sqrt{\alpha_0} |\cos(k/y)|$  is the position of the separatrix. To single out the terms that are proportional to  $\cos ky$ , we average both sides of Eq. (34) with a weighting function  $\cos ky$  and integrate the left-hand side from zero to  $x$  and the right-hand side from  $x_s$  to  $x$ . In this way we find a more exact matching condition:

$$kw = \frac{16}{3\pi} \Gamma = \frac{16}{3\pi} \gamma_0 (u-1)(u+\tau). \quad (35)$$

This condition is similar to condition (31) obtained in a simple linear approximation. Relationship (35) can be interpreted as an equation for determining the magnitude of the dimensionless phase velocity  $u$ . For small  $kw$ ,  $u$  is either somewhat greater than one or somewhat less than  $-\tau$ . In other words, the phase velocity is either somewhat greater than  $v^*$  for waves travelling along the electron drift or somewhat less than  $-\tau v^*$  for waves travelling along the ion drift. The magnitude by which the phase velocity exceeds the corresponding drift velocity is proportional to  $kw$ , where  $w$  is the half-width of the island, and inversely proportional to  $\gamma_0$ , i.e. to the poloidal  $\beta_\theta$ .

When dissipation is taken into account, both types of island structure begin to evolve with time. Let us first consider the simpler case of a dense,



cold plasma which, though it bears no relationship to a tokamak plasma, is instructive from the standpoint of understanding the role of dissipation.

On the right-hand side of Eq. (6) we take into account a friction force of electrons with respect to the ions equal to  $-m_e\nu_e\mathbf{v}_e$ , where  $\nu_e$  is the average frequency of electron-ion collisions. Accordingly, on the right-hand side of Eq. (11) for the flux function  $\psi$  an additional term  $\Lambda^2\nu_e\Delta_\perp\psi$  will appear where

$$\Lambda^2 = \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} = \frac{c^2 m_e}{4\pi e^2 n}.$$

If we repeat the operations which led to the energy definition in Eq. (18), we will see that  $\mathcal{E}$  is not conserved but rather damps:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\eta \int \tilde{j}^2 \cdot 2\pi r \, dr, \quad (36)$$

where  $\eta = m_e\nu_e/(e^2n)$  is the resistivity and  $\tilde{j}$  is the perturbation of the current density:  $\tilde{j} = c\Delta_\perp\tilde{\psi}/4\pi$ . Since  $\Delta_\perp\psi \sim \Gamma\tilde{\psi}/x^2$  outside the separatrix, the right-hand side of Eq. (36) is proportional to  $\Gamma^2\alpha_0^2w^{-3} \sim w^3$ , and the energy is proportional to the square of the amplitude, i.e.  $\sim w^4$ . Accordingly, Eq. (36) leads to a permanent decrease of the island width:

$$\frac{\partial}{\partial t}(kw) = -\text{const} \cdot \Lambda^2 k^2 \nu_e. \quad (37)$$

Thus, in a dense plasma the magnetic surfaces undergo a form of self-repair as their short-wave perturbations damp with time.

In a tokamak plasma, this does not happen: the magnetic islands do not damp, but rather tend to increase with time. The point is that a tokamak plasma tends to be collisionless, and Landau damping resonance effects come into play instead of Coulomb collisions. To describe these, we have to use the Vlasov kinetic equations with self-consistent fields. As we will see, the exchange of energy between the wave and the electrons is weakened owing to the formation of a plateau on the electron distribution function in the region of electron resonance with the wave. The ion distribution function, on the other hand, is distorted very little because the transverse size of the island structure is substantially smaller than the average Larmor radius of the ions. Accordingly, one can try to describe the interaction of ions with the waves in the framework of a linear approximation.

### 3. Ion Dynamics

The linear buildup due to Landau damping on the ions can be taken into account fairly easily in the expression for density, Eq. (15), by including an additional small term. Since  $w \ll \rho$ , the ions can be treated as unmagnetized in their interaction with the wave; their distribution function is distorted very little with a single crossing of the island structure. To take account of Landau damping, the quantity  $1/T_i$  in Eq. (15) must be replaced by

$$\left\{ 1 - \frac{i\sqrt{\pi}}{kv_i} (kv_D - \omega) \right\} \frac{1}{T_i},$$

where  $v_i$  is the ion thermal velocity and  $v_D$  is the average drift velocity of the ions in the  $\theta$  direction, including both Larmor and magnetic drifts. For a wave

travelling along the ion drift direction, the oscillation frequency according to Eq. (35) is approximately equal to  $\omega \approx \omega^* \tau - kw/\beta_\theta$ . Taking into account the fact that the Larmor drift is proportional to the pressure gradient and that trapped particles make the main contribution to the  $\theta$  averaged magnetic drift, we obtain, in order of magnitude,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 2\gamma_L \mathcal{E}_\varphi \equiv A \frac{\omega_*^2}{kv_i} \left( \eta_i + \varepsilon^{3/2} - \frac{kw}{\beta_\theta} \right) \mathcal{E}_\varphi, \quad (38)$$

where  $\gamma_L$  is the linear growth rate of  $\mathcal{E}_\varphi$ ,  $A$  is a numerical factor of the order of unity,  $\eta_i = d \ln T_i / d \ln n$  and  $\varepsilon = r/R$ . If  $\beta_\theta$  is not small and the islands are fairly narrow, i.e.  $kw \ll 1$ , then the third term in the brackets in Eq. (38) is small so that the ions pump up the electrostatic part of the island structure energy.

It turns out, however, that there may be another, more powerful, mechanism of magnetic noise pumping. For this, the same island structures — now in closer contact with each other — are responsible.

Let us assume that island structures with a characteristic width  $w$  and a characteristic wave number  $k$  fill the whole cross-section of the plasma in a quite dense contiguous pattern. The perturbation of the poloidal magnetic field in each island structure is given by the relation  $\tilde{B}_\theta \sim w^2 k B_\theta / r$ . This perturbation extends over a width  $\Delta x \sim 1/k$ . The magnetic field energy density of these closely packed structures at a distance of  $\sim w$  from each other amounts to  $\mathcal{E}_\psi \sim \tilde{B}_\theta^2 / (8\pi w k) \sim w^3 k B_\theta^2 / (8\pi r^2)$ .

The energy associated with the electric field,  $\mathcal{E}_\varphi$ , is localized on a length of  $\sim w$ , since the electric potential perturbation decreases as  $1/x$  when  $x$  increases. Accordingly, we have  $\mathcal{E}_\varphi \sim nT(e\tilde{\varphi}'/T)^2$ , where  $\tilde{\varphi}'$  is the amplitude of the electric field potential perturbation. Since  $\mathcal{E}_\varphi \sim \mathcal{E}_\psi \beta_\theta / (kw)$ , we find that  $e\tilde{\varphi}'/T \sim w/a$ . For simplicity, we make no distinction here between  $T_e$  and  $T_i$ .

Let us now consider an ion with a Larmor radius  $\rho \sim v_\perp / \omega_{ci}$ . In its motion over the Larmor circle, this ion intersects  $N = \rho/w$  island structures. At each of these island structures the ion may receive a momentum increment along the  $y$  axis of the order of

$$m_i \Delta v \sim \frac{ke\tilde{\varphi}'w}{v_\perp}, \quad (39)$$

where  $w/v_\perp$  is the time of crossing the structure and  $ke\tilde{\varphi}'$  is the electric field perturbation. Owing to a change in the magnitude of the perpendicular  $y$  component of the velocity, the centre of the Larmor circle is shifted by  $\sim \Delta v / \omega_{ci}$ . We take  $\omega^*$  as the characteristic frequency of the oscillations we are considering. Since the interaction phase persists for a time  $\Delta t \sim 1/\omega^*$ , in multiple crossings of a given island structure over a time  $\Delta t \sim 1/\omega^*$  the ion accumulates a total shift  $\delta$ , which is  $\omega/\omega^*$  times greater than in the case of a single passage across the island:

$$\delta \sim \frac{\omega_{ci}}{\omega^*} \frac{e\tilde{\varphi}'}{m_i v_\perp} \frac{kw}{\omega_{ci}}. \quad (40)$$

This shift is produced by a single island structure. In fact, the ion interacts not with a single structure but with  $N = \rho/w$  neighbouring structures. If the partial shifts are not phased, they can be considered as random shifts, so

that the total shift of the ion along the  $x$  axis will amount to  $\delta_* \approx \delta \cdot N^{1/2} = \delta(\rho/w)^{1/2}$ . The phenomenon of accumulation of the many single shifts is very important; the total shift does not decrease strongly with the wave number, so that even the very short wavelength patterns can play an important role in plasma transport.

If we have  $N = \rho/w$  waves with the mean oscillation frequency  $\omega^*$  and with a frequency difference of the same order of magnitude, we can consider this pattern as a quasi-periodic process with a very large period,  $\Omega^{-1}$ , where  $\Omega = \omega^*/N$ . The time  $\Omega^{-1}$  is  $N$  times greater than  $\omega_*^{-1}$ . If the shifts are again summed in a random fashion, the maximum shift  $\delta_{\max} = \delta_* N^{1/2}$  will be

$$\delta_{\max} = N\delta = \frac{\rho}{w} \delta \approx a \frac{e\tilde{\varphi}'}{T} \sim w. \quad (41)$$

Here we have assumed that the drift velocity  $\omega^*$  is of the order  $kT/(m_i\omega_{ci}a)$ .

We see that in a quasi-periodic perturbation with a frequency  $\Omega$  the ion is shifted over a distance  $\sim w$ . Hence, in a time  $\Omega^{-1}$  the ion is shifted by the width of the island structure and can enter a different non-linear resonance. In other words, Chirikov's stochasticity criterion is marginally fulfilled. Accordingly, in a system of densely packed island structures the ions can undergo stochastic diffusion across the magnetic field. Since the ions are marginally stochastic, the corresponding mechanism of diffusion and ion thermal conductivity is very sensitive and can be easily self-regulated by the degree of contact among the island structures — in other words, for a given arrangement of the island structures, by the perturbation amplitude  $\psi$ .

The process with frequency  $\Omega = \omega^*/N$  is extremely slow and, for this reason, each ion retains its adiabatic invariant on average. Consequently, in a homogeneous magnetic field the transverse ion energy is conserved (the longitudinal energy remains unaffected in this process). If the field is inhomogeneous, then a shift towards the weaker field diminishes the ion energy, so that the ion may transfer a part of its energy to the waves. In other words, a shift of ions towards increasing major radius leads to pumping of the island structure energy.

Let us consider this pumping mechanism in greater detail. If the island structures are touching each other, each island can deviate with respect to the  $y$  axis by a small angle  $\gamma$ . Then, simultaneously with the shift along the  $x$  axis, the ion will be shifted along the  $y$  axis as well. As a result, the time of interaction with the island structure changes and becomes equal to  $\Delta t \sim (1 + \gamma k\delta)/\omega^*$ , where  $\gamma\delta$  is the shift along the  $y$  axis. Correspondingly, the value of the shift in expression (40) changes and becomes equal to

$$\delta \sim \frac{kw}{\omega^*} \frac{e\tilde{\varphi}'}{m_i v_{\perp}} (1 + \gamma k\delta). \quad (42)$$

When  $\gamma \neq 0$ , a systematic ion shift in the radial direction occurs, which means that the ions themselves will sustain an average value of  $\gamma$  such that pumping of magnetic field perturbations takes place. Since  $\gamma$  is small, we can find at first a linear part of  $\delta$  and then insert the value thus found in additional brackets, evaluating the quadratic term. Its mean value corresponds to a systematic ion drift along the  $x$  axis for a time  $1/\omega^*$ .

The shift defined by expression (42) relates to a single island structure, whereas the ion, in its motion along the Larmor circle, intersects  $N = \rho/w$

such structures. Thus, the total systematic ion flux is defined by the relation:

$$n\langle v \rangle \approx n\omega^* N\langle \delta \rangle \approx \gamma \kappa k^2 w^3 v_i n, \quad (43)$$

where  $\kappa = -(1/n) dn/dr$  comes from the expression for  $\omega^*$ , and  $v_i$  is the mean thermal velocity of the ions.

The flux  $n\langle v \rangle$  is directed along the major radius (see Fig. 3(b)). Accordingly, the islands are tilted in such a way that  $\gamma$  has opposite signs on the inward and the outward contours (see Fig. 3(b)). In other words,  $\gamma$  varies as  $\cos \theta$ . This means that, to be continuous,  $\gamma = \gamma_a \varepsilon \cos \theta$ , where  $\varepsilon = r/R_0$ . If we are seeking an average value of the flux  $\Gamma_n$  through a toroidal surface of radius  $r$ , then  $\langle v \rangle$  has to be averaged with a weighting function  $(1 + \varepsilon \cos \theta)$  in order to take into account the  $\theta$  dependence of the surface element  $dS = 2\pi R r d\theta = 2\pi R_0(1 + r \cos \theta/R_0)r d\theta$ . Accordingly, we obtain

$$\Gamma_n = \langle (1 + \varepsilon \cos \theta) n\langle v \rangle \rangle_\theta \approx \frac{\varepsilon^2}{2} \gamma_a \kappa k^2 w^2 v_i n. \quad (44)$$

Although the flux  $\Gamma_n$  was found to be proportional to the density gradient, as  $n\kappa = -dn/dr$ , it is still more proper to speak not of diffusion but of free convection of the plasma.

The flux defined in Eq. (44) transfers not only particles but also ion thermal energy. The expression for the heat flux  $\Gamma_i$  takes a form similar to Eq. (44):

$$\Gamma_i = \frac{\varepsilon^2}{2} \gamma_i \kappa k^2 w^3 v_i n T_i, \quad (45)$$

where the coefficient  $\gamma_i$  allows for the fact that the heat flux can be greater than the particle flux, so that  $\gamma_i$  can be greater than  $\gamma_a$ . Furthermore, the product  $\gamma_i \kappa$  can depend on the temperature gradient.

When the ions are shifted along the major radius, their transverse energy diminishes as  $1/R$  owing to conservation of the transverse adiabatic invariant. For this reason, the flux defined in expression (43) is responsible for noise pumping with a power

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \approx \frac{n T_i \langle v \rangle}{R} \approx \gamma_i \frac{r \kappa}{R^2} k^2 w^3 v_i n T_i. \quad (46)$$

This expression replaces the linear pumping term in expression (38). The energy pumping in Eq. (46) must be correlated with momentum pumping. The wave momentum can be obtained by dividing the wave energy by the phase velocity  $v_\phi = -\omega^* \tau / k = -v^* \tau$ . Accordingly, the momentum pumping is equal to  $[-1/(v^* \tau)] \partial \mathcal{E} / \partial t$ . With wave momentum pumping the ions experience a reaction force directed opposite to the rotation of the island structure, which in fact means that a friction force is acting upon them. As a result, an ion flux  $\Gamma_n$  appears, since the friction force acting on the ions is balanced by the Lorentz force  $-e B c^{-1} \Gamma_n$ . From the momentum balance condition  $[-1/(v^* \tau)] \partial \mathcal{E} / \partial t = -e B c^{-1} \Gamma_n$ , taking into account expressions (45) and (44), we find  $\gamma = \gamma_a r \kappa / 2$ . Since all the expressions are very approximate, we can simply say that  $\gamma_i \sim \gamma_a$ . In other words, the ion heat flux is of the order of the convection flux:  $\Gamma_i \sim T_i \Gamma_n$ .

#### 4. Electron Dynamics

Let us now consider the behaviour of the electrons. To describe them, we can use a drift kinetic equation:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\parallel}(\mathbf{b} \cdot \nabla)f + \mathbf{b} \cdot \left( \frac{c}{B} \nabla\varphi' \times \nabla f \right) = \frac{e}{m_e} E_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}}. \quad (47)$$

Here again, only the  $z$ -component of the vector product is used;  $f$  is the electron distribution function with respect to the longitudinal velocity  $v_{\parallel}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ , and  $E_{\parallel}$  is the longitudinal component of the electric field:

$$E_{\parallel} = \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathbf{b} \cdot \nabla \varphi'.$$

For helical symmetry, the expression  $\mathbf{b} \cdot \nabla$  again becomes equal to  $(\mathbf{B}^*/B) \cdot \nabla$ , and we can use  $\psi^*$  instead of  $\psi$ , dropping the index asterisk again.

Let us use a frame of reference rotating with the phase velocity of the wave,  $v_{\phi}$ . Then, introducing the helical momentum  $P = mv_{\parallel} + (e/c)\psi$ , we can express the kinetic equation (47) in a simpler form:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (\nabla H \times \nabla f) \cdot \mathbf{b}, \quad (48)$$

where  $f$  is considered as a function of  $P$  and the Hamiltonian  $H$  is

$$H = \frac{c}{2m_e e B} \left( P - \frac{e}{c} \psi \right)^2 - \frac{c}{B} \varphi' + x v_{\phi}. \quad (49)$$

According to the Eq. (48), the electrons move along the lines  $H = \text{const}$ , keeping  $P = \text{const}$ . We see that island structures are also formed on the drift surfaces near the resonance points where  $\omega = k_{\parallel} v_{\parallel}$  (Fig. 4). Since the longitudinal wave number  $k_{\parallel}$  has opposite signs on opposite sides of the point  $r = r_s$ , drift

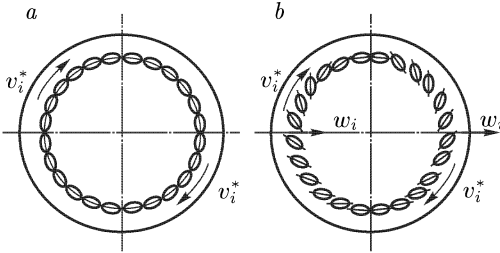


Fig. 4. Magnetic island chain (the solid lines correspond to  $\psi = \text{const}$ ) and drift islands (dotted lines)

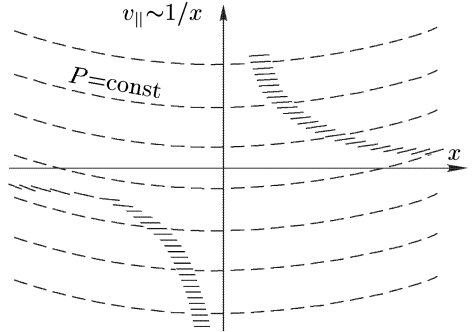


Fig. 5. Plateau formation on the electron distribution function in phase space. The plateau develops along the dotted lines  $P = \text{const}$

islands appear on electrons having different signs of  $v_{\parallel}$  on opposite sides of the resonance point. On the drift islands, plateau-type distributions at  $P = \text{const}$  are easily formed (Fig. 5), which in a rarefied plasma do not have time to dissipate through collisions. Hence, the formation of a single island structure is not prevented by electron damping.

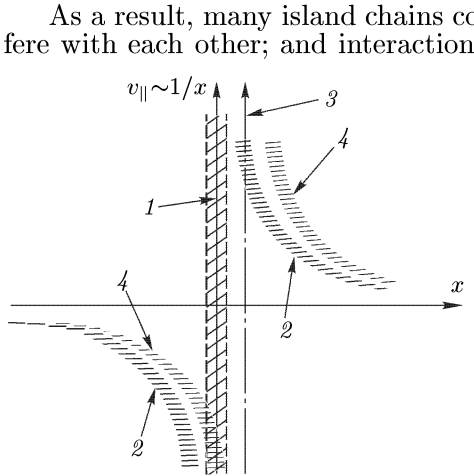


Fig. 6. Contact between the plateaus of two neighbouring island chain in phase space. 1 — rational surface and island chain (hatched area) of the first wave; 2 — plateau on  $f_e(v_{||})$ ; 3 — second rational surface; 4 — plateau formation due to the second island chain

As a result, many island chains continue to grow until they begin to interfere with each other; and interaction between the island chains via electrons begins only when they touch each other. As is shown in Fig. 6, contact between the drift islands can be established for all values of  $v_{||}$ , if  $\kappa w \ll 1$ . Once the drift surfaces are in contact, the electron drift trajectories become stochastic and the electrons become able to transfer a longitudinal momentum across the plasma. Hence, anomalous resistivity  $\eta_a$  appears which leads to the saturation of island structure growth by ion pumping. As a matter of fact, it would be more correct to speak not of resistivity but of viscosity, because the averaged resistivity related to the averaged current density remains the same. The anomalous resistivity  $\eta_a$  can be evaluated if we assume that an anomalous collision frequency  $\nu_a$  appears:

$$\nu_a \approx k_{||} v_e \approx \frac{v_e}{qR} k w.$$

Now we can estimate the magnetic diffusion coefficient:

$$D_a = \frac{c^2 \eta_a}{4\pi} = \Lambda^2 \nu_a \sim \Lambda^2 k w \frac{v_e}{qR}.$$

We can find a more accurate value for  $\eta_a$  in the linear approximation:

$$\eta_a = \frac{m_e}{e^2 n} \sqrt{\frac{\pi T_e}{2m_e}} \cdot |k_{||}|.$$

This expression would be true if a Maxwellian electron velocity distribution were restored fairly quickly either by collisions or by exchanges of electrons between neighbouring island structures.

Let us now write the total energy balance, first with linear ion pumping (38):

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 2\gamma_L \mathcal{E}_\varphi - \frac{v_e}{qR} F_e \mathcal{E}_\psi. \quad (50)$$

Here,  $\gamma_L$  is a linear growth rate, and with the factor  $F_e = \Lambda^2 k^2 F'_e$ , where  $F'_e < 1$ , we have taken into account the possibility of self-adjustment of wave damping by the electrons: the factors  $F_e$  and  $F'_e$  may be very small, but with increasing oscillation amplitude and closer contact between the islands the factor  $F_e$  increases. Since the factor  $F_e$  is capable of self-adjustment, it automatically establishes itself at a value such that the island structures are maintained in a steady state (on average). Thus, even with weak ion wave pumping the broken magnetic field symmetry in a tokamak plasma is maintained, i.e. the magnetic surfaces break down to a slight extent, being filled with a large number of helical magnetic structures. This pattern looks like one previously described by Rebut et al. [10, 11] using qualitative arguments.

Since the islands are formed by current filaments located on both sides of each island outside the separatrix, it is fair to say that the plasma is filled with a huge quantity of current filaments. These filaments are arranged in such a way that the currents flow parallel to the lines of force on the rational magnetic surfaces  $q(r) = m/n$ , where the island centres are located. Note that the current filaments are located not inside the magnetic islands but in a layer with a thickness of the same order as the island width, i.e.  $w$ . Since the currents in the plasma are screened over thicknesses of the order of  $\Lambda$ , there exists a minimum dimension of island width, i.e.  $w \geq \Lambda$ . Let us note further that the longitudinal phase velocity of the waves,  $\omega_* \tau / k_{\parallel}$ , is extremely large on the resonance surface  $k_{\parallel} = 0$  and becomes of the order of the thermal electron velocity only at a distance  $x \geq \rho_{\theta}$  from the resonance surface (where  $\rho_{\theta}$  is the electron Larmor radius in the poloidal magnetic field). Only at this distance does the mechanism of island structure damping by electrons come into play; the quantity  $\nu_a$  can be considered zero at  $x < \rho_{\theta}$ . Consequently, very small structures with  $wk < 1$  and  $k\Lambda > 1$  show extremely weak damping even in the linear approximation, i.e. without any allowance for the plateau effect in phase space on the electron distribution function. Summing up, we can say that the magnetic structure is generated in such a way as to enable the electrons at any moment to switch on the anomalous transport mechanism.

### 5. Physics of Transport

The breakdown of magnetic symmetry and the formation of a large number of mutually contiguous helical structures leads to anomalous electron heat conduction. Using  $w$  for the mean width of the structures, the anomalous thermal conductivity can be evaluated as  $\chi_e \sim \nu_a w^2$ . With  $k$  being the mean wave number of the island structures, the thermal conductivity of the electrons can be written in the form

$$\chi_e = w^3 k \cdot \Phi_e \frac{v_e}{qR}, \tag{51}$$

where the tuning factor  $\Phi_e$  takes account of the degree of contact among the island structures.

Let us first consider the case of weak contact, which can occur with linear wave pumping by the ions. In fact, since the drift frequency  $\omega^*$  is small, the linear pumping in Eq. (50) is also small and a steady state is reached for  $F_e \ll 1$  when the island structures are just beginning to come into contact with each other. The factor  $\Phi_e$  in Eq. (51) is correspondingly small. Let us try to estimate it.

For this purpose we assume that in toroidal geometry a stochastization of the lines of force near the separatrix occurs in a layer comprising a fraction  $\varepsilon = r/R$  of the island width  $w$ . If an exchange of electrons between neighbouring island structures were to take place in this layer, then both heat and longitudinal momentum could be transferred across the field. The cross-field transport involves preferentially slow passing electrons which carry practically no longitudinal momentum. The fraction of such electrons is  $\sim \sqrt{\varepsilon}$ . If we accept that  $kw \sim 1$ ,  $w^2 \sim 4\pi\Lambda^2 \sim 1/(r_0n)$ , we get the following estimate:

$$\chi_e \sim \varepsilon^{3/2} \frac{v_e}{qR} \frac{1}{nr_0}, \tag{52}$$

where  $v_e = \sqrt{2T_e/m_e}$ , and  $r_0 = e^2/(m_e c^2)$  is the classical electron radius. This quantity is close to the empirical expression obtained on T-11 [12] and is in line with the formula for  $\chi_e$  suggested by Ohkawa [13]. The transport of longitudinal momentum affects those electrons which carry the momentum, i.e. those with a longitudinal velocity  $v_{\parallel} \sim v_e$ . For these electrons there may be a very small transverse exchange and the factor  $F_e$  in Eq. (50) can then have a value substantially less than  $\Phi_e$ . Variations in the factor  $F_e$  will not affect the heat transport described by relation (52) which is associated exclusively with slow passing electrons.

Expression (52) corresponds to the minimum level of electron transport in a fairly quiet plasma, albeit one with slightly distorted magnetic field symmetry.

When the magnetic surfaces are only slightly disturbed, the ion dynamics are not very strongly modified. Thus, together with the scaling in Eq. (52) we would expect neoclassical ion heat conductivity to accompany electron thermal conductivity of the T-11 level. A regime of this kind corresponds to neo-Alcator scaling of a tokamak plasma with Ohmic heating.

There may be another more powerful mechanism of transverse transport which is naturally linked with L-mode confinement. This mode is created by the same island structures, but with closer contact. To understand the physics of this more powerful transport regime, we must take into account the more powerful pumping of magnetic perturbations by the mechanism described in Section 3.

With new pumping, the magnetic noise energy balance equation takes the form

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = F_i \frac{r v_i}{R^2} k^2 w^2 n T - F_e \frac{v_e}{q R} \frac{w^3 k}{r^2} \frac{B_\theta^2}{8\pi}, \quad (53)$$

where  $F_i = \gamma_i \kappa w$  is a small ion control factor, and  $v_i$  and  $v_e$  are the ion and electron thermal velocities.

With high pumping power we may assume that the islands are pumped up to a level  $wk \sim 1$ . In this approximation, with the help of Eq. (53), we get an estimate of the characteristic island width:

$$\frac{w^2}{\gamma^2} \approx \frac{F_i}{F_e} \frac{q r}{R} \beta_\theta \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}. \quad (54)$$

The ratio  $F_i/F_e$  depends implicitly upon  $k$  and  $w$ . However, relying on experimental data, we can accept that this dependence is weaker than the strong sensitivity of  $F_i/F_e$  to the level of stochastization. In this approximation,  $F_i/F_e$  can be considered as a tuning factor. Substituting this value for  $w^2$  in the electron thermal conductivity expression, we obtain

$$\chi_e = \Phi_e \frac{v_e}{q R} w^2 = \mu_e \frac{v_i}{R^2} r^3 \beta_\theta. \quad (55)$$

Here, the factor  $\mu_e = F_i \Phi_e / F_e \ll 1$ , since  $F_i$  is a small parameter. If the electron loss channel dominates, we can estimate the energy confinement time as  $\tau_E \sim 4a^2/\chi_e$ , where  $a$  is the plasma minor radius and  $\chi_e$  is some averaged value of the electron thermal conductivity. With the help of the energy balance equation,  $3nTV = P\tau_E$ , where  $V$  is the plasma volume and  $P$  is the power loss, we can express  $\tau_E$  through the plasma parameters:

$$\tau_E = CIR^{1,5} a^{-0,5} P^{-0,5} A_i^{0,25}, \quad (56)$$



where  $I$  is the plasma current and  $A_i$  is the atomic mass number. The factor  $C$  is a slowly varying function of some of the plasma parameters and can be considered approximately as a constant.

The scaling in Eq. (56) is similar to the so-called L-mode of confinement. Thus, the stochasticized ion regime corresponds to the L-mode of magnetic plasma confinement. According to expression (54), the island width  $w$  in an L-mode regime is a certain fraction of  $a$ . If the plasma density decreases, the length  $\Lambda$  increases and at some density value the relationship  $\Lambda \ll w$  will no longer hold true. From this density value downward, neo-Alcator scaling is valid (this transition was discussed in Ref. [14]).

## 6. Discussion

We have shown that a spontaneous breakdown of magnetic symmetry takes place in a (practically collisionless) high temperature tokamak plasma. This breakdown of symmetry looks like plasma self-organization: magnetic island chains fill the whole plasma crosssection and are in contact with each other. The transverse size of these islands is much smaller than the mean ion Larmor radius but larger than the electron Larmor radius.

Both ions and electrons are marginally stochastic in such a pattern. The magnetic noises are maintained by the ions owing to their convection in the direction of the weaker magnetic field. As they are essentially stochastic, the ions can pump island structures propagating in the direction of the ion magnetic drift.

Both ions and electrons can tune their levels of transport, so that this mechanism is very sensitive to the profiles, boundary conditions and so on. This is why I have deliberately avoided trying to find, theoretically, a numerical factor  $C$  in expression (56) for the scaling. The great sensitivity of transport to external influences provides a clue to understanding why almost the same expressions — similar to expression (56) here — are valid from both L- and H-modes of confinement.

The most plausible explanation for L–H transition is based [15–18] on the idea of boundary plasma stabilization by differential rotation, which can damp the edge plasma turbulence. The edge plasma becomes quieter, and this effect can diminish the bulk plasma transport if it is sensitive to external noise pumping.

Another result which follows from the mechanism proposed above is the possibility of transition from scaling with auxiliary heating to neo-Alcator scaling when the density decreases (see Eq. (52)). Neo-Alcator scaling is, so to say, the best mode of confinement which can be realized with the quietest plasmas. This conclusion may shed some light on other modes of improved confinement.

## Appendix

The paper contains many qualitative statements, and some of the readers would probably like to become acquainted with a more quantitative approach. The detailed computations are somewhat formidable, but the general line of quantitative reasoning can be elucidated without difficulties.

Suppose that some ion crosses a very narrow single island chain at the angle  $\xi$  with the  $x$  axis. We assume for the moment that the wave phase velocity is negligibly small so that the island structure can be considered a stationary one. In this approximation the ion energy is conserved so that the absolute value of the ion velocity does not change. The velocity vector deviates simply from the initial direction by some small angle so that the guiding centre position is shifted along the velocity direction by the value

$$\boldsymbol{\delta} = \int \frac{c}{B^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B} dt. \quad (\text{A.1})$$

Here, only the component transverse to the  $\mathbf{v}$  direction of the electric field is important. Thus, the  $x$  and  $y$  components of displacement are related with each other as  $\delta_y = \delta_x \operatorname{tg} \xi$ .

It is easy to show that the ion velocity change is equal to  $\delta \mathbf{v} = \omega_{ci} \mathbf{e}_\phi \times \boldsymbol{\delta}$ , where  $\mathbf{e}_\phi$  is the unit vector along the magnetic field direction. The velocity change can be expressed in terms of the change of the angle  $\xi$  by the relation  $\delta \mathbf{v} = \Delta \xi \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{v}$ . Therefore, we have  $\boldsymbol{\delta} = -\omega_{ci}^{-1} \mathbf{v}_\perp \Delta \xi$ .

If the wave phase velocity  $\mathbf{v}_\phi$  is not zero, then the ion energy is conserved in the frame of reference moving with the phase velocity. In the laboratory frame of reference, the ion energy  $\mathcal{E}$  changes by the amount  $\delta \mathcal{E} = \mathbf{v}_\phi \delta \mathbf{v}$ . For the island structure propagating along the  $y$  axis, the ion energy change  $\delta \mathcal{E} = \omega_{ci} v_\phi \delta x$  is negative at  $\delta x > 0$ , i.e. for outside displacement, because  $v_\phi < 0$ .

An analytical expression for the ion displacement can easily be found for the case of very narrow islands,  $kw \ll 1$ . We can use the linear approximations (27) and (29) for normalized functions. Then the integral (A.1) along the trajectory  $y = y_0 + x \operatorname{tg} \xi$  is equal to:

$$\delta_x = A_1 \cos ky_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k|x|} \sin(kx \operatorname{tg} \xi)}{x \cos \xi} dx. \quad (\text{A.2})$$

We have left here an even part with respect to the  $x$  variable

$$A_1 = \alpha_0 k \frac{\kappa \tau (u - 1)}{v_\perp (1 + \tau)}.$$

The order of magnitude of  $A_1$  is approximately  $w^2 k \rho_i a^{-1} \ll w$ . Expression (A.2) has to be smoothed near the points  $\xi = \pm \pi/2$  where  $|\cos \xi|$  becomes less than  $kw$  and the approximation of very narrow islands is not valid.

According to Eq. (A.2), the displacement  $\delta_x \sim \cos ky_0$  or, more precisely,  $\delta_x \sim \cos(ky_0 - \omega t)$ . As we see, expression (A.2) is an odd function of  $\sin \xi$ , so that the hot plasma displacement obtained by averaging over many ions with different values of  $\xi$  becomes zero, and the same conclusion is valid for the energy.

Now let us take into account the toroidal corrections. The most important toroidal term appears in the continuity equation (5) after the insertion of the electron velocity expression from Eq. (6). A new term now appears which is absent in the cylindrical case; this term is proportional to  $\varepsilon = r/R$ . It can be treated in a linear approximation. The electron temperature perturbation can be found with the help of the linearized relation  $\mathbf{B} \cdot \nabla T_e = 0$ . As a result,

Eq. (21) is modified as follows:

$$-\nabla(\Delta_{\perp}\psi) \times \nabla\psi = (u + \tau)\gamma \frac{\partial\varphi}{\partial y} - f_{\varepsilon} \left( \cos\theta \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right), \quad (\text{a.3})$$

where  $f_{\varepsilon} = 2(1 + \tau)(u - 1 - \eta_e)/(\kappa R(u - 1))$  is a small factor of the order of  $\varepsilon$ ;  $\eta_e = d \ln T_e / (d \ln n)$

There are additional small terms in Eqs (20) and (21). Retaining all of them and performing the corresponding calculations is somewhat cumbersome. But a qualitative discussion is easy.

The electric potential in the case of an island chain in a straight cylinder is indicated by  $\varphi^0$ . In the linear approximation,  $\varphi^0$  is proportional to  $x^{-1} \cos ky$ , i.e. it is an odd function of  $x$ . We see from the structure of Eq. (A.3) that the electric potential has a toroidal correction,  $\varphi_{\varepsilon} = \varepsilon C_{\varepsilon} \sin\theta \sin ky$ . Here the factor  $C_{\varepsilon}$  is an even function of  $x$ . Thus, the new  $\varphi = \text{const}$  contours correspond to tilted islands similar to the ones shown in Fig. 3, but with a different symmetry: the whole pattern is rotated by the angle  $\Delta\theta = \pi/2$ . Thus the angle  $\gamma$  (do not confuse with the factor  $\gamma$  in Eq. (A.3)) is not zero and there is local energy exchange between ions and islands. However, when the energy exchange is averaged over  $\theta$ , it becomes zero because of the  $\gamma \sim \sin\theta$  dependence instead of the  $\gamma \sim \cos\theta$  dependence needed for islands pumping. In other words, the effect of  $\gamma \sim \sin\theta$  produces an additional ballooning-type toroidal distortion of the island structure but does not lead to net buildup or decay of the islands.

The conclusion is not changed when the toroidal drift of ions is taken into account. Thus, a single island chain is stationary in time, i.e. the net ion pumping mechanism is absent.

Now let us consider a family of neighbouring island chains. These chains can interact and produce an induced perturbation of the tilt angle  $\gamma$ . The largest effect occurs when the  $k$  numbers of neighbouring chains are close to each other. In this case, the perturbations have harmonics with low azimuthal numbers. We are interested in the harmonic  $\delta\gamma \sim \cos\theta$  because this harmonic provides the net input to the fluxes (44) and (45) and the pumping of noise energy.

The initial angular dependence of  $\gamma(\theta)$  has a  $\sin\theta$  dependence, so that the perturbation  $\delta\gamma \sim \cos\theta$  seems to be the result of the rotation of the initial pattern over some small angle  $\delta\theta$ . It is clear that in the case of a homogeneous magnetic field such a turn cannot provide a net ion response. However, if the toroidal drift of ions is taken into account, the situation is changed. Indeed, when  $\gamma \neq 0$ , there is a local average drift of ions which has a component along the minor radius. This effect can be simulated with the help of a driving field with an azimuthal component  $E_{\theta}^*$ .

For the case of  $\gamma \sim \cos\theta$ , the driving field also appears to have a  $E_{\theta}^* \sim \cos\theta$  dependence. This dependence corresponds to  $\mathbf{E}^* = \text{const}$ , so that the ions are subject to drift along the major radius having the same direction at  $\theta = 0$  and  $\theta = \pi/2$ . This drift is accompanied by an energy change as a result of the work done by the toroidal drift on the  $\mathbf{E}^*$  field. It is easy to check that the adiabatic ion invariant is constant during this motion. The resulting picture corresponds exactly to the one displayed in Fig. 3(b).

When  $\gamma$  varies in time, both pumping and decay of islands can be present. It is reasonable to assume that some average value of  $\gamma \neq 0$  is maintained

which will support permanent pumping of the island structures. Thus, we can conclude that island chain pumping by ions is a collective phenomenon related to the interaction of island chains as well as to stochastic motion of ions. The magnetic field inhomogeneity is an important background for this activity.

The author is grateful to Dr. O.P. Pogutse, discussions with whom helped very much in clarifying the particle dynamics associated with a distorted magnetic field in tokamaks.

### References

1. Goldston R.L. // Plasma Phys. Control. Fusion. 1984. V. 26 P. 87.
2. Uckan N.A., and ITER Physics Group. // ITER Physics Design Guidelines: 1989. IAEA, Vienna, 1990.
3. Yushmanov P.N., Takizuka T., Riedel K. et al. // Nucl. Fusion. 1990. V. 30 P. 1999.
4. Post D.E., and ITER Physics Group. // ITER Physics. ITER Documentation Series. IAEA, Vienna. 1990. No. 21,
5. Kadomtsev B.B., Pogutse O.P. // JETP Lett. 1973. V. 65 P. 575 (in Russian).
6. Rosenbluth M.H., Monticello D.A., Strauss H.R., White R.B. // Phys. Fluids. 1976. V. 19. P. 1987.
7. Carrera R., Hazeltine R.D., Kotschenreuther M. // Phys. Fluids. 1986. V. 29. P. 899.
8. Scott B.D., Hassam A.B. // Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 90.
9. Smolyakov A.I. // Fiz. Plazmy. 1989. V. 15 P. 1153 (in Russian); Sov. J. Plasma Phys. 1989. V. 15 P. 667.
10. Rebut P.H., Brusati M. // Plasma Phys. Control. Fusion. 1986. V. 28 P. 113.
11. Rebut P.H., Brusati M., Hugon M., Lallia P. // In Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1986 (Proc. 11th int. Conf. Kyoto, 1986). IAEA, Vienna, 1987. V. 2. P. 187.
12. Vlasenkov V.S., Kulygin V.M., Leonov V.M. et al. // In Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1976 (Proc. 6th int. Conf. Berchtesgaden, 1976). IAEA, Vienna, 1977. V. 1. P. 85.
13. Ohkawa T. // Phys. Lett. 1978. V. A 67. P. 35.
14. Kadomtsev B.B. // Comments Plasma Phys. Control. Fusion. 1985. V. 9. P. 222.
15. Itoh S.-I., Itoh K. // Nucl. Fusion. 1989. V. 29. P. 1031.
16. Taylor R.J., Brown M.L., Fried B.D. et al. // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 2365.
17. Burrell K.H., Carlstrom T.N., Doyle E.J. // Phys. Fluids. 1990. V. B 2.P. 1405.
18. Hinton F.L. // Thermal Confinement Bifurcation and the L- to H-mode Transition in Tokamaks. Rep. GA-A20151. General Atomics. San Diego, CA, 1990.

## SELF-ORGANIZATION AND TRANSPORT IN TOKAMAK PLASMA \*)

Tokamak plasma transport is viewed as a phenomenon of self-organization. Nonlinear relations between fluxes and gradients provide a variety of confinement modes and profile resilience.

### Introduction

Cross-field tokamak plasma transport is a complicated physical phenomenon. It is definitely quite different from the neoclassical picture based on binary Coulomb collisions of charged particles. And it is more complicated than that predicted by the so-called «standard» model of plasma turbulence, transport and confinement [2, 3].

The «standard» model of turbulence assumes that the «local» plasma instabilities are driven by the release of the local free energy associated with the plasma pressure, temperature and other gradients. The collective instabilities grow from thermal noise and then saturate due to nonlinearities. The saturated plasma turbulence produces local transport effects which can be incorporated into balance equations to find the profiles of plasma density, temperature, etc., in the plasma.

Thus the «standard» model assumes the existence of definite relations between the local fluxes and gradients. In other words the role of theory is to derive kinetic coefficients replacing neoclassical ones.

But many experiments show that such a rigid set of relations between the fluxes and gradients does not exist. The full picture is much more complicated. Two phenomena demonstrate this fact most strikingly: the existence of different modes of confinement and «profile resilience».

The existence of different confinement modes shows that with the same external parameters the plasma itself can choose the appropriate set of profiles and boundary conditions with the corresponding adjustment of the confinement features.

This, phenomenon of solution branching is well known in nonlinear problems.

We can say that the plasma confinement experiments have revealed the existence of complicated feedback couplings between the transport fluxes and the profiles. This strong coupling is demonstrated most clearly by the «profile

---

\*) Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion. 1992. V. 34. № 13. P. 1931–1938.

consistency» effect, i. e. the resilience of profiles with respect to variations of the profiles of external heating power deposited in the plasma.

Thus we can say that the transport in a tokamak plasma is closely related to the plasma self-organization phenomenon.

## Modes of Confinement

It is well known that the tokamak plasmas display many different modes of confinement. This may lead to the impression that no conformity of confinement laws exists at all. This is clearly not so. To display the hidden regularity it is reasonable to use the extremely simplified picture of Fig. 1. It shows schematically the energy confinement time dependence upon plasma density for different modes of confinement.

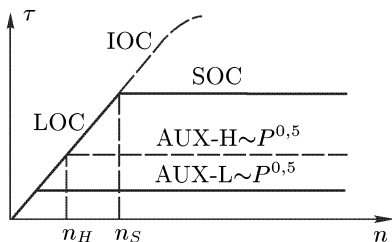


Fig. 1. Simplified scheme of the different confinement modes. The LOC-IOC line (Linear Ohmic Confinement plus improved Ohmic Confinement) corresponds to the best experimental confinement. Saturated Ohmic Confinement (SOC) and Auxiliary Heating Confinements show degradation with power

The continuous line LOC-SOC corresponds to the ordinary Ohmic confinement mode. It consists of two parts: Linear Ohmic Confinement (LOC) and Saturated Ohmic Confinement (SOC). The LOC part relates to the neo-ALCATOR scaling. It is dominated by the electron loss channel. At  $n = n_S$ , saturation with density takes place, so that at higher densities  $\tau_E$  is almost independent of the value of the density  $n$ .

The SOC branch can be improved by appropriately influencing the boundary plasma. The corresponding mode of confinement was called improved Ohmic Confinement (IOC) mode. When additional heating is applied the plasma confinement degrades. It is more precise to say that this degradation begins already in the SOC mode: additional heating reveals this degradation more clearly simply by means of its amplification.

The most typical mode of confinement with auxiliary heating, hence, is the so-called L mode. It is shown in Fig. 1 by the continuous line AUX-L. In rough approximation the AUX-L line can be considered to be the SOC line decreased by the factor  $(P_{OH}/P)^{0.5}$ , where  $P_{OH}$  is the Ohmic heating and  $P$  is the total heating power. This simple relation is known as T-10 scaling. As we see in Fig. 1, the density value at which the transition to the saturated L-mode regime occurs, diminishes as compared with  $n_S$ , viz.  $n \sim (P_{OH}/P)^{0.5}$ . Thus, with the increase of auxiliary heating power the region of the LOC scaling shrinks.

The most attractive modes of tokamak plasma confinement are the H mode and VH mode: H means «high», VH means «very high». The corresponding energy confinement time values are two to three times higher than for the L mode,

so that the corresponding AUX-H line in Fig. 1 is correspondingly higher than the AUX-L line.

If the L-H transition occurs at a density lower than  $n_H$  (see Fig. 1), it is observed that the LOC mode, corresponding to neo-ALCATOR scaling, is restored. But at  $n > n_H$  the AUX-H mode corresponds again to a saturated dependence upon density and the LOC confinement is not restored. If the transition to the enhanced mode happens at not very high additional power, or even at Ohmic heating power, then the predicted AUX-H line can be situated higher than the SOC-line. Thus, the corresponding enhanced mode looks like an IOC or ohmic H-mode.

For the H-mode the improved confinement is associated with turbulence suppression and formation of a thermal barrier for electron heat transport at the plasma boundary, where a high temperature pedestal builds up. Another type of enhanced confinement mode relies upon peaked density and temperature profiles: these are IOC, Supershot and pellet-injection modes. Combinations of them are also possible.

We can see that only the best confinement regime, viz. LOC-IOC, appears to be determined by some fixed transport coefficients. All other regimes like the SOC and AUX-L modes indicate that some self-organization-type phenomenon can be present in the tokamak plasma. The transport fluxes are nonlinearly dependent upon the profiles providing the possibility of non-linear transitions from one confinement mode to another. The most striking feature of these transitions is the very high sensitivity of fluxes upon the density and temperature profiles.

The tokamak plasma is a complex physical system, which requires a set of nonlinear equations for its description. It is known that nonlinear equations can have not just one solution but two, three or even more. This phenomenon is called branching of solutions. Different branches of a mathematical model correspond to different states of a given physical system. Thus, we can say that different modes of tokamak plasma confinement correspond to different branches of the plasma state. The transition from one mode to another can be caused by a very weak external perturbation. Sometimes it occurs spontaneously as a result of internal plasma activity.

The energy confinement times of the SOC, AUX-H and AUX-L modes are always less than the maximum possible value in the LOC-IOC mode. Thus, we can assume that some kind of plasma turbulence is responsible for confinement in the SOC, AUX-H and AUX-L modes. Moreover a turbulent transport enhancement is definitely present even in the LOC-IOC mode, because its energy confinement time is less than the neoclassical prediction.

## Noise Pumping

Enhanced transport in tokamak plasma is produced by some kind of turbulence. To be sustained at a stationary level this turbulence has to be pumped at the expense of plasma free energy. The most natural idea is that this free energy is related to the local gradients of density, temperature etc. However, this statement is not so evident. We shall show that the toroidal plasma has an ability to pump turbulence simply due to its toroidicity, i. e. almost independently of the local gradients.

To demonstrate this possibility we consider a very simple example. Let us assume that turbulence is located near the median plane as shown by the shadowed region in Fig. 2. We consider a single ion moving along a helical magnetic field line. Such an ion crosses the shadowed region twice in a single

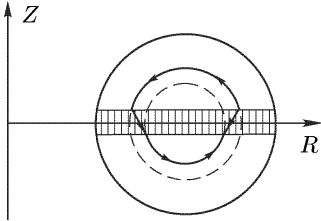


Fig. 2. If the drift turbulence fills the shadowed area and the phases of the perturbations allow the ion to be shifted radially while crossing this area, then a single ion can transfer some part of its energy to the energy of noise. This transfer is a consequence of the azimuthal and magnetic momentum conservation

turn along the minor azimuth. Next, we assume that the ion can be shifted in major radius direction over some length  $\delta$  due to the average  $E \times B$  drift in the fluctuating electric field. This drift is produced by the average value of the electric field  $\bar{E}$  over the ion trajectory.

Let the ion energy be equal to  $\varepsilon = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}$ . Then, due to conservation of the adiabatic invariant and the toroidal momentum the average energy change of the ion is equal to  $\delta\varepsilon = -\varepsilon_{\perp}\delta/R - 2\varepsilon_{\parallel}\delta/R$ , where  $\delta$  is the shift. When  $\delta$  is positive, the ion energy diminishes. Let the ion be shifted radially both at the inboard and later on at the outboard positions as it is shown in Fig. 2. After averaging over the complete turn the net ion displacement along the minor radius is zero. Thus, such a shift does not produce a net diffusion. But in spite of this fact the net energy loss is not zero (it is easy to see that the longitudinal energy is lost). Thus, in toroidal geometry the ion can lose its energy and directly pump the noise without a net displacement across the magnetic surfaces, if the perturbations have suitable symmetry.

Of course the picture in Fig. 2 is oversimplified. It is more realistic to assume that the outboard outflux of ions prevails over their inboard influx so that the noise pumping is accompanied by net ion diffusion. But the main feature is retained even in this case: the toroidal expulsion of diamagnetic ions can serve as a noise pumping mechanism.

Now we can estimate the pumped power. It is natural to assume that the plasma turbulence looks like some mixture of perturbations, both electrostatic and electromagnetic. Let  $\lambda$  be a mean wave length of such perturbations. Then the mean amplitude of the plasma density perturbations can be estimated to be  $\tilde{n} \sim n\lambda/a$ , where  $a$  is the minor radius. The corresponding perturbations of the electric potential  $\tilde{\varphi}$  and the transverse electric field are:

$$\tilde{\varphi} \sim \frac{R}{e} \frac{\tilde{n}}{n} \sim \frac{T\lambda}{ea}, \quad \tilde{E} \sim \frac{\varphi}{\lambda} \sim \frac{T}{ea}. \quad (1)$$

Here  $T$  is the plasma temperature (we do not distinguish here electron and ion temperatures).

Let us assume that the turbulence is self-adjusted in such a way that the average of the electric field on the ion trajectory has the same order of magnitude as (1). Since this field is produced due to toroidicity it is reasonable to assume that it is function of  $r/R$ , where  $R$  is the major radius. We can use an expansion in a series in  $r/R$ . The zero order term corresponds to



a homogeneous vertical electric field. There is no reason for such a field so that the average field is proportional to the next order term  $r/R$ . Thus we can estimate the radial velocity as

$$v_R \sim \frac{c\tilde{E}}{B} \sim \frac{r}{Ra} \frac{cT}{eB}, \quad (2)$$

where  $B$  is the toroidal magnetic field. The corresponding power of noise pumping can be expressed in the form

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \sim \frac{v_R}{R} nT, \quad (3)$$

where  $\varepsilon$  is the fluctuation energy. The factor  $cT/(eB) = \rho_i v_i$ , where  $\rho_i$  is the average Larmor radius and  $v_i$  is the ion thermal velocity. Thus, we have:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \gamma_0 \frac{r}{R^2} v_i nT. \quad (4)$$

Here  $\gamma_0$  is a very small factor, which is proportional to  $\rho_i/R$  for turbulence with  $\lambda = \rho_i$ . It can be shown [10] that for very fine-scale turbulence with an average wave length  $\lambda \leq \rho_i$  the factor  $\gamma_0$  becomes independent of  $\rho_i$ . Thus, for simplicity, we can consider  $\gamma_0$  a dimensionless numerical factor.

## Breakdown of Magnetic Symmetry

Small magnetic perturbations in a tokamak can destroy its magnetic surfaces. If the amplitude of the magnetic field perturbations is very small, these can be considered a superposition of Fourier modes  $\exp(im\theta - n\varphi)$ , where  $m, n$  are azimuthal numbers,  $\theta$  is the poloidal angle and  $\varphi$  is the toroidal angle. Each mode amplitude is very small, except at the so-called rational surface where  $q(r_S) = m/n$ . Here  $q$  is a local safety factor.

Near the rational surface a small magnetic perturbation leads to a distortion of the initially symmetrical magnetic configuration and a helical pattern of filaments is produced. These filaments are also called magnetic islands. In the presence of a density gradient, magnetic perturbations are accompanied by density perturbations and corresponding electric field perturbations. Each ion crossing the island chain can interact with the electric field perturbations and pump the perturbations having the suitable symmetry.

It can be shown [10] that a single chain cannot produce, on average, a pumping effect: either many interacting island chains or additional fluctuation mixing are needed.

If the ion pumping does exist then the perturbations increase in time up to the level where some mechanism of dissipation prevents further increase of the noise. For the case of magnetic perturbations the most natural mechanism of noise dissipation is electron resistivity.

The classical collisional resistivity of a hot plasma is very low and cannot prevent the perturbations from building up. Fortunately, when many island chains touch each other, they can interchange their electrons. These electrons lose their longitudinal momentum, related to the local current perturbations.

The rate of electron exchange can be estimated to be  $v_a = v_e/(aR)$ , where  $v_e$  is the mean thermal velocity of electrons, and  $q$  is the local safety factor. Hence, the corresponding anomalous resistivity can be estimated to be  $\eta_a = mv_a/(e^2n)$ , where  $m$  is the electron mass,  $e$  is electron charge, and  $n$  is the

electron density. The corresponding decay rate  $\gamma$  of the magnetic perturbations is of the order of  $c^2 k^2 \eta_a / 4\pi = \Lambda^2 k^2 v_e / (qR)$  where  $c$  is the speed of light. Here  $k$  is the wave number, and  $\Lambda = [c^2 m / (4\pi e^2 n)]^{0,5}$  is the so-called collisionless skin length or London length.

The decay rate increases with  $k$  as  $k^2$ . Thus, shorter waves decay faster.  $\Lambda$  is the shortest possible length for magnetic perturbations. Thus, we have  $\Lambda^2 k^2 \lesssim 1$ . If there is a family of many island chains, then their average decay will be dominated by waves with the maximum  $k$  values. Thus, for the average decay rate  $\gamma$  we can assume  $\langle \Lambda^2 k^2 \rangle \sim 1$ , so that  $\gamma \sim v_e / (qR)$ .

As for the poloidal magnetic field perturbation  $\tilde{B}_\theta$ , this can be estimated to be  $\tilde{B}_\theta = (w/r) B_\theta$ , where  $w$  is the island width,  $r$  is the minor radius and  $B_\theta$  is the poloidal magnetic field. Thus, we can put the fluctuation power balance equation in the form

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \gamma_0 \frac{v_i r}{R^2} nT - F_e \frac{v_e}{qR} \frac{w^2}{r^2} \frac{B_\theta^2}{8\pi}. \quad (5)$$

Here  $\gamma_0$  is a small factor and  $F_e \lesssim 1$  is a tuning factor which can decrease when the distance between the neighbouring island chains increases.

Since the factor  $F_e$  is capable of self-adjustment, it automatically establishes itself at a value such that the island structures are maintained in a steady state (on average). Thus, even with weak ion wave pumping the broken magnetic field symmetry in a tokamak plasma can be maintained. This is similar to the picture previously suggested by Rebut et al. [13].

## Physics of Transport

The breakdown of magnetic symmetry and the formation of a large number of mutually contiguous helical structures leads to anomalous electron heat conduction. If the mean width of the structures is  $w$ , the anomalous thermal conductivity can be estimated to be  $\chi_e \sim v_a w^2$ . More precisely,

$$\chi_e = \Phi_e w^2 \frac{v_e}{qR}, \quad (6)$$

where the tuning factor  $\Phi_e$  takes account of the degree of contact among island structures.

For the average steady state we obtain from (5) an estimate of the characteristic island width:

$$\frac{w^2}{r^2} = \frac{\gamma_0}{F_e} \frac{qr}{R} \beta_\theta \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (7)$$

Here  $\beta_\theta = 8\pi nT / B_\theta^2$  and  $M$  is the ion mass. Substituting the value for  $w^2$  in the electron thermal diffusivity expression (6), we obtain

$$\chi_e = \mu_e \frac{v_i r^3}{R^2} \beta_\theta. \quad (8)$$

Here  $\mu_e$  is a small factor:  $\mu_e = \gamma_0 \Phi_e / F_e$ . Relation (8) leads to the scaling

$$\tau_e = CIP^{-0,5} R^{1,5} a^{-0,5} A_i^{0,25}. \quad (9)$$

Here  $I$  is the plasma current and  $A_i$  is the atomic mass number. The factor  $C$  is a slowly varying function of the plasma parameters and can be considered approximately constant.

The scaling (9) is similar to the so-called L-mode confinement scaling and differs from the H-mode scaling [14] by a smaller value of the numerical factor  $C$ .

If the plasma density decreases, the length  $\Lambda$  increases and at some density value the relationship  $\Lambda < w$  does no longer hold true. Replacing  $w^2$  in (6) by  $\Lambda^2$  we obtain a relation which is similar to the formula for  $\chi_e$  suggested by T. Ohkawa [12]. A regime of this kind corresponds to neo-ALCATOR or IOC scaling of a tokamak plasma with ohmic heating.

Breakdown of symmetry looks like plasma self-organization: magnetic island chains fill the whole plasma cross-section and are in contact with each other. Both ions and electrons can tune their levels of transport, so that this mechanism is very sensitive to the profiles, boundary conditions and so on. The great sensitivity of transport to external influences provides a clue to understanding why almost the same expressions, similar to expression (9), are valid for both the L and H modes of confinement: these modes just differ in the edge plasma turbulence [7], reflected in the value of the dimensionless factor  $C$ .

## Optimal Profiles

The  $\gamma_0$  factor in formula (4) is very sensitive to the fluctuations present in the plasma. Such fluctuations can disturb the symmetry of magnetic island chains and provide an increase of the magnetic noise pumping. The fluctuations themselves can be sensitive to plasma profiles. Thus, we have a way to understand the «profile consistency» phenomenon [4].

The physical cause of «profile self-consistency» can be understood on the basis of tearing-mode activity when the profiles are not optimal from the point of view of their stability. Unfortunately, the linear theory of stability does not help very much to obtain a simple picture for plasma self-consistent global states. An energy principle is more suitable. This approach was developed by J.B. Taylor to describe the plasma relaxed state in the reversed field pinch. It is based on the assumption of complete reconnection of magnetic field lines. In a tokamak such a reconnection may occur only in the region where sawtooth oscillations are present or during a disruption. That is why some special arguments are required for the tokamak plasma.

For tokamaks the energy variational approach was proposed almost simultaneously in three papers by J. Hsu and M. Chu [8], D. Biskamp [1] and B.B. Kadomtsev [9]. Formally, it relates to requiring an extremum of the plasma and poloidal magnetic field energy:

$$\varepsilon = \int \left\{ \frac{B_\theta^2}{8\pi} + \frac{p}{\gamma - 1} \right\} \cdot 2\pi r dr \quad (10)$$

under the additional constraint

$$I = \int j \cdot 2\pi r dr = \text{const} \quad (11)$$

and the assumption that the plasma pressure  $p$  and the current density  $j$  are functions of  $q$  (or  $\mu = 1/q$ ).

Let us explain what this means. Because the toroidal magnetic field energy is conserved, expression (10) represents the total energy inside the plasma column. Without additional constraints, this energy would go down to an absolute minimum, i. e. to zero. However, this is not possible in a tokamak plasma because the magnetic field is frozen in the well conducting plasma.

In a tokamak the global reconnection of magnetic lines takes place only during a current disruption. In a steady state phase, global reconnection is forbidden, but some small local zones of reconnection may appear. A typical example is sawtooth oscillations in the vicinity of the plasma axis; this is a reconnection process repeated periodically. More accurate experimental studies [11] have shown that «fine sawteeth» were detected in the vicinity of rational points  $q = m/n$  with modest  $m, n$  numbers.

In order to find out whether these reconnections are favorable from the energy point of view, one can compare the two states before and after reconnection. When the energy of the final state is lower, the reconnection may develop even if some intermediate potential barrier exists in front of the magnetic energy release via the kink mode. Perhaps this very barrier leads to the relaxation type feature of sawtooth oscillations when the energy is slowly accumulated, to be released then in the sawtooth crash.

Let us assume that in the vicinity of some rational point, as a consequence of non-linear tearing mode growth, a tubular layer with a stochastic magnetic field of reconnected magnetic lines is formed. The plasma in this layer can smooth out the pressure along the magnetic lines, so that a local pressure plateau can be formed. Since there is no pressure gradient in this area, a force-free magnetic field is produced, i. e. the current flows along the magnetic field lines:

$$\mathbf{j} = \alpha \mathbf{B}. \quad (12)$$

One may assume that the entire stochastic layer is filled by a single magnetic line. This leads to two effects: firstly, the  $q$  value (or  $\mu = 1/q$ ) also reaches a plateau due to averaging of the angle of the rotational transform, and, secondly, a plateau is formed in the current density. The second statement is related to the fact that from (12) and  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  it follows that  $B \nabla \alpha = 0$ , i. e. the value of  $\alpha$  is constant inside the stochasticity region. But in a tokamak the toroidal component of the magnetic field is much larger than the poloidal one, and this means homogeneity of the longitudinal current in the stochastic layer. Thus, when the stochastic layer is formed, a plateau develops in  $\mu$  as well as in the pressure and current densities. This pattern looks like the functional dependence of  $p$  and  $j$  upon  $\mu$ .

In order to find out the energy extremum under the additional constraint  $I = \text{const}$ , we have to put the variation  $\delta(\varepsilon + \lambda I) = 0$ , where  $\lambda$  is the Lagrange multiplier.

The optimal profiles derived from the variational principle correspond to the margin between the nested smooth magnetic surfaces and the stochastic magnetic field geometry. An additional increase of gradients leads to additional stochastisation and a corresponding increase of magnetic noise pumping. This fact can be accounted for by an additional term in the dependence of the thermal flux upon the gradients [5] which corresponds to a sharp change of the flux when gradients deviate from the optimal ones. Experiments show [15] that the «resilience» of the pressure profile increases with the increase of the ratio  $n/I$  where  $n$  is the plasma density and  $I$  is the total plasma current.

If the temperature gradient diminishes as compared with the optimal gradient, the thermal flux diminishes faster than in the simple linear dependence. Sometimes the picture looks like an inversion of the thermal flux and is named «thermal pinch». A negative thermal flux looks very strange, but in fact it cannot be excluded in the case of complex self-organized matter. The corresponding negative entropy production near the plasma centre can be compensated by entropy production near the plasma edge. Taken as a whole, the plasma obeys the second law of thermodynamics. As for the electrons, their negative thermal flux can be related to the transport of electrons with small longitudinal velocity components. Their distribution function is proportional to  $n/\sqrt{T}$ . Thus, they reach a plateau distribution when  $T \sim n^2$ . Hence, the temperature profile tends to the bell-shaped if the density profile is of the same type.

The sensitivity of the local noise pumping to profiles means that the factor  $\gamma_0$  in formula (4) has to be considered a functional of the profiles. Its explicit form can be found with the help of numerical simulations of different transient processes in a tokamak plasma.

## Conclusion

We can conclude the discussion of the plasma transport self-organization phenomenon by the very simplified picture of Fig. 3. This shows the different mechanisms of thermal conductivity. The first one is (exaggeratedly) shown as stripes near the rational points. This mechanism controls the profile itself and sawteeth are the most striking example for it.

The next is the bulk transport which occurs as a result of break-down of the magnetic symmetry. This mechanism defines the global scaling of the energy confinement time.

And, finally, we have a very strong activity at the plasma edge. It controls the transition from one mode of confinement to another and its influence extends well into the bulk plasma. Cooperative action of these three mechanisms of enhanced transport, with the addition of neoclassical transport, is responsible both for the global plasma confinement and the feedback couplings between profiles and fluxes. Their interplay controls the plasma self-organization phenomena including the existence of different modes of confinement.

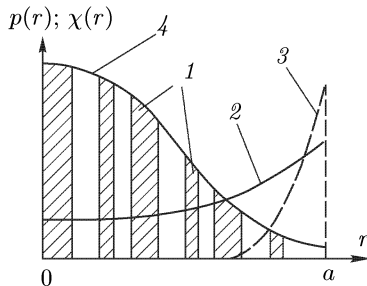


Fig. 3. Schematic picture of the plasma transport self-organization: 1 — thermal flux produced by deviation from the optimal profile; 2 — bulk plasma transport; 3 — transport at the plasma edge; 4 — pressure profile

## References

1. Biskamp D. // Preprint IPP 6/258. Max-Plank-Institut fur Plasmaphysik. 1986.
2. Callen J.D. Transport Processes in Magnetically Confined Plasmas. // Report UW-CPTC 91-18. University of Wisconsin, USA, 1991.

3. *Carreras B.A.* Transport Mechanisms Acting in Toroidal Devices — Theoretician's View. // This Conference: 1992 ICPP. 1992.
4. *Coppi B.* Nonclassical Transport and the Principle of Profile Consistency. // Comments Plasma Phys. Contr. Fusion. 1980. V. 5. P. 261–269.
5. *Dnestrovskij Yu.N. et al.* Canonical Profiles Transport Model for improved Confinement Regimes in Tokamaks. Proc. // 18th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. 1991. Part I. P. 413–116.
6. *Goldston R.J.* Energy Confinement Scaling in Tokamaks. // Plasma Physics and Controlled Fusion. 1984. V. 26. 1a. P. 87–103.
7. *Hinton F.L.* Thermal Confinement Bifurcation and the L- to H-Mode Transition in Tokamaks. // IAEA Meeting on Tokamak Transport. PPPL, Princeton. 1990.
8. *Hsu J.Y., Chu M.S.* On the Tokamak Equilibrium Profile. // Report GA-A18275, GA Technologies, San Diego, 1986.
9. *Kadomtsev B.B.* Tokamak Plasma Self-Organisation (in Russian). // Radiofizika. 1986. V. 29. № 9. P. 1032–1040.
10. *Kadomtsev B.B.* Plasma Transport in Tokamaks. // Nuclear Fusion. 1991. V. 31. P. 1301–1314.
11. *Nave M.F.F. et al.* Observation of MHD Structures in JET Temperature Profiles. // Nuclear Fusion. 1992. V. 32. P. 825–836.
12. *Ohkawa T.A.* Transport Model for Alcator Scaling in Tokamaks. // Phys. Lett. 1978. V. 67A. № 1. P. 35.
13. *Rebut P.H. et al.* Chaotic Magnetic Topology and Heat Transport in Tokamaks. // JET Report JET-P (88)05, 1988.
14. *Schissel D.P. et al.* H-mode Energy Confinement Scaling from the DIII-D and JET Tokamaks. // JET Report JET-P (90)16, 1990.
15. *Vasin L. et al.* «Canonical» and «Limiting» Profiles in Tokamak. // Fizika Plazmy. 1987. V. 13. № 1. P. 109–113.

## ON THE REVERSED FIELD PINCH CONFIGURATION \*)

The comparison of the experimental data for RFP magnetic field profiles with the paramagnetic and the relaxed state models shows that the real configuration lies somewhere in between these models. This fact gives a clearer understanding of why the MHD dynamo is really important for RFP configuration. These items together with the possible steps towards finite beta values are discussed in this paper.

Reversed field pinch configuration continues to be a subject of the experimental and theoretical efforts in spite of the fact that the pioneering experiments on the Zeta machine [1, 2] were performed more than thirty years ago.

The continuous interest in this concept is connected with the hope of finding a way towards a compact, chemically heated reactor. The RFP configuration derives its name from the fact that the toroidal magnetic field near the plasma periphery is reversed with respect to its direction on the axis. Field reversal was observed in the very first experiments on Zeta. The most striking feature of the corresponding pinch configuration was the complete capture by plasma of the initial longitudinal magnetic flux. Namely, this strong «paramagnetism» looked like a mystery and only somewhat later was it shown and then understood [3, 4] that the field reversal itself is very important for plasma stability.

As for the plasma «paramagnetism» property it was explained [5] with the help of a simple model of the longitudinal conductivity. The corresponding idea looks like this. Let us assume that the current density profile is formed in accordance with the classical Ohm's law but applied for the longitudinal component only. As for the transversal current density component it is accepted to be zero. This means that the magnetic field is force free and cannot confine a plasma with a large  $\beta$ -value. In other words, some kind of plasma turbulence and corresponding anomalous transport causes the plasma pressure increase.

Thus we have for current density:

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \sigma \frac{\mathbf{B}\mathbf{E}}{B}. \quad (1)$$

Here  $\mathbf{j}$  is the current density,  $\mathbf{B}$  is the magnetic field,  $\sigma$  is the plasma conductivity and  $\mathbf{E}$  is the externally applied longitudinal electric field.

Using the cylindrical frame of reference and introducing dimensionless radius  $x$  and variables,  $B_\theta = B_0 u(x)$ ,  $B_z = B_0 v(x)$  we can obtain the set of

\*) Comments Plasma Phys. Controlled Fusion. 1993. V. 15. № 4. P. 211–218.

equations for the magnetic field distribution under the assumption  $\sigma = \text{const}$ :

$$\frac{I}{x} \frac{d}{dx} (xu) = \frac{v^2}{u^2 + v^2}, \quad (2)$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{uv}{u^2 + v^2}. \quad (3)$$

The solution of these equations predicts the bell shape of the current and longitudinal magnetic field distributions with  $v \rightarrow 0$  as  $x \rightarrow \infty$ . The shape of this stationary configuration is determined by a single parameter  $\theta$  which is proportional to ratio  $aI/\phi$ , where  $a$  is the radius of the flux conserving boundary,  $I$  is the total plasma current and  $\phi$  is the initial longitudinal magnetic flux. It turns out that the dimensionless radius of plasma  $x_a$  is approximately proportional to the pinch parameter  $\theta$ .

The paramagnetic model does not explain the field reversal phenomenon. This is a very important feature of the RFP configuration which was successfully explained by Taylor relaxation theory [2, 3]. This theory considers the RFP equilibrium as a minimum energy relaxed state at a given total magnetic helicity

$$K = \int h dV. \quad (4)$$

Here the local helicity  $h = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ .  $\mathbf{A}$  is a vector potential given by  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  and  $K$  is the volume integral of  $h$ .

The relaxed state equilibrium is given by

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{B}, \quad (5)$$

where  $\mu$  is constant in space.

For a large aspect ratio torus of circular cross-section this equation looks like

$$\frac{I}{x} \frac{d}{dx} (xu) = v, \quad (6)$$

$$\frac{dv}{dx} = -u, \quad (7)$$

where  $x = \mu r$  and  $u, v$  were defined above. Equations (6) and (7) give the well-known Bessel function fields:  $u = J(x)$ ,  $v = J_0(x)$ .

This relaxed model leads to the field reversal. But in contrast to similar phenomena in astrophysics, [6] the quasi-stationary RFP configuration can exist only due to continuous reversed field generation by some dynamo effect which can compensate the natural tendency for the fields to decay by diffusion. Thus the real configuration has to deviate from the Bessel function model. In other words, the  $\mu$  factor is not a constant but some function of  $r$ .

Figure 1, taken from the review paper by Bodin, [9] gives a comparison of the theoretical and experimental field and  $\mu(r)$  distributions. As we see, the internal part of the configuration corresponds to the Bessel function model, but the outer region with negative  $B_z$  values does not agree with the theoretical prediction. The experimental  $B_z(r)$  profile lies somewhere in between the paramagnetic and Bessel function models.

Figure 2 shows the  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $\mu(x)$  profiles for the fifty-fifty mixture of two models when the right-hand side of the corresponding equations (2), (6) and (3), (7) is taken as the arithmetical mean value of these pairs of equations.



As we see, these profiles are much closer to the experimental data than the profiles of the paramagnetic and Bessel function models.

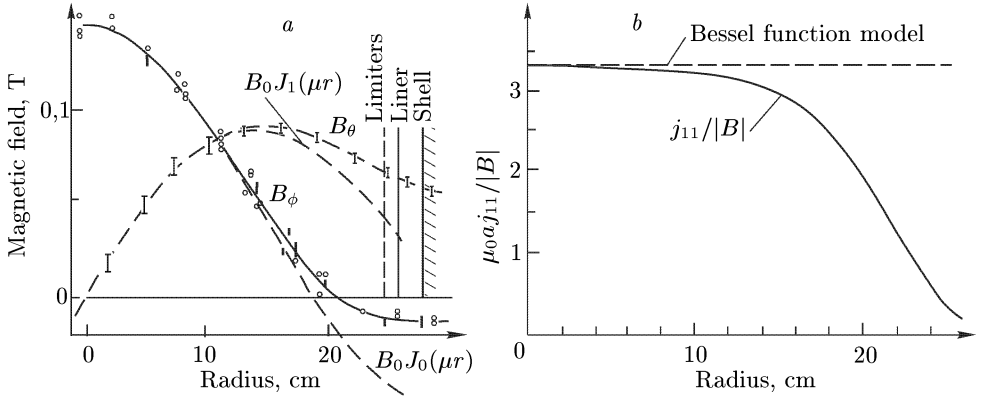


Fig. 1. *a* — RFP magnetic field profiles measured experimentally and for the Bessel function model; *b* — corresponding  $\mu$ -profiles

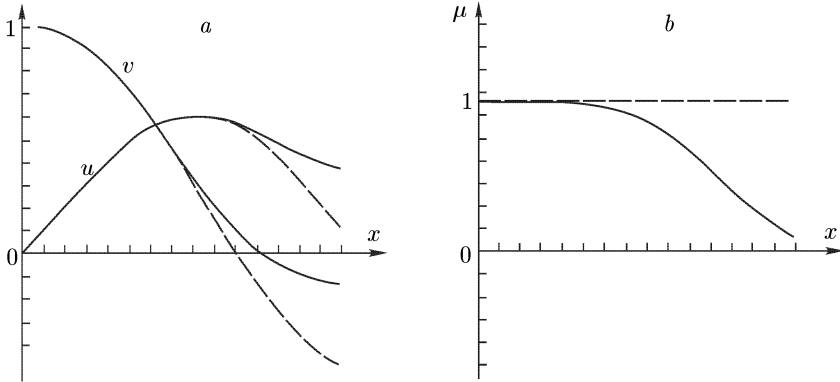


Fig. 2. *a* — RFP magnetic field profiles for the fifty-fifty mixture of the paramagnetic and the relaxed state models and for the Bessel function model; *b* — corresponding  $\mu$ -profiles

To be quasi-stationary this configuration has to be sustained by an external source. In the steady-state two balance equations have to be satisfied: for the magnetic energy and helicity [10]. These equations look like

$$IV_z = \int \eta j^2 dV, \quad (8)$$

$$\phi V_z = \int \eta \mathbf{j} \mathbf{B} dV. \quad (9)$$

Here  $V_z = 2\pi R E$  is the toroidal voltage,  $I$  is the plasma current,  $R$  is the major radius and  $\eta = 1/\sigma$  is the plasma resistivity.

It is interesting to note that these equations are automatically satisfied in the case of the paramagnetic model (1). It means that the energy and helicity balance is established just inside the electron component. The electrons are

heated by ohmic power, and later on their energy has to be lost either directly by the electron leakage channel or via ion heating. In any case the strong energy loss has to be present to justify the force free approximation (1).

Not less interesting is the fact that the relaxed state model,  $\mathbf{j} = \text{const} \cdot \mathbf{B}$ , again gives the possibility to satisfy both Eqs. (8) and (9) when the voltage value  $V_z$  is properly chosen. In this case the balance is reached again just inside the electron component, but in the frame of the somewhat unusual assumption that electron momentum may be carried along stochastic field lines from the plasma interior to drive sustained field reversal in the outer plasma region [11, 12].

However, in the general case it is not possible to satisfy both Eqs. (8) and (9) with the same value of  $\eta$ : when the helicity balance is assured the energy decay in (8) is found to be too low. This can be shown purely analytically for the fifty-fifty mixture of two models (Fig. 2) with the help of the well-known inequality  $\langle xy \rangle^2 \leq \langle x^2 \rangle \cdot \langle y^2 \rangle$ , where the brackets mean averaging over volume and the variables  $x, y$  are given by relations:  $x = \sqrt{\eta} B, y = B_z / (\sqrt{\eta} B)$ . The strong equality sign corresponds to the case when  $x$  is proportional to  $y$ , but this is not possible if the region  $B_z < 0$  exists.

A similar conclusion was obtained previously [10, 13] directly on the basis of experimental data. To resolve this discrepancy it was suggested [10, 13] that the energy balance resistivity,  $\eta_w$ , is larger than the helicity balance resistivity  $\eta_k$ .

It means, in fact, the direct involvement of the dynamo mechanism which is produced by the plasma turbulent fluctuations. More detailed discussion of this turbulence in Refs. 13 and 14 gives a clue for understanding how the ion component is heated.

Thus we can say that the beautiful and elegant theory of the relaxed state [3, 4] in its simple and direct practical realization in the RFP configuration meets with not a small deviation from the lowest energy state. Namely this deviation serves as a source for turbulence which provides in turn the necessary dynamo mechanism. The full potential of the RFP confinement concept can probably be realized with the help of more gentle tools of current density profile control, e.g., by the local current drive schemes.

The configurations discussed above are force free ones with  $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$ . The plasma pressure in such a configuration is extremely low compared to the magnetic field pressure. There were different attempts to include finite beta effects into consideration. It seems to me that the most consistent one is that developed by Gordin and Petviashvili [15, 16]. Their approach again uses the energy relaxation principle at a given constraint. This constraint is obtained in the frame of the usual set of MHD equations, but compared with (4) it looks like a more general one:

$$M = \int h f(p/h^\gamma) dV = \text{const}. \quad (10)$$

Here  $f(x)$  is an arbitrary function of its argument,  $p$  is the plasma pressure and  $\gamma$  is the adiabatic index. When  $p \rightarrow 0$  the function  $f(0) = \text{const}$  and  $M$  is proportional to  $K$  given by Eq. (4). But when  $p$  is not zero and  $f \neq \text{const}$ , the variational principle leads to the equation:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 2G\mathbf{B} + \nabla G \times \mathbf{A}, \quad G = G(h). \quad (11)$$

Here  $G(h)$  is the function of  $h$  related to the  $f$ -function. When  $2G = \mu = \text{const}$ , we again have the Taylor relaxed state. But when  $G \neq \text{const}$ , the simple generalization for the  $p \neq 0$  case is obtained. It is interesting to note that Eq. (11) gives the possibility to find finite solutions with the zero current density near the plasma wall.

In conclusion, this short review of the recent progress in the understanding of RFP physics can show the way for future experimental and theoretical activities.

### References

1. *Thonemann P.C. et al.* // Nature. 1958. V. 4604. P. 218.
2. *Butt E.P. et al.* // In Proc. 2nd U.N. Intern. Conf. PUAE (United Nations, Geneva), (1958). V. 32. P. 42
3. *Taylor J.B.* // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 1139
4. *Taylor J.B.* // Rev. Mod. Phys. V. 58 P. 741 (1986).
5. *Kadomtsev B.B.* // Nuclear Fusion, Supplement. 1962. Part 3. P. 969.
6. *Woltjer L.* // Proc. Nat. Acad. Sci. 1958. V. 44. P. 489.
7. *Tsui H.Y.W.* // Controlled Fusion and Plasma Physics (Proc. 13th Euroconf., Schliersee), 1986. V. 1. Part 1. P. 345.
8. *Tsui H.Y.W.* // Controlled Fusion and Plasma Physics (Proc. 14th Euroconf., Madrid), 1987. V. 11D. Part 2. P. 473.
9. *Bodin H.A.B.* // Nuclear Fusion. 1990. V. 30. P. 1717.
10. *Schoenberg K.F., Moses R.W., Hagenson R.I.* // Phys. Fluids. 1984. V. 27. P. 1671.
11. *Rusbridge M.G.* // Plasma Phys. 1980. V. 22. P. 331.
12. *Jacobson A.R., Moses R.W.* // Phys. Rev. A. 1984. V. 29. P. 3335.
13. *Carolan P.G. et al.* // Controlled Fusion and Plasma Physics (Proc. 14th Euroconf., Madrid), 1987. V. 11D, Part 2. P. 469.
14. *Mattor N., Terry P.W., Prager S.C.* // Comments Plasma Phys. Controlled Fusion. 1992. V. 15. P. 65.
15. *Gordin V.A., Petviashvili V.I.* // Sov. Phys. JETP. 1989. V. 68. P. 988.
16. *Petviashvili V.I.* Plasma relaxation in pinches and tokamaks. // Pis'ma JETP (to be published).

## THERMAL PINCH IN TOKAMAK PLASMA \*)

Experiments on different tokamaks have shown the existence of so-called thermal pinch, i. e., the tendency toward constriction of the temperature profile. The most impressive of such phenomena was observed recently in the DIII-D tokamak where the inward transport of energy was detected in experiments with off-axis electron cyclotron heating. The heat flow in the direction of increasing temperature seems to be in contradiction with thermodynamics. We discuss this matter from the standpoint of nonequilibrium plasma self-organization.

### 1. Introduction

Heat and particle pinching were observed in many tokamak plasmas. Pinch of particles looks like a tendency towards a bell-shape density profile formation even in the case when the particle influx is present near the plasma edge only. Thermal pinch means a similar tendency toward temperature profile contraction. Both of these phenomena can be numerically modeled as a combination of outward diffusion together with inward convection. This convection is usually much larger than the Ware pinch.

Another form of pinch manifestation emerges when the nonlinear dependence of the heat flux  $q_T$  upon the temperature gradient is approximated by so-called off-set linear dependence:

$$q_T = -\kappa_{\text{ef}}(\nabla T - \nabla T_c). \quad (1)$$

Here  $q_T$  is the heat flux,  $\kappa_{\text{ef}}$  is the effective thermal conduction.  $\nabla T = dT/dr$  and  $\nabla T_c$  is the so-called critical gradient above which the  $q$ -value increases with  $\nabla T$  very sharply.

According to (1) the heat flux can change its sign if  $\nabla T$  is less than its critical value  $\nabla T_c$ . But due to the very rough approximation, the relation (1) was usually considered applicable at  $|\nabla T| \gg |\nabla T_c|$ . More detailed investigation of  $q(\nabla T)$  dependence on JET [1] has shown that the heat flux changes its sign simultaneously with the  $\nabla T$  sign change, so that during some period of time the general opinion was that the formally introduced thermal conductivity  $\kappa$  according to relation

$$q_T = -\kappa \nabla T \quad (2)$$

has to be positive.

But recent experiments [2] with off-axis electron cyclotron heating (ECRH) in DIII-D have led to the conclusion that the thermal conductivity  $\kappa$  is negative

---

\*) Comments Plasma Phys. Controlled Fusion. 1995. V. 16. № 4. P. 231–238.

near the axis. This means that the heat flux is directed in the direction of increasing temperature. This fact seems to be in contradiction with the general principles of thermodynamics.

The aim of this paper is not to review theoretical papers [2–5] in which negative thermal flux appears as a result of formidable calculations related to nonlinear instabilities in plasma, but to consider the qualitative basic principles which can lead to thermal pinch in tokamak plasma.

## 2. Van Allen Belts

Is there another example of the negative thermal flux in plasma physics? Yes, there is: the famous Van Allen belts. More precisely, we mean the external Van Allen belt which is produced in the end by particles from the solar wind.

According to the generally accepted theory [6], the Van Allen belt is produced and maintained by the magnetic pumping of a plasma injected into the magnetosphere by the solar wind. In the first step the solar wind supplies the external layer of magnetosphere with a warm plasma. Then fluctuations of the solar wind lead to stirring of the magnetic field lines and to diffusion of these particles towards Earth. The particles are mirroring between the point with magnetic field strength somewhat higher than the field in the equatorial plane. In such a motion the magnetic moment  $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$  and the longitudinal adiabatic invariant  $J = \int mv_{\parallel} de$  are constant. But the third adiabatic invariant  $\Phi$  is not conserved: this invariant is equal to the magnetic flux through the closed drift trajectory and corresponds to the slowest motion of particles in their quasi-periodic oscillations. The matter is that the fluctuation frequencies are in the range of the drift rotation frequency so that the solar wind variations can distort the closed drift surfaces. As a result, particles can «jump» from one drift surface to another.

Let  $F = F(\mu, R, t)$  be a distribution of particles with respect to the  $\mu$  value as a function of radius  $R$  and time. We can describe the particle diffusion by the equation

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( DR^2 \frac{\partial F}{\partial R} \right). \quad (3)$$

We assume for simplicity that the diffusion coefficient  $D$  is not dependent upon  $\mu$ .

By integration of Eq. (1) with respect to  $\mu$ , we obtain the diffusion equation for density  $n$ :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( DR^2 \frac{\partial n}{\partial R} \right). \quad (4)$$

Let us assume that near the magnetosphere boundary the density is equal to  $n_w$ . Then Eq. (4) provides the same level of stationary density  $n = n_w$  in all the regions where leakage of particles is negligible.

Now let us multiply (3) by  $\mu$  and integrate over  $\mu$ . The experimentally measured local distribution of particles with respect to their energy  $\mathcal{E}$  looks like a Maxwellian one:  $F = \text{const} \cdot \exp(-\mathcal{E}/T)$ , where  $T$  is the local temperature. Thus the integral  $\int \mu F d\mu$  is proportional to  $nTR^3$  since the magnetic field

value  $B$  depends upon  $R$  as  $B \sim R^{-3}$ . Thus we obtain

$$\frac{\partial}{\partial t} (nTR^3) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[ DR^2 \frac{\partial}{\partial R} (nTR^3) \right]. \quad (5)$$

In regions where the particle losses are absent, Eqs. (4) and (5) lead to the asymptotic distribution  $n = \text{const}$ ,  $TR^3 = \text{const}$ . In other words the temperature has to depend upon  $R$  as  $T \sim R^{-3}$ . Near Earth a high energy particle belt is formed. The temperature near the magnetosphere edge is much lower, so that the plasma in the belt is heated. Heating is produced by a thermal flux which is directed in the direction of increasing temperature. We are faced with a negative thermal flux.

Here the negative thermal flux is produced by the external perturbations, so to speak, by the external magnetic field pumping. That is why the entropy increase law for closed systems is not relevant in this case. Negative thermal flux is produced at the expense of the external source of the order.

### 3. Tokamak Plasma

How can we discuss the possibility of the negative thermal flux in the tokamak plasma? Here again some turbulence or plasma noise may be present. However, the particle motion is a different one.

It is known that all particles of a high temperature collisionless plasma can be separated into two families: trapped and transit particles. The trapped particles are bouncing between the magnetic mirrors, and transit particles are moving over «magnetic hills» far along the magnetic field lines. If some magnetic or electrostatic perturbations appear in plasma, particles with small longitudinal components of velocity  $v_{\parallel}$  start to display stochastic behavior [7]. We can say that their nested drift surfaces are destroyed so that they can diffuse across the magnetic field lines.

The density of such slow particles is proportional to their distribution function  $f(v_{\parallel})$  at  $v_{\parallel} \rightarrow 0$ . This means that this density is proportional to the function  $F = n/\sqrt{T}$ , where  $n$  is the plasma density and  $T$  is the temperature. For  $F$  we can use the diffusion equation

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{r} \left( r D_F \frac{\partial F}{\partial r} \right). \quad (6)$$

Here  $r$  is the local minor radius and  $D$  is the turbulent diffusion coefficient produced by the drift surface «flutter». If the turbulence has a very short cross-field scale, then Eq. (6) is to be applied to the electrons only. As for the plasma as a whole, the electron and ion species have to be described by a joint diffusion equation

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D_0 \frac{\partial n}{\partial r} \right). \quad (7)$$

Let us start with the case when ions are at rest and  $D_0 \rightarrow 0$ . Then  $n(r, t)$  can be considered «frozen», not dependent upon time.

According to (6) the flux  $q_F$  of function  $F$  is given by the relation

$$q_F = \frac{D_F}{\sqrt{T}} \left( \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{n}{2T} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (8)$$

If the density  $n$  has a broad profile, the second term in (8) dominates so that  $q_F$  is directed toward the center of the plasma. In other words we have an inward flux of slow electrons. But ions are at rest, so that the inward flux of slow electrons has to be compensated by the outward diffusion of electrons with longitudinal velocities of the order of the thermal velocity.

This process can be imagined in the following way. The stochastic behavior of slow electrons can be considered as random jumps across the magnetic field when the neighbour drift surfaces touch each other. Random jumps produce the local change of electron charge and corresponding electric potential perturbation which propagates along the magnetic field lines inducing backward displacement of the thermal electrons. Now we can estimate the corresponding thermal flux. It can be written as

$$q_T = Tq_F - \frac{3}{2}Tq_F = -\frac{T}{2}q_F. \quad (9)$$

Here the term  $T$  corresponds to the heat flux which is transported by slow electrons. The average energy of such electrons is equal to  $T$  because the transverse energy only is transported. As for thermal electrons, they have  $3T/2$  average energy since each of the three degrees of freedom have energy  $T/2$ . Keeping in mind the expression (8) for  $q_F$ , we obtain

$$q_T = -\kappa_F \left( \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2T}{n} \frac{\partial n}{\partial r} \right). \quad (10)$$

Here  $\kappa_F$  corresponds to that part of thermal conductivity which is produced by the flutter of the drift surfaces.

The first term in (10) corresponds to the usual thermal conduction and the second term describes a thermal pinch at the expense of the density gradient.

We see that  $q_T = 0$  when  $T \sim n^2$ . In this case the function  $F = n/\sqrt{T}$  has a flat density profile so that the slow particle diffusion is absent.

Now let us assume that the perturbations which produce drift surface destruction can induce a diffusion flux in addition to heat flux. Let the flutter diffusion coefficient  $D_f$  equal  $D_f = \alpha\kappa_F/n = \alpha\chi_F$ , where  $\alpha \ll 1$  is some numerical factor and  $\chi = \kappa_F/n$ . Taking into account  $D_0$ , we can replace (7) by the following equation:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Gamma_n), \quad \Gamma_n = -D_0 \frac{\partial n}{\partial r} - D_f \left( \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{n}{2T} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (11)$$

The last term in this expression corresponds to the particle pinch which is produced by the temperature gradient. Comparing the expressions (10) and (11) we can see that the flutter component leads to inward thermal flux and outward diffusion flux when  $-\partial n/\partial r > -n/2T(\partial T/\partial r)$  and to outward heat flux and inward particle flux at  $-\partial n/\partial r < -n/2T(\partial T/\partial r)$ . We can try to find the equilibrium distribution of density in the frame of this simplified model:

$$(D_0 + D_f) \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{n}{2T} D_f \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (12)$$

Let  $D_0 = \text{const}$  and  $D_f = \text{const}$ . Then Eq. (12) has a solution

$$n \sim T^\xi, \quad \xi = \frac{D_f}{2(D_0 + D_f)} \leq \frac{1}{2}. \quad (13)$$

The thermal flux (10) in this case is equal to

$$q_T = -\kappa_T \frac{D_0}{D_0 + D_f} \frac{\partial T}{\partial r} > 0. \quad (14)$$

When  $q_T > 0$  plasma has to be heated. The  $T(r)$  profile is produced by a balance of heating and thermal conductivity towards the walls. We see from (13) that the density distribution follows the temperature distribution, namely  $n(r) \sim T^\xi(r)$  at  $\xi < 1/2$ . We see that this simple model of slow electron stochastic behavior gives the qualitative picture of thermal and particle pinches. The real density and temperature profiles have to accommodate the profile consistency mechanisms not considered here.

#### 4. Conclusion

The negative electron thermal flux observed in the DIII-D tokamak leads to the problem of explaining how such a flux is consistent with the general laws of thermodynamics. We have indicated that a similar problem in the case of the Van Allen belt is resolved due to the fact that its plasma looks like an open system pumped outside by the solar wind perturbations. In the case of tokamak plasmas, we again have an open physical system. To produce the negative thermal flux and the pinch effects, some nonthermal noise or turbulence has to be involved. This turbulence can be pumped outside or can be produced by the ion (not electron!) component turbulence due to some kind of instabilities. If the main mechanism for thermal pinch corresponds to the stochastic behavior of slow electrons, then  $q_T < 0$  is possible when  $\frac{r}{n} \frac{\partial n}{\partial r}$  is not a small value. Namely, here there is a difference between DIII-D [8] and JET [1]. JET has a flatter profile of  $n(r)$ , and this may be a reason why the negative thermal flux was not observed in JET plasma.

#### References

1. JET TEAM. In Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA, Vienna, 1992. V. 2. P. 161.
2. *Luce T.C., Petty C.C., de Haas J.S.M.* // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 52.
3. *Walz R.E.* // Phys. Fluids. 1986. V. 29. P. 3684.
4. *Weiland J., Jannen A., Hordman H.* // Nucl. Fusion. 1990. V. 30. P. 983.
5. *Kingsbury O.T., Walz R.E.* // Phys. Fluids. 1991. V. B 3. P. 3539.
6. *Twerskoy B.A.* Dynamics of the Radiation Belts of Earth. — Moscow: Nauka, 1968.
7. *Parail V.V., Yushmanov P.N.* // Pis. Zh. Ehksp. Teor. Fiz. 1985. V. 42. P. 278.
8. *Petty C.C., Luce T.C.* // General Atomics Report GA-A21234. 1993.



## FAST CHANGE IN CORE TRANSPORT AFTER L-H TRANSITION \*)

Transport in the core tokamak plasma is known to change very rapidly after the L-H transition in the edge plasma. A qualitative discussion is given of this fast transmission of transport change. A picture based on successive bifurcations is presented.

The H-mode in tokamak plasmas has revealed many complex features of plasma transport phenomena [1]. Most dramatic is the establishment of the edge transport barrier: much experimental as well as theoretical work has been done to understand the bifurcation nature of the edge transport. In addition to the fast phenomena near the edge, the transport in the core plasma was also found to respond very rapidly at the L-H transition [2]. The confinement in the core plasma has been known to improve in the H-mode plasma. The recent experiment on JET has shown that the improvement in the core starts to occur only a few milliseconds or less after the L-H transition at the edge. This delay time of a few ms is much smaller than the time scale of the diffusive transport  $a^2/\chi$  ( $a$  is the distance of propagation such as the minor radius,  $\chi$  is the thermal diffusivity deduced from the power balance of plasmas). This phenomenon of the rapid change in the core is related to other experimental observations (e. g., heat pulse propagation after pellet injection [3] or sawtooth crash [3, 4]).

These experimental results suggest that the energy flux in the plasma is governed by some «nonlocal» mechanism in addition to the diffusive flux driven by the local gradient. Yoshizawa has analyzed the distant interaction of fluctuations [5] in the form of the diffusion equation for fluctuations. It is not enough to explain the fast change in transport.

In this article, we discuss a possible physical picture of the rapid change of transport in the core plasma. A control parameter, such as an axisymmetric electric potential, is used to describe the difference between the high transport state (L-mode) and the low transport state (H-mode) in the core plasma. A successive mode change (from L- to H-state) propagates from the edge to the center in the form of an avalanche, causing a rapid change in the core. The analogy to the «sand pile model» is discussed.

Figure 1 illustrates the radial distribution of the plasma temperature. Region I is the edge and II denotes the core plasma. Figure 2 shows that,

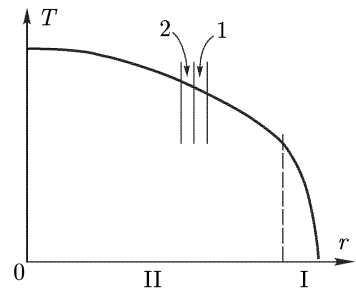


Fig. 1. Plasma profile. The regions I and II indicate the edge and core, respectively. The layers 1 and 2 define the propagating front of the L-H transition domain

\*) Itoh K., Kadomtsev B.B. // Comments Plasma Phys. Controlled Fusion. 1995. V. 16. № 6. P. 335-341.

in L- and H-modes of confinement, the dependencies  $q = -\chi\nabla T$  are very different from each other. But we can consider them as two different branches of the same nonlinear  $q = q[\nabla T]$  dependence, keeping in mind the possibility

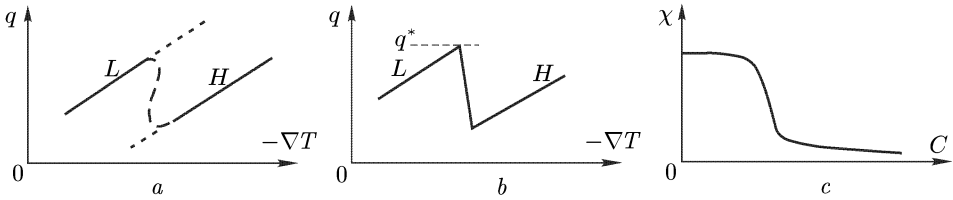


Fig. 2. Relation between the gradient and the heat flux at the plasma edge  $a$  – and that in the plasma core  $b$ . At the edge  $a$ , both the hard-type and soft-type bifurcations are possible.  $q^*$  is the critical heat flux for the transition. The dependence of the transport coefficient on the control parameter  $C$  is schematically given in  $c$

of the existence of some control parameter  $C$ . In the edge plasma, the parameter  $C$  was the radial electric field  $E_r$  or its gradient [6, 7]. Hence we can imagine a single nonlinear  $q[\nabla T]$  dependence for the L- and H-modes in the edge plasma [6]. Here the shear flow, i. e.,  $n = 0/m = 0$  mode is responsible for the turbulence suppression ( $m$  and  $n$  are the poloidal and toroidal mode numbers).

A similar type of gradient-flux relation for the core plasma could again be a nonlinear one, either the N-figure type or the S-figure type, and the following argument applies to both cases. These multiple states can be considered again to be produced by the effect of the hidden variable or the control parameter [6]. Figure 2  $c$  schematically describes the transport coefficient as a function of the control parameter  $C$ . In the core plasma, the candidate for the control parameter is extended to the general axisymmetric potential variation. In other words, not only the  $n = 0/m = 0$  component but the  $n = 0/m \neq 0$  components as well can work for the control parameter. The influence of the  $n = 0/m = 0$  electric field is known for the core plasma [7]. Those of the  $n = 0/m \neq 0$  modes are also plausible: for instance, the nonlinear gyrofluid simulation on the ITG mode turbulence [8] has shown that the presence of such components can reduce the transport coefficient considerably.

The successive L-to-H transition can propagate quite rapidly. Consider, for instance, the case when layer 1 in Fig. 1 is just jumped to the H-state and the adjunct layer 2 still remains in the L-state. A small change  $\delta T$  is induced in layer 2 by the L-H transition in layer 1. If this change is enough to cause the transition in layer 2, the ratio between the heat flux  $q$  and  $N\delta T$  provides the propagation velocity  $V$  ( $N$  being the density). Writing the heat flux  $q$  as  $-N\chi\nabla T$ , the velocity  $V$  can be estimated as

$$V = \frac{T}{\delta T} \frac{\chi}{a},$$

where we use the simplification  $-\nabla T \approx \frac{T}{a}$ . The  $V$  value can be much larger than  $\chi/a$ . Thus, this high propagation velocity allows rapid transmission of

the information. The characteristic time  $\tau = a/V$  is estimated as

$$\tau = \frac{\delta T}{T} \frac{a^2}{\chi}.$$

This is much smaller than  $a^2/\chi$  if  $\delta T/T \ll 1$  holds.

The argument here is based on the model that the entire core plasma is close to the condition  $q = q^*$ , which is expressed by the ridge point in Fig. 2 *b*. This may be seen as a very special case if one uses the static relation of Fig. 2 *b*. The ridge point  $q^*$  could depend on various plasma parameters, so that the condition  $q(r) = q^*(r)$  may not be necessarily satisfied in a wide region of the core plasma. [The numerical simulation of the transport barrier, based on the static form of Fig. 2 *a*, has been done [9]. This analysis found the transport barrier formation and ELMs, but the transport barrier did not propagate into the core.]

The induced jump over  $q^*$  could be possible if one considers the dynamic situation. Figure 3 illustrates the  $q[\nabla T]$  relation in layer 2. In the L-phase, the functional relations and gradients are shown by the curve and open symbol, respectively. When layer 1 in Fig. 1 enters into the H-phase, the gradient at the interface of layers 1 and 2 starts to increase. The control parameter is also enhanced by the strong inhomogeneity associated with touching the H-phase and L-phase. The state in layer 2 changes as shown by the arrow in Fig. 3. Region 2 also turns into H-phase (denoted by the solid symbol). This can be considered the «tunneling» of the peak in the  $q[\nabla T]$  curves.

This picture of continuous transitions has a similarity to the «sand pile model» [10]. If the profile at some location of a mountain of sand reaches the critical profile of an avalanche, then the avalanche occurs. Owing to the local perturbations associated with the avalanche, the barrier of the static frictional force is overcome, and dynamic friction becomes smaller. The avalanche continues to start in the neighborhood. Due to the successive triggering of the avalanche, the event at the top propagates very quickly to the bottom. The self-organized criticality in this problem leads to the formation of the self-similar form of the sand pile. The case of the successive L-H transition in tokamaks can also provide a particular class of plasma profile, i. e., those of the L-mode and H-mode. These classes of profiles could be called phenomenologically «natural profiles» or «profile resilience» in various confinement modes [11].

Thus the very fast propagation of the confinement region from the edge inside the plasma core can be treated as a triggered L-to-H transition over the entire plasma cross section, similar to the sand pile formulation.

## Acknowledgments

This work was performed during a visit of one of the authors (BBK) to NIFS as a visiting professor. He thanks Prof. Iiyoshi for hospitality during his stay. Discussion with Dr. Kerbel is also acknowledged.

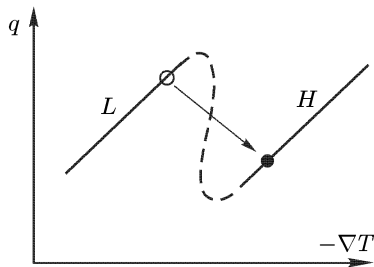


Fig. 3. Change of the gradient-flux relation in region 2 of Fig. 1. This region is located in front of the propagated L-H transition domain

---

*References*

1. *Wagner F. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1408.
2. *Neudatchin S.V., Cordey J.G., Muir D.G.* // Proc. 20th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. EPS Conference, Lisboa, 1993. V. 17C. Part I. P. 83.
3. *Sakamoto M., Sato K.N., Ogawa Y., Kawahata K., Hirokura S., Okajima S., Adati K., Hamada Y., Hidekuma S., Ida K., Kawasumi Y., Kojima M., Masai K., Morita S., Takahashi H., Taniguchi Y., Toi K., Tsuzuki T.* // Plasma Phys. Contr. Fusion. 1991. V. 33. P. 583.
4. *Frederickson E.D., McGuire K., Cavallo A., Budny R., Janos A., Monticello D., Nagayama Y., Park W., Taylor G., Zarnstorff M.C.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 2869.
5. *Yoshizawa A.* // Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 3313.
6. *Itoh S.-I., Itoh K.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 2276. See also *Shaing K.C. et al.* // Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1988. IAEA, Vienna, 1989. V. 2. P. 13.
7. *Itoh S.-I., Itoh K., Fukuyama A., Yagi M.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 1200.
8. *Waltz R.E., Kerbel G.D. and Milovich J.* // Phys. Plasmas. 1994. V. 1. P. 2229.
9. *Itoh S.-I., Itoh K., Fukuyama A., Miura Y.* (JFT-2M Group). // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 2485.
10. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 381.
11. *Kadomtsev B.B.* // Plasma Phys. Contr. Fusion. 1992. V. 34. P. 1931. *Coppi B.* // Comments Plasma Phys. Controlled Fusion. 1980. V. 5. P. 261. *Dnestrovskii Y.N. et al.* // Proc. 18th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. 1991. V. 15B, Part I. P. 413.

## INVESTIGATION OF THE SOKOLOV EFFECT\*)

A recently discovered effect [*Sokolov Yu.L. et al. // Physica Scripta. 1994. V. 49. P. 86*] of a super-long-range interaction of fast excited hydrogen atoms with a metal surface, involving a coherent 2s–2p state mixing, was theoretically interpreted in [2, 3]. The theoretical hypothesis is here verified in a series of specially devised experiments. The results of these experiments are reported.

### 1. Introduction

About three years ago an unexpected phenomenon was found [1]; it amounted to a super-long-range interaction of a fast-moving 2s (or 2s + 2p) hydrogen atom with a metal surface [1]. In recent experiments we were able to observe this effect at an up to 0,6 mm distance of the hydrogen atom trajectory from the metal surface.

The full set of our experimental data can be accounted for on the presumption of the existence of a previously unknown longitudinal (parallel to the hydrogen-atom velocity) effective electric field  $\mathbf{E}_*$  acting on the atom in the vicinity of the metal surface. In this connection, we have planned and carried out special measures for excluding any stray real electric field inside the experimental device.

However, all these measures were unable to eliminate the observed effect, which made us call the  $\mathbf{E}_*$  field «demonic».

Up to date, only one physical mechanism compatible with our experimental results has been proposed [2, 3]. In essence, consider a 2s-hydrogen atom flying above the surface of a metal: it interacts with the metal conduction electrons and forms with them a large number of Einstein–Podolsky–Rosen entangled-state pairs (EPR-pairs). Having interacted with the flying atom, the conduction-electron wave packet propagates back to the metal bulk and collapses there.

As a result (see Section 3), there appears a 2p-state addition to the initial 2s-hydrogen state. Phenomenologically, this situation is equivalent to the occurrence of an effective electric field  $\mathbf{E}_*$  oriented along the atom velocity vector.

At present, we run experiments in order to verify this hypothesis lying outside the limits of the generally accepted concepts concerning dynamic interactions.

---

\*) *Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B., Kucheryaev Yu.A., Podogov Yu.L., Sokolov Yu.L. // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 156–162.*

## 2. Experimental

The specific purpose of the present experiment was to determine the magnitude and orientation of the effective field  $\mathbf{E}_*$ . The object under study was the same atomic hydrogen beam as that used previously [1]: 22 keV hydrogen atoms in a superposition state  $2s_{1/2}(F = 0, F_x = 0) - 2p_{1/2}(F = 1, F_x = 0)$ . To obtain such a beam, the  $2s_{1/2}$ -atoms were made to pass through special RF fields prior to arrive to the interferometer. These fields quenched the  $2s$ -state hyperfine structure component with a  $F = 1$  total momentum.

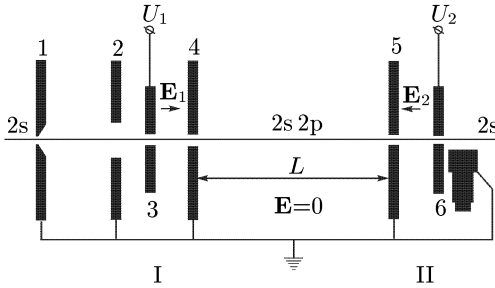


Fig. 1. Experimental layout

According to the concepts developed in [2, 3], the effective field  $\mathbf{E}_*$  is not a «real» electric field, so it cannot be measured with any macroscopic instrument. In order to measure its magnitude and orientation we devised a special technique based on the comparison of the  $\mathbf{E}_*$  effect upon the atom with the effect of a real external electric field  $\mathbf{E}$ .

Figure 1 presents the experimental layout. A  $0,002 \cdot 0,2 \text{ cm}^2$  cross-section, strip-shaped beam of  $2s_{1/2}$  atoms by a collimating slit 1 passed consecutively through systems I and II. System I comprises a guard electrode 2 with  $0,3 \text{ cm}$  wide slit and plates 3 and 4 with  $0,03 \text{ cm}$  wide slits (to let the beam pass). It serves to create a  $2s-2p$  state superposition due to the action of a longitudinal field  $\mathbf{E}_1$  applied between plates 3 and 4. The resulting beam passes through the analyser (system II) consisting of either a single slit (see Fig. 2 a) or a slit pair (Fig. 2 b). In the first analyser version the fast moving atom is subjected to the action of only the field  $\mathbf{E}_*$ , in the second version one is able to apply between the plates 5 and 6 an electric field  $\mathbf{E}_2$ , parallel or antiparallel to the atom velocity vector.

There is a detector D mechanically fixed to system II. It records

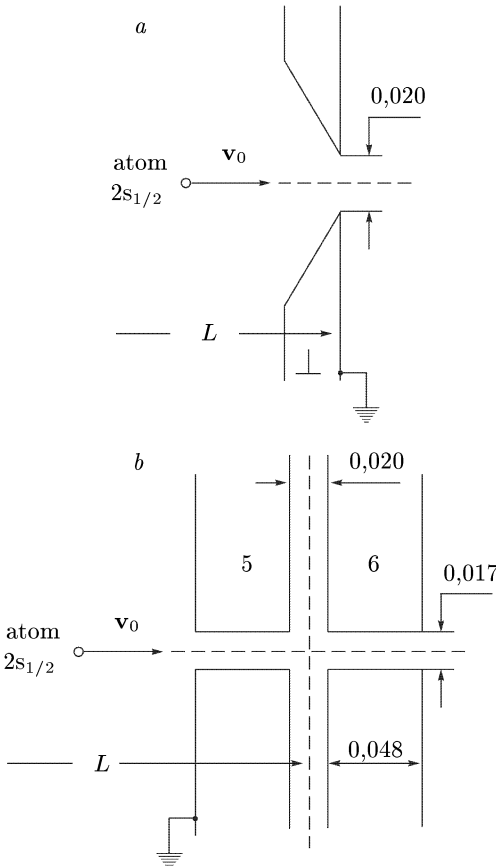


Fig. 2. Two version of system II: a — zero field system; b — with a longitudinal electric field

the intensity  $I_{2p}$  of the short-lived 2p-component of the beam (it detects the  $L_\alpha$ -quanta emitted in 2p–1s single-photon transitions). The unit consisting of plates 5 and 6 along with detector D is movable: one can displace this unit along the beam trajectory direction. The distance  $L$  between plate 4 and analyser II can be varied from 0 up to 1,5 cm. Displacing the analyser II — detector unit we measured the dependence  $I_{2p}(L)$ . In the geometry of the analyser version depicted in Fig. 2 *b* the electric field  $\mathbf{E}_2$  decreases abruptly at the plate 5–plate 6 space boundaries. This field «switch-off» together with the shortness of the gap ( $\delta = 0,02$  cm) between the plates 5 and 6 enables one to determine accurately the  $L$ -coordinate origin, i. e., the  $L = 0$  position in the  $I_{2p}(L)$  curve. For the geometry of Fig. 2 *a* the point  $L = 0$  coincides with the plane of slit 7.

All the slits 1–7, together with other elements of the interferometric system, were thoroughly gold-plated (the coating thickness was equal to 2–3  $\mu\text{m}$ ).

As the field  $\mathbf{E}_*$  does not vanish under almost any circumstances, the field  $\mathbf{E}$  acting upon atom on its flight through the gap 5–6 is a sum of the fields  $\mathbf{E}_2$  and  $\mathbf{E}_*$ . Evidently there are three possible combinations: (1)  $E = E_* + E_2$ , (2)  $E = E_* - E_2$ , and (3)  $E = E_*$ . In the case (3) the plates 5 and 6 were short-circuit interconnected and grounded.

Under the action of the longitudinal field  $\mathbf{E}$  there occurs an additional coherent mixing of the beam hydrogen atom 2s- and 2p-states. Accordingly, with the variation of distance  $L$  the 2p-radiation flux oscillates with a spatial period  $\Lambda_L = v_0/\nu$  cm. Here  $v_0$  is the atom velocity, while  $\nu$  represents the Lamb shift corresponding to the  $2s_{1/2}(F = 0, F_x = 0)$ – $2p_{1/2}(F = 1, F_x = 0)$  energy interval in the absence of the hyperfine structure component of the  $2s_{1/2}$ -state with  $F = 1$ . Evidently, the experimental dependence  $I_{2p}(L)$  represents a typical interference pattern.

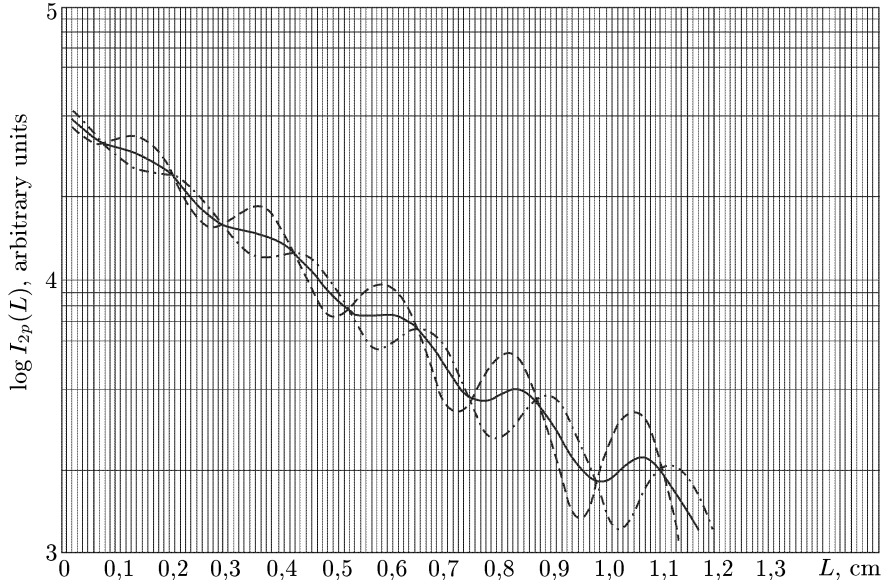


Fig. 3. Interference patterns described by the formula (1) and obtained with system similar to that depicted in Fig. 2 *b* at the action of external field  $\mathbf{E}$  with opposite sign and a «demonic» field  $\mathbf{E}_*$ .

When measuring the 2p-component intensity as a function of  $L$ , we determined at each  $L$  point three  $I_{2p}(L)$  values, corresponding to the three aforesaid field  $\mathbf{E}$  values. Figure 3 presents our experimental results obtained in a general case — i. e. with an analyser II similar to the one depicted in Fig. 2 *b*, but with different slit geometry. Here, the  $I_{2p}(L)$  curves are given in arbitrary units, plotted in semilogarithmic coordinates; they can be approximated by the following empirical relation

$$I_{2p}(L) = A \exp\left(-\frac{\gamma L}{v_0}\right) + BV \exp\left(-\frac{\gamma L}{2v_0}\right) \cos\left(\omega_L \frac{L}{v_0} + \varphi\right), \quad (1)$$

where  $A$  and  $B$  are constants,  $V = E \cdot \delta$  is the voltage,  $\gamma = 6,2646 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$  is the 2p-atom decay constant,  $v_0 = 2,09 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$ ,  $\nu = 909,89 \text{ MHz}$ ,  $\omega_L = 2\pi\nu = 5,7170 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ .

The first term in the expression (1) represents the free decay of the 2p-state of the initial beam atoms; the second term is due to the 2s- and 2p-amplitude mixing produced by the field  $\mathbf{E}$ . Substituting the values of  $v_0$  and  $\nu$  to the spatial period formula, one finds  $\Lambda_L = 0,23 \text{ cm}$ . This value coincides with the one found directly from Fig. 3.

### 2.1. Experiment I

In this experiment we used the analyser version of Fig. 2 *b* and could apply at will a voltage between plates 5 and 6. Actually, we created an electric field  $E = \pm 25 \text{ V/cm}$  in the space between these plates. The second term of expression (1) obtained in this experiment is presented in Fig. 4 for three

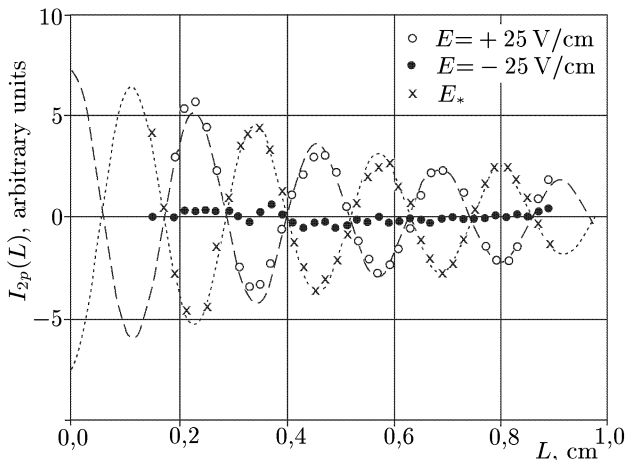


Fig. 4. Interference patterns described by the second term of formula (1) and obtained with system depicted in Fig. 2 *b*

field  $E$  values. For  $E = \pm 25 \text{ V/cm}$  curve fitting yielded the following value of the constant parameter appearing in (1):

$$BV = 7,4 \pm 0,2.$$

At the experimental value  $V = 0,5 \text{ Volts}$  we find  $B \approx 15$ . The phases of the curves corresponding to  $E = +25 \text{ V/cm}$  and  $E = -25 \text{ V/cm}$  are seen to be



opposite. This corresponds to rather small  $\mathbf{E}$  effect specific for the parameters of the analyser depicted in Fig. 2 b \*).

## 2.2. Experiment II

Here the 5 and 6 plate pair was replaced by a single slit 7 (see Fig. 2 a). In this case the origin  $L = 0$  coincides with the slit 7 plane. The obtained interference pattern was produced by the action of only the field  $\mathbf{E}_*$ . The fitting for the second term (depicted in Fig. 5) yielded the following data:

$$BV_* = 3,3; \quad V_* = 0,22V;$$

$$v_0 \approx 2 \cdot 10^8 \text{ cm/s};$$

$$\frac{\gamma}{v_0} = 3,07 \text{ cm}^{-1};$$

$$\frac{\omega_L}{v_0} = 28,5 \text{ cm}^{-1}.$$

A comparison of the empirical values with the corresponding theoretical estimates is to be found below.

## 2.3. Experiment III

This experiment was intended to determine the dependence of the 2s–2p transition amplitude on the distance  $l_0$  of the atomic beam from the metal surface. The general layout was similar to that of Experiment II, but for the geometry of the output single slit: the slit blade profile was square as that of slits 5 and 6. The vertical displacement of the blades enabled one to vary the distance  $l_0$ . Figure 6 presents the experimental points together with the theoretical curves. One readily sees that the  $\mathbf{E}_*$  effect was observable up to  $l_0 = 0,06$  cm.

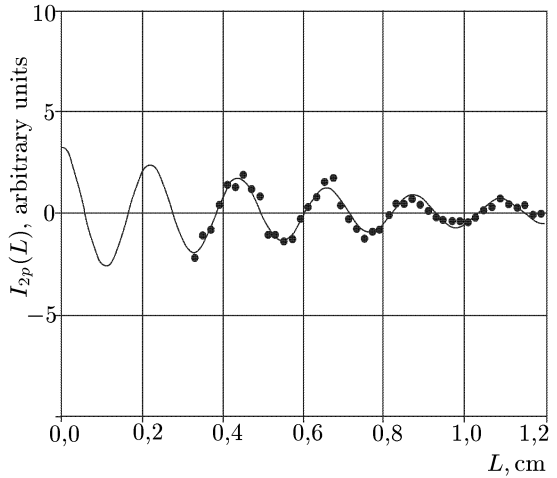


Fig. 5. The same as in Fig. 4, but in this case the interference takes place only due to  $\mathbf{E}_*$  effect

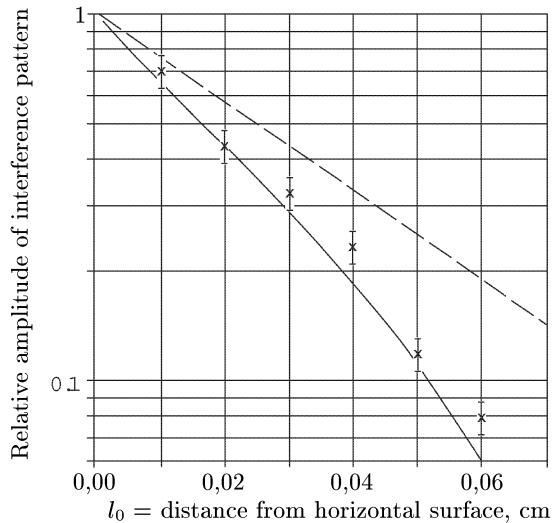


Fig. 6. The relative magnitude of  $\mathbf{E}_*$  effect as a function of the distance  $l_0$  of the atom trajectory from the metal surface: solid curve—calculations at  $D = 0,07$  cm; dashed curve—calculations at  $D = 0$ ; cross—experimental data

\*) The available experimental data definitely afford evidence of the effect-scale sensitivity to the metal surface structure and finish.

### 3. Theoretical discussion

A theoretical interpretation of the Sokolov effect was suggested in [2, 3]. It was based on the assumption that the atom interaction with conduction electrons is subjected to microcorrelations. Consider now this mechanism in more detail.

Let us begin with the simplest case of an excited hydrogen atom flying with a constant velocity  $\mathbf{v}_0$  above a metal surface (Fig. 7).

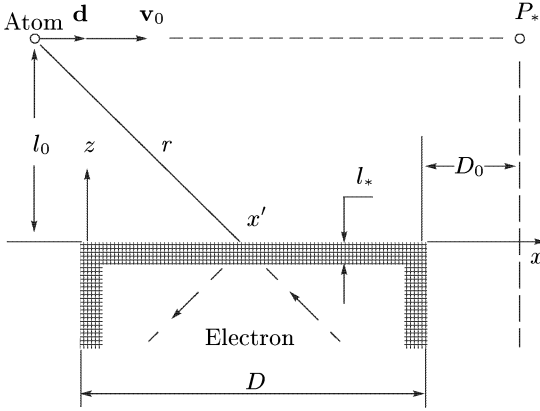


Fig. 7. Interaction of a moving atom with vertical and horizontal edges of a metal slit

Consider now how the atom interacts with a typical conduction electron (Fig. 7). Approximately, one can assume the interaction to take place when the electron is within a near-surface layer of  $l_* = n^{-1/3}$  thickness. All the other electrons are screened off due to the net effect of ions and electrons.

The energy of the atom interaction with the  $i$ th electron is equal to

$$U_i = -dE_{ix} = \frac{de(x - x')}{r^3}. \quad (2)$$

Here,  $d$ ,  $E_{ix}$ ,  $e$  and  $r$  represent the dipole momentum of the  $s \rightarrow p$  transition, the horizontal component of the  $i$ th electron electric field, the elementary electric charge, and the distance between the atom and the electron, respectively; also  $x$  and  $x'$  are the longitudinal coordinates of the atom and the electron, respectively.

Let  $\mathbf{v}_F$  represent the electron velocity near the Fermi distribution boundary. Then the time  $\Delta t$  of electron transit through the near-surface layer (to and from the reflection in between) is equal to  $\Delta t = 2l_*/\langle v_z \rangle = \pi l_*/v_F$ . We have taken into account that the average velocity  $\langle v_z \rangle = 2v_F/\pi$ . During the time  $\Delta t$  the amplitude of the atom 2p-state is being changed by the amount  $\Delta a_{pi}$  due to the interaction with the  $i$ th electron (we assume the 2s-amplitude to be close to unity). Hence,

$$i\Delta a_{pi} = \frac{U_i \Delta t}{\hbar}. \quad (3)$$

Summing up the amplitude elementary additions  $\Delta a_{pi}$  over all electrons present within the near-surface layer of thickness  $l_*$ , one might find the net am-

plitude addition  $\Delta a_p$  accumulated due to the effect of all the electrons during the time  $\Delta t$ . However, one has to take into account the ion lattice effect. If the conduction electrons were only slightly correlated with each other one could, indeed, simply sum up the electron and ion contributions, but the summation result is known beforehand. The net effect of both the electrons and ions which are present in the  $l_*$ -layer must vanish due to the layer quasineutrality; at least, this would be surely so if the atom were at rest. If, on the other hand,  $v_0 \neq 0$  some more delicate effects should take place due to electron microcorrelations after electron interaction with the excited atom. In order to clarify these effects let us examine in more detail what happens to every electron after its interaction with the moving excited atom.

In quantum mechanics every free electron can be represented by a wave packet. Such a packet emerges from the metal bulk, experiences a reflection from the metal boundary and propagates back to the metal bulk. If the wave packet size is much larger than the near-surface layer thickness  $l_*$ , the packet crosses this layer part-by-part.

Since we are interested in the effect averaged over many electrons, we can disregard the electron velocity  $x$ - and  $y$ -components and assume the velocity  $z$ -component (normal to the metal surface) to be equal to  $\langle v_z \rangle = 2v_F/\pi$ . Consider now the time  $\Delta t = 2l_*/\langle v_z \rangle = \pi l_*/v_F$ ; during this time a part of the wave packet manages to cross the boundary layer  $l_*$  and is replaced by some other part. If  $v_0 \neq 0$ , during the time  $\Delta t$  the atom traverses a distance  $\Delta x = v_0 \Delta t$  along its trajectory. Thus, the interaction energy (2) is altered during this time by the following amount

$$\Delta U_i = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x = de \frac{r^2 - 3(x-x')^2}{r^5} v_0 \Delta t. \quad (4)$$

This interaction-energy time variation can be expressed as a function of the coordinates of electron wave packet neighbouring parts within the wave packet size («thickness»)  $2l_*$ : to do so one should simply substitute  $\Delta t = \pi l_*/v_F$  into (4). The different parts of the wave packet yield individual contributions  $\Delta a_{pi}$  to the 2p-state amplitude net increase. In other words, the  $\Delta a_{pi}$  amplitude is a function of the electron coordinate measured along the wave packet. It means that the atom and electron combined wave function cannot be represented simply as a product of their wave functions. The states with such nonfactorized wave functions are called «entangled states». A typical example of such a state was considered by Einstein, Podolsky and Rosen in their famous paradox [5].

We can assert that a moving excited atom together with a conduction electron represent an EPR-pair of particles. Having interacted in the near-surface layer they fly apart: the atom moves on in vacuum along the metal surface, while the electron wave packet propagates inward, into the metal core. On its way to the inner part of the metal plate the free electron interacts with other electrons as well as with phonons, impurities and lattice defects. These interactions result in scattering: the wave packet is split into several parts. Let us regard as a principal postulate that the violation of the mutual coherence of these packet parts leads to the electron wave function collapse. Indeed, an individual electron can be localized only in one of the mutually decoherent wave packet parts.

Let  $\Lambda$  represent the post-collapse characteristic packet size. According to the uncertainty relation, a collapse of a wave packet reducing its size down

to  $\Lambda$  should result in an increase in the electron kinetic energy by an amount of  $3(\hbar/\Lambda)^2/(2m)$ . However, this is forbidden by the energy conservation law. This means that the average electron velocity after collapse should be decreased as compared with its initial average velocity by an amount  $\Delta u$  to be found from the condition  $mv_F\Delta u \sim \hbar^2/(m\Lambda^2)$ . The small decrease  $\Delta u$  is not a result of an interaction of any kind — it is due, instead, to the high probability of the electron collapsing into the slower part of the wave packet. One should bear in mind that the leading-edge part of a free particle wave always propagates somewhat faster than the trailing-edge part. Therefore, the collapses are asymmetric: they prevail within the slower-propagating part of the wave packet.

Let us define the figure of merit of the wave-packet asymmetry:  $\alpha = \Delta u/\Delta v$ , where  $\Delta v \approx \hbar/(m\Lambda)$  represents the post-collapse uncertainty of the wave packet velocity. Thus, one obtains the following expression for the asymmetry parameter:

$$\alpha = \frac{\Delta u}{\Delta v} = \frac{\hbar}{mv_F\Lambda} = \frac{a_0}{\Lambda}, \quad (5)$$

where  $a_0$  is the lattice constant; we estimate the electron density as  $n_0 \sim a_0^{-3}$ .

Let  $\lambda_0$  represent the electron mean free path in metal; then  $\tau = \lambda_0/v_F$  is the average time between subsequent collisions, i. e. between subsequent collapses. In each collapse the packet size is reduced to a value  $\Lambda$ , which is much less than  $\lambda_0$ . The uncertainty of the velocity in a collapse is equal to  $\Delta v \approx \hbar/(m\Lambda)$ . Thus, during a time  $\tau$  the wave packet spreads out to a size of  $l = \tau\Delta v = \lambda_0\hbar/(mv_F\Lambda) \sim a_0\lambda_0/\Lambda$ . We can assume the packet average size to have a value of the order of  $l$ . In addition, the magnitudes of  $l_*$ ,  $\lambda_0$  and  $\Lambda$  are much less than any characteristic length (or width) of any part of our experimental arrangement shown in Fig. 1.

The average time, required for a packet to pass across the near-surface layer is of the order of  $l/v_F$ . During this time the electron-atom interaction energy is changed according to the relation (4).

Let  $s$  represent a coordinate directed along the wave packet length (its origin  $s = 0$  coincides with the packet centre). Thus, the packet occupies a segment  $-l/2 < s < l/2$ . Evidently the amplitude addition  $\Delta a_{pi}$ , accumulated during a time  $\Delta t = \pi l_*/v_F$ , is equal to  $i\Delta a_{pi} = (U_i + \Delta U_i)\pi l_*/(\hbar v_F)$ . Taking into account this fact along with the expressions (2) and (4), one obtains

$$i\Delta a_{pi} = U_i \frac{\pi l_*}{\hbar v_F} + de \frac{r^2 - 3(x-x')^2}{r^5} \frac{v_0 s}{v_F} \frac{\pi l_*}{\hbar v_F}. \quad (6)$$

Here, the first r.h.s. term describes the electron interaction with an atom at rest. In fact, it is completely compensated within the near-surface layer by the opposite charge ion lattice. Since the first term vanishes, one has to consider exclusively the second term, which corresponds to a time-variable value of (4) after  $\Delta t = s/v_F$  substitution.

If the collapses were absolutely symmetrical with respect to variable  $s$  and if they precisely obeyed the  $|\psi|^2$  law, the averaged second term would also be precisely equal to zero. But such collapses would contradict the energy conservation law. As a result, the wave packets are asymmetrical: instead of vanishing, the averaged value of  $s$  turns out to be equal to  $\alpha l$ , where the asymmetry figure of merit  $\alpha$  is defined by the relation (5). Thus, the average

value of (6) is

$$i\Delta a_{pi} = de \frac{r^2 - 3(x - x')^2}{r^5} \frac{v_0 \alpha l}{v_F} \frac{\Delta t}{\hbar}, \quad (7)$$

where  $\Delta t = \pi l_*/v_F$ ,  $\alpha = a_0/\Lambda$ , and  $l = \lambda_0 a_0/\Lambda$ .

In order to find out the net effect produced by all the electrons, one has to multiply (7) by  $nl_* dx' dy = n^{2/3} dx' dy$  and to integrate the result over  $x'$ ,  $y$ . One can readily see that this expression can be represented in the following form

$$i\Delta a_p = -\frac{dE_* \Delta t}{\hbar}, \quad (8)$$

where  $E_*$  is the «demonic field» given by the expression

$$E_* = -\frac{\lambda_0 v_0 a_0^2}{v_F \Lambda^2} \frac{\partial}{\partial x} \iint \frac{e(x - x')}{r^3} n^{2/3} dx' dy. \quad (9)$$

One might state that the field  $\mathbf{E}_*$  is produced by some kind of surface charge density  $\sigma_*$ . However, it should be emphasized that both  $\mathbf{E}_*$  and  $\sigma_*$  do not represent any real physical objects (neither an electric field, nor an electric charge density, respectively). This makes them unmeasurable by means of any macroscopic device. We have artificially introduced these abstract notions (concepts) because they enable one to describe the electron microcorrelations after the electron interaction with excited hydrogen atoms.

For an infinite horizontal metal plane the integral in (9) vanishes due to the fact that the  $x - x'$  variable is antisymmetric. Hence, some effects due to the plate finite size are important. In particular, one has to take into account the contributions due to the plate vertical walls that are «seen» by the atom (Fig. 7). Therefore, in the general case of a square-shaped metal plate the net field  $\mathbf{E}_*$  represents a sum  $\mathbf{E}_* = \mathbf{E}_{*V} + \mathbf{E}_{*H}$ , where  $\mathbf{E}_{*V}$  and  $\mathbf{E}_{*H}$  are the following contributions of the vertical and horizontal plane surfaces of the metal slit, respectively:

$$E_{*V} = -U_* \int_{-\infty}^0 dz \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3},$$

$$r = [x^2 + y^2 + (z - l_0)^2]^{1/2}; \quad (10)$$

$$E_{*H} = -U_* \int_0^D dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x'}{r^3},$$

$$r = [(x - x')^2 + y^2 + l_0^2]^{1/2}; \quad (11)$$

where

$$U_* = \frac{e\alpha^2 \lambda_0 n^{2/3} v_0}{v_F}.$$

Let  $x' = 0$  be the coordinate of the left-hand vertical metallic wall of the slit shown in Fig. 7. Then one obtains by means of elementary calculations the following formulas for  $E_{*V}$  and  $E_{*H}$ :

$$E_{*V} = E_{*0} \frac{1}{1 + a^2}, \quad E_{*H} = E_{*0} \left( \frac{a}{1 + a^2} + \frac{b}{1 + b^2} \right), \quad (12)$$

where  $a = x/l_0$ ,  $b = (D - x)/l_0$ , and  $E_{*0} = 2U_*/l_0$ .

At low values of both  $E$  and  $E_*$  the time-evolution of the radiation intensity amplitude (under the assumption that  $a_s = 1$ ) is yielded by the equation

$$i\hbar \frac{da_p}{dt} = -\hbar \left( \omega_L + \frac{i\gamma}{2} \right) a_p - d(E + E_*). \quad (13)$$

Keeping in mind that  $t = L/v_0$  one can integrate this equation for the aforesaid experimental layout. In Experiment I the gap between the plates 5 and 6 was very short and the slits were very narrow; this justified the substitution of  $E = -V\delta(x - x_s)$  and  $E_* = -V_*\delta(x - x_s)$  into (13). Here  $V_* = 2\pi U_*$ ;  $x_s$  is the middle point between the plates 5 and 6. The result has the form of (1) for the first experiment with nonzero field  $E$  and the similar form with the  $V$  value replaced by  $V_*$  for the second with sharp slit blades. Comparing the corresponding expressions we find an empirical value of  $V_*$ , namely,  $V_* = 0,2 V$ . Assigning  $\lambda_0 = 10^{-5}$  cm,  $v_0/v_F = 2$ ,  $n = 10^{21}$  cm $^{-2}$  and  $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  cgse, we obtain the asymmetry parameter  $\alpha \sim 10^{-2}$ . Such a value of the asymmetry figure of merit seems to be reasonable. It corresponds to a  $\Lambda$  value exceeding  $l_*$  by about an order of magnitude.

The third experiment yielded a dependence of the amplitude  $a_{2p}$  on the distance  $l_0$  of the atom trajectory from the surface of a metallic blade. This dependence may be obtained also from the foregoing theoretical model.

A solution of equation (13) at  $E = 0$  has the form

$$a_p(t) = i \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_*(t') \exp(-i\omega t') dr', \quad (14)$$

where  $t' = x/v_0$ ,  $\omega = \omega_L + i\gamma/2$ , and

$$\omega_* = \frac{dE_*}{\hbar} = \frac{d}{\hbar} (E_{*V} + E_{*H}). \quad (15)$$

Substitution of expressions (12) into (15) gives

$$\frac{a_p}{a_{p0}} = iF(\theta, \xi, \rho) \exp[(i - \beta)(\xi + \rho)], \quad (16)$$

where

$$a_{p0} = \frac{2de\alpha^2 \lambda_0 n^{2/3}}{\hbar v_F}, \quad (17)$$

$\theta = 2\pi l_0/\Lambda_L$ ,  $\xi = 2\pi D/\Lambda_L$ ,  $\rho = 2\pi D_0/\Lambda_L$ ,  $\Lambda_L = v_0/\nu$ ,  $\beta = \gamma/(2\omega_L)$ , and  $D_0$  denotes the distance of an observation point  $P_*$  from the back vertical edge of the slit (see Fig. 7). Here

$$F(\theta, \xi, \rho) = H(\rho + \xi) - \mu H(\rho) + \theta \times [\mu V(\rho) - (\mu - 1)V(0)], \quad (18)$$

$$H(z) = \int_{-\infty}^z \frac{\exp[(\beta - i)x]}{\theta^2 + x^2} x dx, \quad V(z) = \int_{-\infty}^z \frac{\exp[(\beta - i)x]}{\theta^2 + x^2} dx, \quad (19)$$

and  $\mu = \exp[(\beta - i)\xi]$ . The terms containing  $H(z)$  describe a contribution from the horizontal slit edge and the ones containing  $V(z)$  correspond to vertical edges.

In the experiment a minimal observation distance  $D_0 = 0,3$  cm was chosen large enough to be sure that atom-slit interaction is fully completed. Therefore the relative magnitude of the  $E_*$  effect, i. e. the amplitude of the interference pattern normalized to that for  $l_0 = 0$ , must depend only on  $l_0$  and  $D$ . The result of numerical calculations for  $D = 0,07$  cm is depicted by the solid curve in Fig. 6. For comparison of this model with experiment the experimental data were extrapolated to  $l_0 = 0$  and then were normalized to obtain an initial value. One can conclude that the theoretical curve is in reasonable agreement with available experimental points. It must be noted that these data were obtained at exactly the same conditions, simply by increasing the width of the slit.

Analysis of these calculations shows that variation of  $D$  and  $D_0$  affects only some peculiarities of the whole picture, while the main trend of spatial dependence of the Sokolov effect is determined by the only physical parameter, the «Lamb wavelength»  $\Lambda_L = v_0/\nu$ . A dashed line in Fig. 6, calculated at  $D = 0$ , illustrates the case when a contribution of the horizontal surface of the slit edge is absent. In this last case the effect dependence on  $l_0$  has a simple form of  $\exp(-2\pi l_0/\Lambda_L)$ . The «Lamb wavelength»  $\Lambda_L$  is very large on the atomic scale and does not contain any properties of a metal surface. This is why the Sokolov effect looks like a really long-range and universal phenomenon.

The above described experimental data showed that  $\alpha$  is positive; the positive value of  $\alpha$  was predicted theoretically in the framework of a model considering the electrons to be free particles with a specific dispersion law. However, the electron behaviour in metals may be more complicated. It is known that in the vicinity of the Fermi surface the dependence of the electron energy  $W$  on its momentum looks like  $W = v_F(p - p_F)$ ; the dispersion appears as a second-order term with respect to  $p - p_F$ . Some theoretical calculations of the corresponding dispersion [6] seem to lead to a positive value of  $\alpha$ . However, one cannot exclude that the sign of  $\alpha$  may be sensitive to the surface finish.

#### 4. Conclusions

The comparison of the interference curve obtained in Experiment II with the reference curves obtained in Experiment I has shown that the curve for the field  $\mathbf{E}_*$  (depicted in Fig. 5) coincides in phase with the curve corresponding to  $E = +25$  V/cm. Therefore, one can conclude that — at least for Experiment II specific parameters — the field  $\mathbf{E}_*$  direction is along the atom velocity vector. The evaluation of the curve amplitudes for  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_*$  and  $E = +25$  V/cm, taking into account the field  $\mathbf{E}$  distortion in the narrow gap, has shown that the field  $\mathbf{E}_*$  magnitude is of the order of 12 V/cm.

The experiments dedicated to the Sokolov effect are in good agreement with the theoretical considerations: the asymmetry parameter  $\alpha$  has a theoretically correct sign and a reasonable magnitude. According to the theory the effective field  $\mathbf{E}_*$  arises as a result of microcorrelations of the conduction electrons in metal after their interaction with the excited hydrogen atom. Each such electron can be considered as a second partner in an EPR pair of entangled states. The thermal relaxation inside the metal core produces collapses of electron wave functions. These collapses due to the energy conservation law do not follow exactly the  $|\psi|^2$  law but have a very small asymmetry  $\alpha \sim 10^{-2}$  with a predominance of the slow part of the wave packet. As a result of a large number of collapses, the net effect is not a small one. The effect simulates the

appearance of a macroscopic «demonic field»  $\mathbf{E}_*$ . The  $\mathbf{E}_*$  is oriented along the direction of the atom motion and is proportional to the atom velocity  $\mathbf{v}_0$ . Due to this fact, the new quantum effect is irreversible: it changes sign together with  $\mathbf{v}_0$ . The reason is evident. If one imagines the inversion of time  $t \rightarrow -t$ , all the velocities will change their signs to the opposite ones, so that the situation can be «played back». However, the electron wave function collapse excludes a perfect reversibility. Indeed, the electron collapse, responsible for the observed effect, occurs after a reflection from the metal boundary. Therefore, in the direct and reverse (in time) processes these collapses would be situated at different segments of the electron trajectory. Correspondingly, the field  $\mathbf{E}_*$  should change sign upon substitution of  $-t$  for  $t$ . The field  $\mathbf{E}_*$  can produce both  $2s \rightarrow 2p$  and  $2p \rightarrow 2s$  transitions.

## Acknowledgements

The authors are grateful to Gebhard von Oppen for fruitful discussions and for his hospitality toward one of the authors at the Berlin University and to S.D. Fanchenko for valuable advices. The work was supported by the Volkswagen Stiftung (Federal Republic of Germany: grant I/68770) and the international Scientific Foundation: grant MNS 000.

## References

1. Sokolov Yu.L., Yakoveev V.P., Pal'chikov V.G. // *Physica Scripta*. 1994. V. 49. P. 86.
2. Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B. // *Physica Scripta*. 1994. V. 50. P. 243.
3. Kadomtsev B.B. // *Physics-Uspekhi*. 1994. V. 37. P. 425.
4. Kittel C. *Quantum Theory of Solids*. — New York: John Wiley & Sons, 1963.
5. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. // *Phys. Rev.* 1935. V. 47. P. 777.
6. Eckraft H., Fritsche L., Noffke J. // *J. Phys.* 1984. V. F134. P. 97.



# QUANTUM CHAOS IN GAS \*)

A new approach to the description of gas kinetics is proposed. The approach is based on a fundamental presumption which states that binary collisions of gas atoms, moving in a chaotic way, can serve as «interior measurements». These «measurements» result in collapses of atomic wave functions. The ensuing decoherence is capable of transforming the wave function of gas atoms into a set of small-size wave packets. Their kinetics is considered in detail. Quantum effects linear in the Planck constant are taken into account.

A simple gas at room temperature represents one of the most common physical systems of chaotic character. However, to date the chaotic behavior of a gas has not been considered from a quantum mechanical viewpoint. Such a viewpoint, though, is taken in this present work. The resulting description of the gas is that of wave packets that survive the effects of binary collisions, with the scattered waves resulting from the collisions eliminated by the chaotic motion of the atoms. This physical model leads to the appearance of terms linear in Planck's constant in expressions for the gas pressure.

## I. Introduction

Common gas at room temperature represents the simplest physical system of chaotic character. It was for this classical system that Boltzmann proposed a statistical description with a kinetic equation. However, to date, nobody has considered the chaos in a gas from the viewpoint of quantum mechanics. We do so here and now. For describing the chaos we use a fundamental presumption which states that a major part of the scattered waves, produced in binary collisions, is eliminated due to the chaotic motion of atoms, while the surviving waves assume the shape of packets and behave like particles. It means that the atomic wave functions are solely pure information carriers in spite of the fact that such features are produced simply by decoherence effects. The kinetics of wave packets produced and maintained by collisions has many delicate features which we examine in detail. Special attention is attracted to quantum effects linear in the Planck constant. They manifest themselves in the expression for the gas pressure and wave-packet evolution features.

A moderately low-temperature rarefied gas seems to be a quite simple physical system. Its potential energy is much lower than the kinetic. Hence, the perturbation theory seems to represent a very appropriate tool for describing the gas kinetics. However, the conventional way of using the perturbation theory (i. e., the diagonalization of the Hamiltonian operator through a unitary transformation) involves the appearance of divergences [1, 2]. These divergences are similar to those encountered in the classical large Poincare systems. To eliminate the divergences, Petrosky and Prigogine [1, 2] proposed

---

\*) *Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B. // Chaos. 1996. V. 6. № 3. P. 399–404.*

to discard the quantum wave description in favor of the Liouville operator formalism.

In contrast to this approach, we insist on the use of the atomic wave functions, but in a slightly modified manner [3]. Namely, we hazard a conjecture according to which the action of gas on the wave function of each atom can be regarded as equivalent to a measurement of some kind. Thereafter it will be called «self-measurement». As a result of numerous repetitious self-measurements in the gas, the wave functions of atoms assume the shape of wave packets. The formed profiles of these packets are maintained by persistent binary collisions of atoms. The size of the wave packets is of the order of  $\sqrt{\lambda\lambda_B}$ , where  $\lambda_B$  is the mean free path and  $\lambda$  is the de Broglie's wavelength. As we see, it is a mesoscopic composition of the purely classical value  $\lambda$  and quantum value  $\lambda_B$ . Below, we treat all these problems in detail.

## II. Wave-Packet Kinetics

Let an atomic gas have a density  $n$  at the temperature  $T$  (it is measured in energy units so that Boltzmann constant  $k = 1$ ). The temperature is not assumed to be low, so that  $\lambda_B = \hbar/(mv_T)$  is much smaller than the average interatomic distance  $n^{-1/3}$ . The value  $\lambda_B = \hbar/(mv_T)$  ( $m$  — atom mass and  $v_T$  — an average thermal velocity) shall be called the mean de Broglie wavelength. It differs from the usual definition  $h/(mv_T) = 2\pi\hbar/(mv_T)$  by the factor  $2\pi$ . Let  $\lambda = 1/(n\sigma)$  is the mean free path and  $\sigma$  is the collision cross section. We assume  $\lambda \gg n^{-1/3}$  so that the ratio  $\lambda_B/\lambda \ll 1$ .

Let us consider a wave function of some test particle. The evolution of this wave function consists of a chain of subsequent scatterings produced by collisions with the chaotically moving atoms. We assume that the most of the scattered waves will be destroyed by the subsequent collisions with other atoms so that only one scattered wave survives. The test particle is assumed to remain in the wave which can be «observed» by gas as a reality. This process looks like a «measurement» of the test particle produced by the gas itself. These «self-measurements» produce subsequent collapses of the wave function of the test particle. Similar events can occur with any gas atom. Our task is to consider the effects of «self-measurements». As we will see below, they lead to the formation of wave packets. They will be involved in a complicated scenario of their scatterings and deformations.

Let us assume that the wave function of the test particle represents a wave packet at some initial moment  $t = 0$ :

$$\psi(r) = (\pi b^2)^{-3/4} \exp\left(i\mathbf{k}^0 \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}^2}{2b^2}\right). \quad (1)$$

Here  $\mathbf{k}^0$  is the wave-number vector. The origin of the radius vector  $\mathbf{r}$  coincides with the center of the wave packet,  $b$  represents wave-packet size. We assume that the parameter  $b$  is a real number. It is easy to check that the free motion Schrödinger equation is satisfied by the function

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{b^2}{\pi}\right)^{3/4} \Lambda^{-3} \exp\left(i\mathbf{k}^0 \mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)^2}{2\Lambda^2}\right), \quad (2)$$

where  $\Lambda^2 = b^2 + i\hbar t/m$ ,  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{v}^0 t$ ,  $\mathbf{v}^0$  the particle velocity:  $\mathbf{v}^0 = \hbar\mathbf{k}^0/m$ .

According to (2) relation the wave packet is spreading out in time so that an average value

$$\langle (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)^2 \rangle = 1,5 \left( b^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 b^2} \right).$$

When collisions are taken into account, the wave function (2) decays as  $\exp(-t/2\tau)$ , where  $\tau$  represents the average collision time. The latter is equal to  $1/\nu$  where  $\nu = n\sigma\langle u \rangle$  is the mean collision frequency and  $\langle u \rangle$  is the average relative velocity. Since the relative velocity distribution is described by the Maxwellian distribution with a reduced mass  $m_* = m/2$  the  $\langle u \rangle$  value is equal to  $\langle u \rangle = \sqrt{2} v_T = 4\sqrt{T/(\pi m)}$ . Thus, at time  $t = \tau$  of the first collision after the wave-packet birth, the size of the wave packet corresponds to the value  $\langle (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)^2 \rangle = 1,5(b^2 + \hbar^2 \tau^2 / m^2 b^2)$ . As a function of  $b^2$  this value has a minimum at  $b^2 = \hbar/\tau/m$ . It is natural to assume that this value is valid for  $b^2$ . Thus  $b \approx \sqrt{\lambda \lambda_B}$ , where  $\lambda_B = \hbar/(mv_T)$ ,  $\tau \approx \lambda/v_T$ . It will be clarified below why the wave-packet size is indeed defined by this relation.

Consider now the wave-packet interactions. Let us start by considering two identical wave packets being born at  $t = 0$ , that collide at  $t = \tau$  with zero value of the impact parameter (frontal collision). We can consider the envelope evolution only because the momentum conservation law is automatically satisfied by the balance of wave-number vectors. A joint envelope of two particle wave packets with coordinates  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  is given by the relation

$$\psi = A \exp \left( -\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1^0)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2^0)^2}{2\Lambda^2} \right), \quad (3)$$

where  $A$  is the normalization factor.

Let us introduce new variables  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ ,  $\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2$  and  $\mathbf{R}^0 = (\mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_2^0)/2$ ,  $\boldsymbol{\rho}^0 = (\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_2^0)/2$ . We can choose the frame of reference with  $\mathbf{R}^0 = 0$  and  $\boldsymbol{\rho}^0 = \mathbf{u}t'$ , where  $\mathbf{u} = (\mathbf{v}_1^0 - \mathbf{v}_2^0)/2$ ,  $t' = t - \tau$ . In new variables, the envelope function (3) is

$$\psi = A \exp \left( -\frac{R^2}{\Lambda^2} - \frac{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0)^2}{\Lambda^2} \right). \quad (4)$$

One readily sees that the wave function is separated in the  $\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}$  variables.

Let us assume that the atom size is extremely small. In this approximation the scattering takes place at  $\rho \approx 0$ . At this point the incident wave has the form

$$\psi_t = \exp \left( -\frac{R^2}{\Lambda^2} - \frac{u^2 t'^2}{\Lambda^2} \right).$$

The scattered (outward) wave function  $\psi_f$  differs from  $\psi_t$  by the time shift  $t' \rightarrow t' - \rho/u$ . Thus, we obtain for  $\psi_f$  wave function the following expression:

$$\psi_f = \frac{B}{\rho} \exp \left( -\frac{R^2}{\Lambda^2} - \frac{(\rho - ut')^2}{\Lambda^2} \right). \quad (5)$$

Here  $B$  is a normalization factor,  $\Lambda^2 = b^2 + i\hbar t/m$ ;  $t = t' + \tau$ . In variable  $\boldsymbol{\rho}$  the function (5) looks like a thin spherical shell of radius  $ut$  and thickness  $|\Lambda| \ll \lambda$ . At time  $t' \sim \tau$  the shell radius reaches a value  $\sim \lambda$ . Then, the different parts of the wave envelope can experience collisions with other particles. Evidently,

a decoherence produced by such collisions should destroy the subtle structure of the spherical envelope pertaining to the two correlated particles. Let us examine qualitatively how this destruction is produced.

Let us direct the axis  $x$  along the expected secondary collapse. It is suitable to introduce new variables  $x_1 = x + ut'$ ,  $x_2 = \tilde{x} - ut'$  so that the dependence of  $\psi$  upon new variables  $x$ ,  $\tilde{x}$  takes the form  $\exp[-(x^2 + \tilde{x}^2)/(2\Lambda^2)]$ . The scattered wave dependence on the transverse coordinates is defined by its dependence on  $\mathbf{R}$  and is equal to

$$\exp\left[-\frac{(y_1 + y_2)^2}{4\Lambda^2} - \frac{(z_1 + z_2)^2}{4\Lambda^2}\right].$$

This function is not dependent upon  $y_1 - y_2$  and  $z_1 - z_2$ . It means that we can cut a sphere in pieces with sizes larger than  $|\Lambda|$ . Each of these pieces can be considered as a classical object (with negligible spread during the time interval of the order of  $\tau$ ). Classical particles in a gas have divergent trajectories. Approximately, this effect can be simulated by the equation

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_1 - y_2) = \frac{1}{\tau^2}(y_1 - y_2). \quad (6)$$

A similar equation is valid for  $z_1 - z_2$ . Since the variable  $(y_1 - y_2)$  corresponds to reduced mass  $m/2$  the potential energy  $U$  corresponding to Eq. (6) is equal to  $U = -m(y_1 - y_2)^2/(4\tau^2)$ . The corresponding Schrödinger equation, neglecting the kinetic energy term, has the form  $i\hbar \partial\psi/\partial t = U\psi$ . It yields  $\psi = C\rho^{-1} \exp[-m(y_1 - y_2)^2 t'/(4i\tau^2)]$ , where  $C$  is the normalization constant. A similar relation applies to  $(z_1 - z_2)$  dependence.

Now we can find out what happened to the wave function of the first particle due to the occurrence of decoherence. For this purpose, we multiply the function  $\exp[-(y_1 + y_2)^2/(4\Lambda^2) - (z_1 + z_2)^2/(4\Lambda^2)]$  by the conjugated function of relative motion at  $t' = \tau$ ,  $\exp[m(y_1 - y_2)^2/(4i\tau) + m(z_1 - z_2)^2/(4i\tau)]$ , and integrate the result over  $y_2, z_2$  variables. Using relation

$$\int \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2}\right) dx' = \left(\frac{\pi a^2 b^2}{a^2 + b^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2 + b^2}\right), \quad (7)$$

we obtain an expression which is proportional to  $\exp[-(y_1^2 + z_1^2)/(\Lambda^2 - i\hbar\tau/m)]$ . As we see,  $\Lambda^2$  transforms into  $b^2$  due to the decoherence effect produced by the second particle. A similar result can be obtained in a slightly different way. Imagine a spreading out spherical envelope. It collides with some third particle and collapses into a small spherical wave packet of the type

$$\exp\left(-\frac{(x - \tilde{x})^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{4\Lambda^2}\right).$$

Multiplying function (5) by this expression and integrating the product over  $\tilde{x}, y_2, z_2$  variables one obtains the «projection» of the function (5) onto the wave packet after collapse. This projection corresponds to the selection of a wave function  $\psi_c$  for the first particle after the joint collapse. This function is equal to

$$\psi_c = \frac{B'}{\rho} \exp\left(-\frac{x^2 + y_1^2 + z_1^2}{\Lambda^2 + \Lambda'^2}\right). \quad (8)$$

As  $\Lambda^2 + \Lambda^{*2} = 2b^2$ , the function (8) returns to its initial shape (1) of the wave function of the first particle. The collision of the spherical envelope, enclosing particles 1 and 2, with a third particle can be described in the following way. One can split the spherical envelope of radius  $\rho_0 = ut'$  into many pieces of size  $\sim |\Delta|$ . The third particle can experience a frontal collision with one such piece. After the «measuring» of the scattered wave, the rest of the envelope pieces will be annihilated. The number of pieces is proportional to  $4\pi(ut')^2/|\Lambda|^2$ , i. e., it increases very rapidly with time. That is why the collision with the third particle happens very sharply at  $t' \approx \tau$ .

Thus, we arrive to the following model of collapses. The wave packets of type  $\exp[-r^2/(2b^2)]$  are produced at each «real» collision. By «real collision» we mean such a scattering event which is sporadically measured and «remembered» later on by the environment. Such collisions take place after every  $\tau$  seconds, on the average, for the particle. The wave function can be normalized to unity after collapse. This function decays in time as  $\exp[-t/(2\tau)]$  and the square wave function decays in time as  $\exp(-t/\tau)$ . We can interpret this behavior either as the diminishing in time of the probability of the next scattering or as the Poisson distribution of scatterings with the probability value  $\Delta t/\tau$  during the interval of time  $\Delta t$ . For the time  $t \sim \tau$  any wave packet can produce a lot of scattered waves and only one of these waves can be «measured» by a gas. The gas itself plays the role of the measuring device which assimilates the energy and momentum of the scattered wave.

All the successive collapses have to be consistent with each other. If particle 1 meets particle 2, its wave function is  $\exp[-r_1^2/(2\Lambda^2)]$  before collapse and  $\exp[-r_1/(2b^2)]$  after collapse (the point of reference is at the center of the wave packet). The average value of  $\Lambda^2$  parameter is  $\Lambda^2 = b^2 + i\hbar\tau/m$ . The collapse of the first particle arises due to the decoherence effect produced by the partner of the previous scattering. Particle 2 has to experience a similar collapse. Later on (at the time  $t \approx 2\tau$ ) particle 2 will collapse into a wave packet of the type  $\exp[-r_2^2/(2b^2)]$  (the point of reference is again situated at the center of the wave packet).

If we come back from this state of particle 2 to the time  $t = \tau$ , we would obtain a wave packet  $\exp\{-r_2^2/[2(\Lambda^*)^2]\}$ , where  $(\Lambda^*)^2 = b^2 - i\hbar\tau/m$ . By this operation, we select such a component of the wave function at  $t = \tau$  which will evolve into  $\exp[-r_2^2/(2b^2)]$  to the time  $t = 2\tau$ . The joint wave function of two particles (particle 1 at the time  $t = \tau$  and the one calculated from the future wave function of particle 2) is equal to  $\exp\{-r_1^2/(2\Lambda^2) - r_2^2/[a(\Lambda^*)^2]\}$  at the point of collision  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ . This function is equal to  $\exp[-2b^2R^2/(b^4 + \hbar^2\tau^2/m^2)]$  where  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2 = \mathbf{r}_1$  at  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ . On the other hand, this function must be equal to  $\exp(-R^2/b^2)$  where  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  at the point of collision. Thus, we find  $b^2 = \hbar\tau/m$ .

Hence, we come to the following simple model for gas behavior. All the atomic wave functions can be considered as equal to the wave packets (2). The collisions of such packets produce spherical envelopes of correlated pairs of atoms. These envelopes are eliminated by the collisions with other atoms.

Discarding the «empty waves» and keeping only wave packets, we obtain quasiparticles with the wave functions (2). Each quasiparticle moves along a

classical trajectory and experiences sharp velocity changes at collisions. The statistics of these collisions can be found by means of quantum mechanics.

Each wave packet has  $\Lambda^2 = b^2 = \hbar\tau/m$  just after collision. Afterward,  $\Lambda^2$  depends on time as  $\Lambda^2 = b^2 + i\hbar\tau/m$ . The next collision takes place at  $t = \tau$ , on average, and  $\Lambda^2$  shrinks into  $\Lambda^2 = b^2$ . The statistical behavior of gas atoms can be described with the aid of kinetic equation.

### III. Wave-Packet Evolution

The wave packet (2) has an average momentum  $m\mathbf{v}^0 = \hbar\mathbf{k}^0$  and an average energy

$$\varepsilon = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{3\hbar^2}{4mb^2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{3\hbar}{4\tau}. \quad (9)$$

The second term here appears as a result of the kinetic energy operator averaging over the envelope of the wave function (2). In  $\tau = \text{const}$  approximation, the second term in (2) is constant. In this approximation, the wave packets are very similar to classical particles: they experience elastic collisions with a constant internal energy  $3\hbar/(4\tau)$ .

In thermal equilibrium with the Maxwellian distribution function, the average energy (9) is equal to

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}T + \frac{3}{4} \frac{\hbar}{\tau}. \quad (10)$$

Evidently, the average energy per degree of freedom is equal to  $T/2 + \hbar/(4\tau)$ .

Now we can determine a pressure  $p$  produced owing to the reflections of gas atoms from the smooth plane. Each wave packet can be regarded as a superposition of plane waves,  $\exp(ikx)$ . Each packet component transfers the momentum at a  $\hbar^2k^2/m$  rate. So, in order to obtain the pressure, we have to average the operator  $\hbar^2/m \cdot (\partial/\partial x)^2$  with the wave function (2) and over the Maxwellian distribution. This calculation yields

$$p = nT + \frac{n\hbar}{2\tau}. \quad (11)$$

One sees that the pressure deviates from the ideal gas pressure  $nT$  by a small quantity  $n\hbar/(2\tau)$ .

The relations (9)–(11) were obtained in the  $\tau = \text{const}$  approximation. Now we can perform more accurate calculations. Let the wave packet be propagating along the  $x$  axis with the velocity  $v_0 = \hbar k_0/m$ . Its dependence on  $x$  in the absence of decay is given by the expression

$$\psi = \exp\left(ik_0x - \frac{(x - v_0t)^2}{2\Lambda^2}\right), \quad (12)$$

where  $\Lambda^2 = b^2 + i\hbar t/m$ . The time value  $t = 0$  corresponds to the wave-packet origination. Let  $\nu(v)$  be the collision frequency for the particle with the velocity  $v$ . We have  $\nu(v) = n\sigma\langle u \rangle$ , where  $u$  is the relative velocity of other atoms with the given velocity of the test particle. It is easy to show that

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} v_T \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right) + \frac{mv^2 + T}{mv} \operatorname{erf}\left[\left(\frac{mv^2}{2T}\right)^{1/2}\right], \quad (13)$$

where  $\text{erf}(x) = 2\pi^{-1/2} \int_0^x \exp(-x^2) dx$ ,  $v_T = \left(\frac{8T}{\pi m}\right)^{1/2}$  is the mean thermal velocity. At  $v \rightarrow 0$  we obtain  $\nu(0) = \sigma n v_T$ . At  $v^2 \gg v_T$  we have  $\nu(v) = \sigma n v$  and the averaged value of  $\nu(v)$  is equal to  $\langle \nu(v) \rangle = \sqrt{2} \sigma n v_T$  since the relative velocity distribution corresponds to the Maxwellian distribution with the reduced mass  $m/2$ .

The wave packet with the average velocity  $v_0$  can be regarded as a superposition of plane waves with the wave numbers  $k = mv/\hbar$ . Let  $\nu(v)$  be equal to  $\nu(v) \approx \nu(v_0) + \nu'(v - v_0)$  where  $\nu' = (d\nu/dv)_{v_0}$ . The  $\nu'v$  term leads to wave-packet decay of the type  $(-\nu x/2)$ . Thus the  $x, t$  dependence of the wave packet looks as follows:

$$\psi = \exp\left(-\frac{\nu t}{2} + ik_0 x - \frac{(x')^2}{2\Lambda^2} - \frac{\nu' x'}{2}\right), \quad (14)$$

where  $x' = x - v_0 t$ ,  $\nu = \nu(v_0)$ , and  $\nu' = (d\nu/dv)_{v_0}$ .

The last term on the right-hand side of (14) suppresses the amplitude at  $x' > 0$  and enhances it at  $x' < 0$ . It turns out that this effect leads to the permanent slowing down of the wave packet. With the aid of relation (14) we obtain approximately

$$|\psi|^2 = \exp\left[-t - \frac{(x'')^2}{b^2} \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)\right], \quad (15)$$

where  $x'' = x' + 0,5b^2\nu'(1 + t^2/\tau^2)$ ;  $b^2 = \hbar\tau/m$ . We see that the envelope maximum  $x_a$ , which corresponds to a  $x'' = 0$  value, moves with a deceleration. With the aid of the wave function (14) we can obtain the energy variation with time:  $\Delta\varepsilon = -\hbar v_0 \nu' t / (2\tau)$ . This value is equal to one-half of the value  $mv_0 \dot{x}_a$ , which would be produced by the rigid slowing down of the wave packet. The  $\Delta\varepsilon$  value at  $t \sim \tau$  has the same order of magnitude as the second term in (10) expression.

The deceleration effect shows that the model with the invariable internal energy is too simplified. A more correct calculation must take into account all the small effects of the order of  $\lambda_B/\lambda$ . The most important is the effect of energy conservation.

The individual energy of a particle has an uncertainty of the order of  $\hbar/\tau$  for the collision time  $\tau$ . It means that the energy conservation law is relevant merely to many particles during the time interval  $t \gg \tau$ . But we start our consideration with one particle and assume for simplicity that  $t^2 \gg \tau^2$ . It means that we consider a free particle which survives with probability of  $\exp(-t/\tau)$ . The thickness of such a wave packet is equal to  $|\Lambda| \gg b$ . Hence, it can be considered as a superposition of many wave packets of thickness  $b$ . The broad wave packet produces many narrow wave packets after scattering at the usual wave packets with  $|\Lambda| \sim b$ . All secondary wave packets are decoherent at the distance  $\sim \lambda$  from the point of collision. So that they will experience independent collapses accompanied by the elimination of empty waves. If  $|\Lambda|^2 \gg b^2$  the secondary wave packets are almost orthogonal each other so that their collapses look like the usual «measurements». That is why the collapse along the  $x'$  variable near the point  $x_0$  can be taken into account by the factor  $\exp[-(x' - x_0)^2 / (2b^2)]$ . Multiplying expression (14) by this factor we obtain a new function after collapse. The energy operator averaging with this function

gives the following expression for  $\varepsilon(x_0)$  at  $t^2 \gg \tau^2$ :

$$\varepsilon(x_0) = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{\hbar}{4\tau} + \frac{\hbar^2 x_0^2}{2m|\Lambda|^4} + \frac{mv_0 x_0}{t} - \frac{mv_0 \nu'}{t} \left( x_0^2 + \frac{b^2}{2} \right). \quad (16)$$

It is reasonable to assume that the position values  $x_0$  of collapses are distributed according to  $|\psi(x_0)|^2 = \exp(-x_0^2 b^2 / |\Lambda|^4)$ . However, the direct use of such a distribution to the expression (16) gives a value different from the expression (9). It means that the collapses have to occur with a slight asymmetry to keep the energy in average. We conclude that  $\langle x_0 \rangle \neq 0$ . The average (16) with the  $|\psi(x_0)|^2$  function at  $\langle x_0 \rangle \neq 0$ ,  $t^2 \gg \tau^2$  gives the following result:

$$\varepsilon = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{\hbar}{2\tau} + \frac{mv_0 \langle x_0 \rangle}{t} - \frac{\hbar v_0 \nu'}{2m} \frac{t}{\tau}. \quad (17)$$

The energy conservation law has to be satisfied on the average over the Maxwellian distribution taking into account all the small effects of the order of  $\lambda_B/\lambda$ .

Let us average the expression (17) over the Maxwellian distribution with respect to the  $v_0$  variable. Since we have chosen the  $x$  axis in such a way that  $v_0 > 0$ , the average  $\langle v_0 \rangle = v_T$  and average value of  $\langle v_0 \nu' \rangle$  turns out to be equal to  $1/2\tau$ . To multiply the second term in (17) by the factor 3 to take into account the transverse degrees of freedom and to average (17) with the Maxwellian distribution function, we find the average energy  $\langle \varepsilon \rangle$ . It has to be equal to expression (10). Therefore, we find an averaged over Maxwellian distribution  $\langle x_0 \rangle$  value:

$$\langle x_0 \rangle = -\frac{3\lambda_B}{4} \frac{t}{\tau} + \frac{\lambda_B}{4} \frac{t^2}{\tau^2}. \quad (18)$$

This expression is valid at  $t^2 \gg \tau^2$  only. However, it can be considered as an appropriate interpolation when  $t \sim \tau$  since  $\langle x_0 \rangle = 0$  at  $t = 0$ . According to expression (18) a very small nonsymmetry of the order of  $\langle x_0 \rangle \sim \lambda_B$  is sufficient to assure the averaged energy conservation law with the accuracy  $\sim \lambda_B/\lambda$ .

The second term on the right-hand side of relation (18) balances the effect of the systematic slowing down of the wave packet according to relation (15). It is clear that the restoring of the energy conservation law cannot be reached without the asymmetry of collapses. The asymmetry described by the first term in expression (18) is responsible for the compensation of the increase of energy due to compression of the wave packet at each collapse. The asymmetry,  $\langle x_0 \rangle \neq 0$ , looks like a deviation from the universal law  $p \sim |\psi|^2$ . But, it is in fact a small deviation,  $\langle x_0 \rangle \neq 0$ , arising as a result of collapses of many particles with their joint wave function.

#### IV. Discussions

We present here a qualitative picture of the quantum chaos in a gas, starting from the following presumption: the chaotically moving gas atoms can play the role of tools for interior measurements. This «measuring tool» regards any atom exclusively as a particle with approximate values of both the coordinate



and momentum. This concept agrees with the description of an atom with a wave function having the shape of a wave packet of size  $\sqrt{\lambda_B \lambda}$ , where  $\lambda_B = \hbar/(mv_T)$  represents the average de Broglie wave wavelength and  $\lambda = 1/(\sigma n)$  is the mean free path.

Any collision of two wave packets produces a spherical wave envelope belonging to this pair of correlated particles. In fact, these particles, being in entangled states, correspond to the EPR pair in the Einstein–Podolsky–Rosen paradox [4]. The successive collisions of these correlated particles with other ones make their joint wave function transit to a chaotic state. The appearance of decoherency leads to a mutual collapse of the individual wave functions. A very complicated picture of many-particle interactions can be described in terms of wave packets (i. e., quasiparticles): Each wave packet arises in a «real» collision; this act is «recorded» later on by means of a «self-measurement» performed by the gas itself. Between collisions the wave packet propagates along a rectilinear trajectory. Any collision can be described by the quantum mechanics. The averaged atom motion is statistically described by the kinetic equation.

Each wave packet spreads out a little between collisions and somewhat shrinks in some sense at every collision act. If one neglects these pulsations in the wave-packet size, the model of continuous collapse can be regarded as valid [3]. But in order to outline subtle effects, it is necessary to take into account the successive discrete collapses. The description of such effects requires one to take into account the small terms, being of the order of  $\lambda_B/\lambda$ .

One such small effect manifests itself in the appearance of an additional term  $n\hbar/(2\tau)$  the expression (11) for the gas pressure. Let us explain, just now, its physical meaning. It is known that, according to the Van der Waals model of real gas, the pressure is equal to  $p = nT(1 - a)^{-1} \approx nT(1 + a)$  under two assumptions. First, the gas atoms are solid balls: second, there are no forces of attraction. In this expression, parameter  $a$  is equal to the relative inaccessible volume:  $a = 2\pi nd^3/3$ , where  $d$  represents the atom diameter. To incorporate in our theory quantum corrections we have to add the term  $2\pi nd^2 \lambda_B$ , which takes into account a «free» envelope of thickness  $\lambda_B$ , adjoining the «surface» (strictly speaking, the boundary of scattering) of atoms. The origin of this free zone is due to the fact that the wave functions have nodes at the boundary of scattering, i. e., at the sphere of radius  $d$ . Because  $\pi d^2 n = 1/\lambda$ , the pressure, taking into account this correction, is equal to  $p = nT(1 + a + 2\lambda_B/\lambda)$ . The substitution of  $T = \pi m v_T^2/8$ ,  $\lambda_B = \hbar/(m v_T)$ ,  $\lambda = v_T \tau \sqrt{2}$  yields

$$p = nT(1 + a) + \frac{\pi n \hbar}{4\sqrt{2} \tau}. \quad (19)$$

In the case of neglecting parameter  $a$ , this expression becomes close to (11).

In addition, there is an other interesting effect of the order of  $\lambda_B/\lambda$ . Its existence is due to the dependence of the collision frequency  $\nu(v)$  on the atom velocity  $v$ . It is described by the last term on the right-hand side of relation (14) and has the following meaning. A suppression of the front part in favor of an increase in the tail part leads to a permanent slowing down of the wave packet. As a result, the energy of the wave packet decays in time as  $\Delta \varepsilon = -\hbar v_0 \nu' t / (2\tau)$ , where  $\nu' = (d\nu/dv)_{v_0}$ . This expression can be rewritten as  $\Delta \varepsilon = m v_0 \Delta v_0$ , where  $\Delta v_0$  represents the variation of the average velocity of

the packet. It turns out that the temporal derivative of coordinate  $x_0$  of the wave packet center is twice as large as  $\Delta v_0$ :  $\dot{x}_0 = 2\Delta v_0$ . Combining the expressions derived in the present paragraph, one obtains the following relation:  $mv_0\dot{x}_0 = -\hbar v_0 t \nu' / \tau$ . Its averaging over the Maxwellian distribution function yields  $\langle x_0 \rangle = -\lambda_B t^2 / (2\tau^2)$ . Thus the wave packet suffers a systematic deceleration which is compensated due to a slight asymmetry of the collapses,  $\langle x_0 \rangle \neq 0$ , according to relation (18). The same asymmetry compensates the increase in energy owing to a shrinkage of the packet during collapses. This effect is described by the first term on the right-hand side of Eq. (18). This equation tries to explain very complicated mechanisms of many-atom interactions in terms of single-particle concepts. The involved many-particle interactions conserve the summary energy of the particle ensemble on the average. In other terms, the interaction process is driven by an existing decoherence and a selective elimination of a majority of scattered waves. Such «empty waves» do not participate in the subsequent formation of individual wave packets.

To summarize, although the quantum chaos in a gas is a rather sophisticated phenomenon, it can be described in the framework of a simple picture of wave-packet formation and interaction. This description permits one to take into account quantum effects linear in the Planck constant. The corresponding effects are small ones but there are situations when they play an essential role. In particular, they are important in the case of the excited hydrogen atom interaction with free electrons in a metal [5–7]. We will consider this matter in a forthcoming paper.

### References

1. Petrosky T., Prigogine I. // *Physica A*. 1991. V. 175. P. 146.
2. Petrosky T., Prigogine I. // *Phys. Lett. A*. 1993. V. 182. P. 5.
3. Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B. // *JETP*. 1995. V. 81. P. 897.
4. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. // *Phys. Rev.* 1935. V. 47. P. 777.
5. Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B. // *Phys. Scr.* 1994. V. 50. P. 248.
6. Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B., Kucherjaev Yu.A., Podogov Yu.L., Sokolov Yu.L. // *Phys. Scr.* 1996. V. 54. P. 156.
7. Kadomtsev B.B. // *Phys. Lett. A*. 1996. V. 210. P. 371.

---

## BROWNIAN MOTION OF A QUANTUM PARTICLE \*)

Brownian motion of a heavy particle in a light-atom gas is examined in the Schrödinger representation. We start from the presumption that the binary collisions are capable to make decoherent the wave functions of light atoms. A collapse of the wave function of a heavy particle is described. We derive an equation for a heavy-particle random wave function, resembling the Langevin's equation and having the structure of a Schrödinger's equation supplemented with an additional operator. The latter is responsible for stochastic impacts exerted by the gas atoms and molecules.

### 1. Introduction

Whatever a quantum theory manual is, it surely formulates first of all the principle of wave-corpuseular dualism. It is well known that the Schrödinger equation describes the wavelike properties of particles, while their corpuseular nature is revealed in measurements. A characteristic example is the recording of an electron-wave interference pattern by means of a photographic plate. The emergence of a perfect image depends on the accumulation of many visible spots in the photographic emulsion. In general, any confirmation of the fundamental relation  $p = |\psi|^2$ , which links the probability  $p$  with a squared modulus of a wave function  $\psi$ , involves a sufficiently large number of elementary acts. Fig. 3 from a review by Namiki and Pascazio provides a lucid illustration of how this happens in practice [1]. The occurrence of each visible spot within the photographic emulsion is due to a *collapse* of the wave function of an individual recorded electron. At this moment the electron wave function suddenly disappears everywhere outside the «spot» volume.

Moreover, the actual mechanism of the detection (measurement) is of nearly no importance: the same collapses would occur if, instead of a photographic plate, a cloud chamber was chosen as an electron-sensitive detector. In principle, it even makes no difference whether the particle is «measured» deliberately or spontaneously (e.g., due to atomic collisions by themselves). By definition a measurement is accomplished, if the considered particle had left behind some «memory» in the macroscopic medium of the *detector* it visited.

What happens when a test particle penetrates into a macroscopic body (e. g., a gas bulk at room temperature)? The very first act of particle-gas interaction will immediately cause a collapse of the particle wave function.

---

\*) *Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B. // Physics Letters A 1997. V. 231. P. 52–60.*

Somewhat later the test particle will experience the gas Brownian motion. Afterward it will achieve a thermal equilibrium with the gas and start to diffuse in space. The diffusion is described by a master equation for the density matrix.

Quantum-particle Brownian motion has been treated by many authors (see, e.g., Refs. [2–5], and references therein). The relevant mathematical apparatus they used is rather sophisticated. It tends to the operator calculus, in other words, to the Heisenberg representation. However, there exist experimental situations where the initial state of the quantum Brownian particle is represented with a spatially continuous wave function. Evidently, the experimental data of this kind would hardly be accessible to theoretical interpretation in the framework of the conventional approach.

Against this background, the invention of a simple and intuitively clear alternative description of the quantum-particle Brownian motion seems to be of paramount interest. In what follows we develop such a description in the Schrödinger representation for the particular case of Brownian particle behavior.

## 2. Theory

It was Kleinert and Shabarov who explored the possibility of describing the Brownian motion of a quantum particle by means of a Langevin's equation for the coordinate operator [5]. Nevertheless, a wave description seems to be more elegant and intuitively clear. If so, there arises the question whether is it possible to compose a Langevin-type equation directly for a heavy-particle wave function  $\Psi(\mathbf{R}, t)$  in  $\mathbf{R} = \{X, Y, Z\}$  coordinates. In other words the problem can be formulated as follows. Is there a random wave function for which one can set a phenomenological equation, similar to a Langevin's equation for a random velocity of a classical particle?

Indeed, the new equation should be no other than a generalization of the Schrödinger equation. Hence, the wave function of a heavy-particle  $\Psi$  should satisfy the equation

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 \Psi + K \Psi. \quad (1)$$

Here  $K$  represents a stochastic operator that describes the random kicks of gas atoms.

Let us try to explain what operator  $K$  is, starting on a qualitative level. Thus, consider a particle that experiences only one collision and, consequently, receives a momentum  $\hbar \mathbf{q}$ . The result of such an impact can be taken into account by multiplying the wave function  $\Psi$  by the factor  $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R})$ . Evidently, the spatial region involved in a single-molecule impact cannot be large, because the motion of gas molecules is decoherent (i. e., highly chaotic). Since the momentum is transferred to the heavy particle as a whole, the wave function of the latter should be immediately nullified everywhere except in the spatial region of the momentum transfer. In a multiple-impact case the operator can be constructed as

$$i\hbar \sum_N \delta(t - t_N) \Phi_N \exp(i\mathbf{q}_N \cdot \mathbf{R}). \quad (2)$$

Here,  $t_N$  and  $\hbar \mathbf{q}_N$  represent the time of the  $N$ th impact and the momen-

tum transfer in the  $N$ th impact, respectively. This equation includes a form factor  $\Phi_N$  describing the collapse of the wave function that occurred in the vicinity of a random point  $R_N$ . Of course, all the  $N$  point positions  $R_N$  must be intercorrelated. The temporal distribution of the impacts is presumably Poissonian.

Let  $\tau$  be the average time between successive impacts. The probability  $p_N$  of the absence of any impact within the  $t - t_N$  time span (starting at the moment of the  $N$ th impact) is equal to  $p_N = \exp[-(t - t_N)/\tau]$ . Consider now the one after the  $N$ th. The probability of the occurrence of the next impact within the  $t - t + \Delta t$  time interval is equal to  $p_N \Delta t / \tau$ .

From the gas molecule viewpoint, the appearance of the factor  $p_N$  can be plausibly attributed to the attenuation of the amplitude of the heavy-particle wave function produced by the light atom scatterings. As time goes, this initial amplitude is being attenuated in accordance with the  $\exp[-(t - t_N)/(2\tau)]$  law. Therefore, we express the operator  $K$  in the form of

$$K = -i \frac{\hbar}{2\tau} + i\hbar \sum_N \delta(t - t_N) \Phi_N \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}). \quad (3)$$

So we have come back to (1) which is similar to the Langevin equation. Operator (3) is analogous to the random force  $\mathbf{F}$ . The first term in the right-hand side of (3) represents the monotonic decay of the wave function: this is an analog of the friction force appearing in the classical Langevin equation. The second term in (3) describes the stochastic impacts caused by gas atoms and molecules. These impacts are capable of making the considered particle (along with gas molecules) pass over from one to other Hilbert space. In this respect our approach is similar to the Machida–Namiki theory [6] involving multi-Hilbert spaces. Otherwise, it differs from this theory, because we assume the occurrence of collapses in individual events. The wave-function attenuation, described by the first term in (3), implicitly takes into account the disappearance of the coherence. This attenuation has an analog in theoretical nuclear physics. The optical model of neutron-nucleus collisions comprises a term responsible for the absorption of the neutron wave function. This absorption was introduced for purely phenomenological reasons.

In order to obtain the form factor  $\Phi_N$  appearing in (3), it was necessary to know what the form is of the wave functions of gas atoms (or molecules). Recently we showed that the wave function of any atom (or molecule) of a gas can be described as a wave packet, moving along straight segments of the atom (or molecule) trajectory [7, 8]: the straight segment length depends on successive random collisions with other atoms. Each act of scattering (an *intrinsic measurement*) results into an additional shrinkage (contraction) of the wave packet. This piece of knowledge enabled us to find explicitly the form factor  $\Phi_N$  (see the second term in (7)). A corresponding derivation is briefly stated below.

Consider now a heavy particle with mass  $M$  surrounded with light particles (whose mass is  $m$ ) in a gas where  $m \ll M$ . Presumably, the heavy particle size is much less than the light-particle free path. Let us denote the heavy particle coordinates as  $X, Y, Z$  and assume that the heavy particle is in the vicinity of the coordinate origin. In the zero approximation (with respect to a small parameter  $m/M$ ), the heavy particle remains at rest for some time.

At this point, follow one of the light particles. Owing to its interaction with the heavy particle, the light particle undergoes a scattering. Let the wave function of the incident light particle be expressed in terms of a wave packet, rather similar to a plane wave  $\psi_i = \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$ , where  $\mathbf{k}_i$ , represents the initial wavenumber vector (so far, we disregarded the wave function normalization). Assuming the scattering to be spherically symmetrical, we can express the scattered  $S$ -wave in the form of

$$\psi_f = \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \exp[-i\omega t + i\mathbf{k}_f \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}) + i\varphi]. \quad (4)$$

Here  $a$  and  $\varphi$  represent the scattered wave amplitude and phase, respectively. The wavenumber vector of the elastically scattered wave is assumed to be  $\mathbf{k}_f = k(\mathbf{r} - \mathbf{R})/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ , where  $k = |\mathbf{k}_f|$ . At the scattering point  $\mathbf{r} = \mathbf{R}$  the phase of the scattered wave must coincide with that of the incident wave, i. e.,  $\varphi = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R}$ .

Now we are going to take into account all the gas particles and define the atomic-molecular chaos hypothesis.

— First, similar to the classical case, we presume that *before the scattering act* the light and heavy particles are not at all intercorrelated.

— Second, *after the light-heavy particle interaction* the wave function of the scattered light particle undergoes a decoherence due to subsequent scatterings on other light particles, i. e. on the gas atoms and molecules. (The gas temperature is assumed to be sufficiently high for this effect.) Indeed, owing to the scattering on other light particles — atoms and molecules — the structure of the wave function of a given light particle becomes more and more complicated.

— Finally, the given light-particle wave function splits into decoherent wave packets. Presumably, this particle certainly gets only into one of them. This is what is called *collapse of a wave function*.

Hereafter, any irreversible destruction of the coherence of a wave function will be attributed to a large number of random collapses of this wave function and respectively described.

At this point it is appropriate to find out what happens to the wave function of the heavy particle. The collapse of the wave function of a light scattered particle is assumed to occur at a distance  $L$  from the coordinate origin. The heavy particle is in the vicinity of the coordinate origin. The  $X$ -axis is oriented along the direction of propagation of the scattered light-particle wave packet. At large distances  $L \gg R$ , the wave function of the scattered light particle can be approximately expressed as

$$\psi_f = \frac{a}{L} \exp\left[-i\omega t + i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{R} + \frac{ikx}{2} + \frac{ik}{2} \frac{(y - Y)^2 + (z - Z)^2}{L}\right]. \quad (5)$$

Here we have taken into account that  $kX = \mathbf{k}_f R$ .

Let a rise of decoherence make the wave function (5) be reduced (collapsed) over  $x$ ,  $y$ . As a result, there appears a wave packet localized over  $y$  and  $z$ , namely

$$\psi_p = \exp\left[-i\omega t + ikx - \frac{y^2 + z^2}{2b^2}\right].$$

Here  $b$  represents the packet localization width. Let us «project» the scattered wave onto the collapsed state of  $\psi_p$ . This amounts to multiplying (5) by  $\psi_p^*$

and averaging the result over  $y, z$  and gives

$$\Phi = \langle \psi_p^* | \psi_f \rangle = \frac{a}{L} \exp \left[ -i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{R} - \frac{k^2 b^2 (Y^2 + Z^2)}{2(L^2 + k^2 b^4)} \times \left( 1 - \frac{iL}{kb^2} \right) \right]. \quad (6)$$

Presently, it should be taken into consideration that the joint wave function of both the heavy and light particles has a form of  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ . Hence, a collapse over  $y, z$  automatically leads to the reduction of the wave function of the heavy and light particles, according to form factor (6). If so, we seemingly have a pair of correlated particles involved in the «thought experiment» of Einstein, Podolsky, and Rosen. One can state that — in this particular subensemble — a collapse of the scattered particle makes the heavy-particle wave function undergo a contraction over both the  $Z$  and  $Y$  directions, in accordance with form factor (6).

It is sensible to assume that the length  $L$ , involved in the collapse of the light particle, characterizes the light-particle free path  $\lambda$  in a gas consisting of light atoms. As to the localization width  $b$ , it turns out to be of the order of  $\sqrt{\lambda_b \lambda}$  [7, 8]. Here  $\lambda_b$  represents the average de Broglie wavelength of gas atoms. Rigorous reasoning validates the relations  $b^2 k \sim \lambda \sim L$ . However, it is more practical to assume instead that  $L \rightarrow 0$ . This would simplify the following formulas at the price of tolerating slightly wider «inciting» collapses.

It turns out that there is an opportunity to additionally simplify the form factor (6). Indeed, our previous choice of the  $X$ -axis was arbitrary. In the general case, the localization of the light-particle wave function is permissible over any direction without restriction. Hence on the average, one can replace quantity  $Y^2 + Z^2$  with  $\frac{2}{3} R^2$  for any collapse. Taking advantage of this circumstance, we get approximately

$$\Phi = \exp \left( -i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{R} - \frac{\mathbf{R}^2}{3b^2} \right). \quad (7)$$

Here  $\mathbf{R} = \{X, Y, Z\}$  represents the radius vector of a heavy particle within a reference frame where the collapse occurs near  $R = 0$ .

The first term in the exponent of (7) merely represents the momentum interchange. The light particle acquires a momentum  $\hbar \mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)$ . Meanwhile, the heavy-particle experiences a recoil equal to  $-\hbar \mathbf{q}$ . The second term in the same exponent corresponds to the form factor  $\Phi_N$  appearing in relation (3). This term asserts that a collapse of a light-particle wave function is accompanied with a similar collapse of the heavy-particle wave function. Thus, the role of the *atomic-molecular chaos* in the quantum realm is not restricted solely to cause random impacts exerted by colliding particles. It also ensures successive collapses of the heavy-particle wave function, making this particle behave in some respects like particles in classical physics.

The very first collapse of the wave function of a scattered light particle causes a localization of the heavy-particle wave function in accordance with form factor (7): the localization scale is of the order of  $b$ . The further collapses of scattered light particles sharpen more and more the localization of the wave function of a heavy particle. The mechanism of the collapse-produced localization of wave functions will be clarified a little later. Now one might ask how to describe the motion of a quantum particle, if the observations are inaccurate and the resolution power of the instruments is insufficient for

revealing the «intrinsic structure» of wave packets. The answer is trivial: there exists a sole description, and it is close to the classical one.

Normally, the scale of the path traversed by a particle in the course of Brownian motion substantially exceeds the wave-packet localization size. If so, the motion of a packet is describable in terms of packet-«center mass» coordinates  $\mathbf{R}_0 = \{X_0, Y_0, Z_0\}$  and of the average velocity  $\mathbf{V}_0$ . These quantities are defined as follows,

$$\mathbf{R}_0 = \int \Psi^*(\mathbf{R})\mathbf{R}\Psi(\mathbf{R}) d^3\mathbf{R}, \quad (8)$$

$$\mathbf{V}_0 = -i \frac{\hbar}{M} \int \Psi^*(\mathbf{R})\mathbf{R}\nabla_R\Psi(\mathbf{R}) d^3\mathbf{R}, \quad (9)$$

where  $\Psi(\mathbf{R})$  is a wave function of the heavy particle.

Due to random impacts exerted by light particles,  $\mathbf{R}_0$  and  $\mathbf{V}_0$  become random time-dependent functions. These functions need to be statistically described. In the framework of an approximation, close to a classical description, the effects of the impacts can be expressed with two equations

$$M \frac{d\mathbf{V}_0}{dt} = \mathbf{F}, \quad M \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \mathbf{V}_0, \quad (10)$$

where  $\mathbf{F}$  is a random force.

Thus, we come back to the classical Langevin equation. The quantum properties of the considered particle are described with the nondiagonal elements of the density matrix

$$\rho(\mathbf{R}, \mathbf{R}', t) = \langle \Psi^*(\mathbf{R}, t)\Psi(\mathbf{R}', t) \rangle. \quad (11)$$

Here  $\Psi$  is a wave function, and the brackets mean averaging over the statistical ensemble.

Instead of using the ordinary density matrix, it turns out more appropriate to describe the statistical properties of a quasi-free quantum particle with a somewhat modified matrix representation.

Consider now the Schrödinger equation for the wave function of a free heavy particle,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 \Psi. \quad (12)$$

Let us assume the wave function  $\Psi(\mathbf{R}, t)$  to be very similar to a plane wave  $\Psi = A(\mathbf{R}, t) \exp(-\Omega t + i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R})$ , where  $\Omega = \hbar K^2/(2M)$  is the frequency and  $\mathbf{K}$  represents the wavenumber vector. Function  $A(\mathbf{R}, t)$  is an envelope weakly dependent on both  $\mathbf{R}$  and  $t$ . The substitution of the expression for  $\Psi$  into (12) gives

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_R A = \frac{i\hbar}{2M} \nabla_R^2 A, \quad (13)$$

where  $\mathbf{V} = \hbar\mathbf{K}/M$ .

If  $\hbar \rightarrow 0$ , we obtain an equation for a free transfer of amplitude  $A$  with velocity  $\mathbf{V}$ . If there is a superposition of wave packets, having different wavenumber vectors, each value of  $\mathbf{K}$  corresponds to its «own» amplitude  $A$ . Therefore, the amplitude  $A$  can be regarded as an  $A(\mathbf{R}, \mathbf{V}, t)$  function. Eq. (13) is valid for any of these amplitudes.

Let us compose now a  $P_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{V}, \mathbf{V}', t)$  matrix

$$P_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{V}, \mathbf{V}', t) = \langle A^*(\mathbf{R}, \mathbf{V}, t)A(\mathbf{R}', \mathbf{V}', t) \rangle. \quad (14)$$



With the aid of (13) we obtain

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla_R + \mathbf{V}' \cdot \nabla_{R'})P_0 = -\frac{i\hbar}{2M} (\nabla_R^2 - \nabla_{R'}^2)P_0. \quad (15)$$

It is suitable to introduce new variables

$$\mathbf{R}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{R} + \mathbf{R}'), \quad \mathbf{V}_0 = \frac{\mathbf{V} + \mathbf{V}'}{2}, \quad (16)$$

$$\mathbf{Q}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{R} - \mathbf{R}'), \quad \mathbf{W}_0 = \frac{\mathbf{V} - \mathbf{V}'}{2}. \quad (17)$$

After the substitution of these variables, Eq. (15) becomes

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{R_0} P_0 + \mathbf{W}_0 \cdot \nabla_Q P_0 = -\frac{i\hbar}{2M} \nabla_{R_0} \cdot (\nabla_Q P_0). \quad (18)$$

Assume  $P_0$  to be a sufficiently smooth function of  $\mathbf{R}_0$ . Then it is possible to set  $\hbar \rightarrow 0$  and to neglect the right-hand side of Eq. (18). Let us assign

$$P_0 = F(\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, t)U(\mathbf{Q}, \mathbf{W}, t).$$

Then, according to (18), the distribution function  $F$  satisfies the free-motion equation

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{R_0} F = 0. \quad (19)$$

Having separated the variables, we obtain an equation for the function  $U$ ,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2M} (\mathbf{K} - \mathbf{K}') \cdot \nabla_Q U = 0, \quad (20)$$

where  $\mathbf{V} = \hbar\mathbf{K}/M$ .

Now it is clear that  $U(\mathbf{Q}, \mathbf{W})$  is an analog of the Wigner function, i. e., a density matrix in a mixed representation. Let us replace the wavenumber vectors  $\mathbf{K}$  and  $\mathbf{K}'$  in (20) with the corresponding operators  $-i\hbar\nabla_{\mathbf{R}}$  and  $-i\hbar\nabla_{\mathbf{R}'}$  and pass from the  $\mathbf{K}, \mathbf{K}'$  (momentum) representation to the ordinary one. The result consists in the equation

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_Q^2 U. \quad (21)$$

It is clear that in the absence of collapses, the function  $U$  satisfies the free-motion Schrödinger equation.

Thus, we are able to express the distribution matrix in the form of

$$P_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{V}_0, t) = F(\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, t)U\left(\frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}'}{2}\right). \quad (22)$$

Here, the distribution function  $F(\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, t)$  corresponds to the diagonal part of the distribution matrix. On the other hand, the factor  $U[(\mathbf{R} - \mathbf{R}')/2]$ , normalized as  $U(0) = 1$ , describes the nondiagonal terms of the distribution matrix (i. e., of the envelope density matrix).

Let us inspect the problems of the description of nondiagonal elements of the distribution matrix. In the  $m \ll M$  approximation, the first term in the exponent of form factor (7) can be temporarily neglected and the heavy particle in the initial state can be regarded as motionless. Let  $\Psi_0(\mathbf{R})$  represent

the initial wave function. Then, the initial distribution matrix (when  $V = 0$ ) coincides with the initial density matrix, and both of them are proportional to the product  $\Psi^*(\mathbf{R})\Psi_0(\mathbf{R}')$ . Accordingly, the distribution function  $F_0(\mathbf{R}, \mathbf{V})$ , pertaining to the initial state, is given by the relation

$$F_0(\mathbf{R}, \mathbf{V}) = |\Psi_0(\mathbf{R})|^2 |\delta(\mathbf{V})|.$$

Meanwhile, the diagonal part of the density matrix is

$$\rho(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = |\Psi_0|^2.$$

Since for some time velocity  $V$  is equal to zero, let us examine, first of all, the coordinate-dependent part of the distribution matrix.

Already the very first collapse of the scattered light particle, occurring in the vicinity of  $\mathbf{R} = 0$ , leads to a localization of the heavy-particle wave function, making it shaped according to (7). Thus, after the first collapse within the considered subensemble with a collapsed wave function we have

$$\Psi(\mathbf{R}) = A \exp\left(-\frac{R^2}{3b^2}\right). \quad (23)$$

Here  $A$  is a normalization coefficient. With the aid of (23) it is easy to obtain the density matrix of the collapsed subensemble

$$\rho_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \Psi(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{R}') = A^2 \exp\left[-\frac{R^2}{3b^2} - \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{6b^2}\right]. \quad (24)$$

Here, we used the notation  $\mathbf{R}_0$  introduced in (16). Evidently,  $\rho_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  splits into two multipliers: diagonal factor  $F_0$  and nondiagonal factor  $U = \exp[-(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2/(6b^2)]$ . The presence of the diagonal factor  $F_0$  is due merely to a casual choice: we have chosen a subensemble, corresponding to the occurrence of a collapse near  $\mathbf{R} = 0$ . In principle, a localization of this kind may occur near any arbitrary point  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_a$ . In order to remain within the initial ensemble, it is necessary to average expression (24) with a weight factor over all the possible collapse coordinates ( $A$  should be proportional to  $|\Psi_0(\mathbf{R}_a)|^2$ ). Consequently, a few early collapses transform the density matrix into the expression

$$\rho_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \left|\Psi_0\left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{R}'}{2}\right)\right|^2 U(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|). \quad (25)$$

Here the nondiagonal part of the density matrix is described by the function

$$U(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|) = \exp\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{6\Lambda^2}, \quad (26)$$

where  $\Lambda = b$ .

The further collapses of the light-particle wave functions lead to a monotonic decrease in  $\Lambda$  as time goes on. In order to understand how this happens, let us trace the behavior of a subensemble whose initial wave function is like (23). The centers of the successive collapses might slightly shift off the coordinate origin. However, this effect can be ignored because we are mostly interested in the nondiagonal part of the density matrix. Indeed, the positions of the next-step collapse centers are predetermined at preceding steps and should be distributed proportionally to  $|\Psi|^2$ . The latter makes us believe that all the successive collapses would be concentrated around the origin of coordinates.

In this approximation, every new collapse manifests itself in a multiplication of the previous wave-packet form factor by an additional multiplier having the form of (23). To simplify matters, assume the effective cross sections of the light-light and light-heavy particle scattering to be the same. If so, the average time between collapses is equal to  $\tau = \lambda/v_T$ , where  $\lambda = 1/(\sigma n)$ . In addition,  $\sigma$ ,  $n$ , and  $v_T$  represent the cross section of the just mentioned scattering, the numerical density of light particles, and their thermal velocity, respectively.

Because each new collapse adds another multiplier (23) to the packet form factor, the wave packet becomes progressively thinner as time goes on. Its size tends to zero according to the following law,

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = A_t \exp\left(-\frac{R^2 t}{3b^2 \tau}\right), \quad (27)$$

where  $A_i$  is a normalizing coefficient, whose value depends on the subensemble choice. Elementary calculations transform (27) in

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -kR^2 \Psi + \Gamma \Psi. \quad (28)$$

Here  $k = 1/(3b^2 \tau)$  and  $\Gamma = \dot{A}_t/A_t$ . We assume  $\Gamma$  to be constant. When the localization of the wave function becomes sufficiently sharp, it is necessary to take into account the kinetic energy of the particle. For this purpose, the Schrödinger equation can be generalized by the allowance of collapses,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 \Psi - i\hbar k R^2 \Psi + i\hbar \Gamma \Psi. \quad (29)$$

This equation differs from (28) by the allowance of the kinetic energy operator. We see that (29) is the equation of a quantum oscillator with imaginary elasticity, the last term being responsible for the conservation of the wave function norm.

In the long run, the solution of Eq. (29) becomes stationary and can be sought in the form of  $\Psi = \exp[-i\Omega t - R^2/(2\Lambda^2)]$ . Inserting this expression into (29), we obtain

$$\Lambda^{-2} = (1-i)\Lambda_0^2, \quad \Lambda_0 = b \left(\frac{3m}{2M}\right)^{1/4}, \\ \Omega = \frac{3\hbar}{2M\lambda_0^2}. \quad (30)$$

Here we have assigned  $\Gamma = 3\hbar^2/(2M\lambda_0^2)$  for ensuring the frequency  $\Omega$  to be a real quantity.

The knowledge of  $\Lambda$  enables us to evaluate the quantity  $\Delta E = \hbar^2/(M\Lambda^2)$ . It expresses an increment in the heavy-particle kinetic energy, which is due to the wave-function collapse. The energy increment  $\Delta E$  may be substantially less than the average energy transfer  $Tm/M$  per act of light particle scattering on the heavy particle. It is noteworthy that when analyzing the collapse mechanism for  $\Lambda > b$ , it is superfluous to worry about the energy balance.

Let us remember now the first term in the exponent of the exponential form factor (7). It is responsible for the transfer of momentum to the heavy particle from the scattered light particles. The transferred momentum sets the heavy-particle wave packet in motion. The wave function of a moving wave

packet has the following form,

$$\Psi_{\mathbf{R}_0 \mathbf{V}_0} = \exp \left( -i\Omega t - \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)^2}{2\Lambda^2} + i \frac{M\mathbf{V}_0}{\hbar} \mathbf{R} \right). \quad (31)$$

Here  $\mathbf{K}_0$  represents the wavenumber vector;  $\mathbf{R}_0$  is the radius vector of the packet center mass, and  $\mathbf{V}_0 = \hbar\mathbf{K}_0/M$  is its velocity. The wave function is seen to be labeled with indexes  $\mathbf{R}_0$  and  $\mathbf{V}_0$ . The exponential factor  $\exp[-(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)^2/(2\Lambda^2)]$  can be regarded as the envelope of a plane wave. Knowing the form of the wave function, we are able to include the distribution matrix into our analysis,

$$P_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{V}_0, t) = F(\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, t)U(\mathbf{R} - \mathbf{R}'). \quad (32)$$

Here  $F(\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, t)$  is a distribution function corresponding to the diagonal part of the distribution matrix. A nondiagonal factor  $U$  describes the wave packets. If the distribution function is a smooth one over distances comparable with the packet localization size, the kinetic equation is applicable to trace the time evolution of function  $F$ . As to the nondiagonal factor, it is given by expression (26), where the localization width  $\Lambda$  is time-dependent.

It follows from (27) that, as time goes, the packet shrinks in accordance with the  $\Lambda \approx b(\tau/\tau)^{1/2}$  law until the packet size achieves its stationary value  $\Lambda_0$ . According to (30), the stationary packet size is  $\Lambda_0 \approx b(m/M)^{1/4}$ . Evidently, the increase in the heavy particle mass  $M$  makes the particle localization size tend to zero. In this way, a quantum wave bunch is transformed into a classical point corpuscle. In gases, the «intrinsic measurements» — by themselves — are capable to make the heavy particles approach the behavior inherent to classical physics in natural conditions.

Above we derived relation (30) on the assumption that the cross section  $\sigma$  of the atom-atom scattering is the same as the cross section  $\sigma_B$  of the atom-Brownian particle scattering. In reality,  $\sigma_B > \sigma$ , and estimates (30) should be revised. It is necessary to increase the quantity  $k$ , appearing in Eq. (28),  $\sigma_B/\sigma$  times. On the other hand, the stationary localization size, mentioned in (30), should be diminished  $(\sigma_B/\sigma)^{1/4}$  times. It is noteworthy that the relations (30) are valid only for small-size particles, so that  $\sigma_B \ll \lambda^2$ .

### 3. Conclusion

To summarize, we found that for an adequate description of the behavior of a heavy particle in a gas it is convenient to somewhat modify the density matrix approach. Namely, we introduced a density matrix for the wave packet envelopes (not to be mixed up with the ordinary density matrix). In order to avoid such a confusion, we named the former *distribution matrix*. If the distribution of the diagonal elements of the distribution matrix is rather smooth, Eq. (15) for this matrix spontaneously splits into two independent equations. The diagonal part of the matrix corresponds to a distribution function satisfying the kinetic equation. The nondiagonal part corresponds to the wave-packet form factor  $U(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$ .

The hypothesis of quantum atomic-molecular chaos brings us to Eq. (29), which describes the wave packet evolution. According to this equation, the

successive collapses enhance the wave packet localization (progressively diminishing its size). It also follows from (29) that the wave packet has a Gaussian shape in real space.

The obtained results reconstruct the scenario of the Brownian particle motion in gas as follows. Independently of its initial state (a coherent state inclusive), the particle evolves in accordance with the solution of a Schrödinger equation with allowance of absorption. The latter represents the disappearance of coherence in the initial state due to birth of the scattered waves.

Against this background, there occur collapses of the wave functions in arbitrary individual statistical-ensemble members. The very first collapse in each ensemble member destroys the initial wave function and gives birth to a wave packet with a  $b \sim \sqrt{\lambda\lambda_B}$  size (here  $\lambda$  and  $\lambda_B$  represent the free-path length of light particles and the average de Broglie wavelength of the same light particles, respectively). The collapses that occur afterward additionally reduce the nondiagonal matrix terms of the distribution matrix (in other words, they contract the wave function). The principle of multicollapse reduction of wave functions had been devised in Ref. [8] and was further developed here.

As to the statistical behavior of a Brownian particle, it is governed by the classical kinetic equation for the distribution function (i. e., by the diagonal part of the distribution matrix).

Our main goal here was to show that the gas medium can by itself impart the classical features to the quantum particle. The initial scatterings of light atoms lead to the wave function collapse. Later on the corresponding wave packet continues to shrink, reaching some constant shape at large time scale. The description of the Brownian motion itself has been done by many different ways [1–6, 9, 10].

### References

1. *Namiki M., Pascazio W.* // Phys. Rep. 1993. V. 253. P. 301.
2. *Schwinger J.* // J. Math. Phys. 1961. 2 P. 407.
3. *Caldeira A.O., Leggett A.J.* // Physica. 1987. V. 121 A. P. 587; 1985. V. 130 P. 374 (E).
4. *Leggett A.J., Chkravarty S., Dorsey A.T., Fisher M.P.A., Garg A., Zwerger W.* // Rev. Mod. Phys. 1987. V. 59. P. 1.
5. *Kleinert H., Shabarov S.V.* // Phys. Lett. A. 1995. V. 200. P. 224.
6. *Machida S., Namiki M.* // Proc. Int. Symp. Found. quantum mechanics. Tokyo, 1983. P. 127.
7. *Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B.* // JETP. 1995. V. 81. P. 897.
8. *Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B.* // Chaos. 1996. V. 6. P. 399.
9. *Mensky M.B.* // Continuous quantum measurements and path integrals. — Bristol: IOP Publishing, 1993.
10. *Hu B.L., Paz J.P., Zhang Y.* // Phys. Rev. D. 1992. V. 45. P. 2843.

# WAVEFUNCTIONS OF GAS ATOMS \*)

Power series in perturbation theory diverge when applied to wavefunctions of atoms in gas. We propose an approach in which the divergence is removed by taking into account the collapses of the wavefunctions explicitly. The collapses act on the scattered waves, in a self-consistent manner, and transform them into wave packets with localized envelopes.

## 1. Introduction

Gas under normal conditions is one of the simplest among the irreversible physical systems. It was just for gas that Boltzmann derived his kinetic equation. This equation led to the famous  $H$ -theorem that predicted a monotonic increase of entropy.

Later on, gas has been repeatedly treated in quantum theory. As a rule, it was approached in the framework of a density-matrix formalism. The corresponding kinetic equation is called *master equation*. At first sight, the problem seems solved.

But in reality, this is not so: numerous subtle phenomena await further investigation.

Prigogine and his colleagues promote the development of generally useful methods to describe irreversible quantum systems analogous to the classical *large systems* of Poincaré. Petrovsky and Prigogine are refining a method [1, 2] capable of describing a gas consisting of quantum atoms; their technique is based on taking the scattered waves into account. They found that when the scattered waves were treated with the aid of perturbation theory, there occurred a «self-scattering» paradox. The paradox seems to be an analog of the small-denominator problem encountered in classical theory. Although the just mentioned description is able to shed light on many problems, we prefer an alternative approach, which is more acceptable to our physical intuition.

Ab initio, we consider the collapses of the wave-functions of gas atoms [3, 4].

This means that we ascribe to wavefunctions a purely information-like nature; hence, this approach takes into account the reduction processes, in which the wavefunction vanishes in all places where the given particle turns out to be absent. This basic concept leads automatically to a description of the particle motion in gas in terms of wave packets.

## 2. Qualitative considerations

Consider a gas in a state close to the normal one. Binary collisions of atoms are presumed to be repeated, on average, at time intervals  $\tau = \lambda/v_T$ . Here  $\lambda = 1/(n\sigma)$ ,  $v_T = \sqrt{T/m}$ ,  $\sigma$ ,  $n$ ,  $T$ , and  $m$  represent the free path length, average

---

\*) Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B. // Physics Letters A. 1997. V. 225. P. 303–310.

thermal velocity, scattering cross section, numerical density, temperature, and atomic (or molecular) mass, respectively.

Gas particles collide so rarely that their wavefunctions are essentially analogous to those of plane waves. However, these plane waves cannot be unbounded: their sizes are definitely less than  $\lambda$ . This means that they resemble wave packets.

Since every wave packet has a finite lifetime, its energy is spread within  $\hbar/(2\tau)$ , where  $\hbar$  is the Planck constant and  $\tau$  is the average time between consecutive collisions. Due to this, the packet is somewhat spread in wavenumbers. In this connection, let us define two new quantities, namely  $\kappa$  and  $\Lambda_0$ , which specify the packet widths in the wavenumber and real spaces, respectively,

$$\kappa = \frac{1}{\Lambda_0}, \quad \Lambda_0^2 = \frac{2\hbar\tau}{m}. \quad (1)$$

The latter relation can be written as  $\Lambda_0 = \sqrt{2\lambda\lambda_B}$ , where  $\lambda_B = \hbar/(mv_T)$  represents the average wavelength of the de Broglie wave divided by  $2\pi$ . If the gas is sufficiently tenuous, then  $\lambda_B \ll \Lambda_0 \ll \lambda$ .

Let us show that  $\Lambda_0$  in fact represents the wave-packet width. For this purpose, consider two effects occurring in each binary collision of wave packets. First, the colliding wave packets interchange momentum. Second, the uncertainties (by  $\kappa$ ) in their wavenumbers sum up, causing a regular packet broadening in the wavenumber space.

The second effect can be taken into account by introducing the quantity  $D = \kappa^2/(2\tau)$ , which represents the diffusion coefficient in the wavenumber space. In other words, the wavefunction can experience a permanent diffusion in the  $k$ -space according to the law

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2\psi}{\partial k^2}. \quad (2)$$

To keep formula (2) as simple as possible, we have confined ourselves to the one-dimensional case. In order to go over to the configuration space, it is necessary to substitute  $-(x - x_0)^2$  for the operator  $\partial^2/\partial k^2$ . The  $x$ -coordinate is plotted along the direction of packet motion;  $x_0$  is the coordinate of the packet center. In the case of the extension to a more realistic three-dimensional case, the wave packets collapse over all the three coordinate axes. Let us write a generalized Schrödinger equation which takes into account the continuous collapse,

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi - i \frac{\hbar}{2\Lambda_0^2\tau} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2\psi + i\hbar\gamma\psi. \quad (3)$$

Here  $\mathbf{r}_0$  and  $\gamma$  represent the radius vector of the wave-packet center and a constant serving to normalize the wavefunction, respectively. The desired stationary solution of Eq. (3) can be sought in the form of

$$\eta = \exp \left[ -i\omega t - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{2\Lambda^2} \right].$$

An appropriate fitting of the constant  $\gamma$  makes the frequency  $\omega$  real. It is easy to obtain

$$\begin{aligned} \Lambda^{-2} &= (1 - i)\Lambda_0^{-2}, \quad \Lambda_0^2 = \frac{2\hbar\tau}{m}, \\ \omega &= \gamma = \frac{3\hbar}{2m} \Lambda_0^2 = \frac{3}{4\tau}. \end{aligned} \quad (4)$$

It is readily seen that

$$|\psi|^2 = \exp\left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{2\Lambda_0^2}\right],$$

which means that a ground-state wave packet has the form of a Gaussian function. The chosen value of constant  $\gamma$  ensures that all the higher-order eigen-functions of Eq. (3) decay in time.

### 3. Wavefunctions of atoms

In sufficiently tenuous gases the interaction of atoms is weak. So perturbation theory can be used. Let us write the Schrödinger equation for the wave-function  $\Psi$  of gas in the form

$$L\Psi = U\Psi. \quad (5)$$

Here  $L$  represents the operator of free-particle motion. It has the form

$$L = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \sum_j \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_j. \quad (6)$$

Meanwhile,  $U$  represents the potential energy of interaction

$$U = \sum_{j \neq l} U_{jl}. \quad (7)$$

The potential energy  $U_{jl}$ , is a function of  $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|$ , where  $\mathbf{r}_j$  and  $\mathbf{r}_l$  represent the radius vectors of the  $j$ th and  $l$ th particles, respectively. In the zeroth approximation, we assume that  $U = 0$ . So, it is natural that the wavefunction of gas turns into a product of single-particle wavefunctions,

$$\Psi^0 = \prod_j \psi_j^0. \quad (8)$$

This relation does not take into consideration the principle of the identity of particles (this will be taken into account below). Every zero-approximation wavefunction  $\psi_j^0$  satisfies the Schrödinger equation for the free-particle motion.

In the next approximation it is necessary to take into account the terms linear in  $U_{jl}$ . For this purpose, we substitute the zero-approximation function (8) into the right-hand side of Eq. (5). Accordingly, the desired wavefunction of the next approximation can be sought in the form

$$\Psi^1 = \sum_{j \neq l} \psi_{jl}^1 \cdot \prod_{s \neq j, l} \psi_s^0, \quad (9)$$

where  $\psi_{jl}^1$  satisfies the equation

$$L_2 \psi_{jl}^1 \equiv i\hbar \frac{\partial \psi_{jl}^1}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_j + \Delta_l) \psi_{jl}^1 = U_{jl} \psi_j^0 \psi_l^0. \quad (10)$$

Let us denote by  $G_{jl}^2$  a two-particle Green's function. It satisfies the homogeneous equation (10) with a source proportional to  $i\hbar\delta(j)$ . Then, the solution



of Eq. (10) can be expressed as

$$\psi_{jl}^1(t) = \int_t^0 G_{jl}^2(t-t') U_{jl} \psi_j^0(t') \psi_l^0(t') dt'. \quad (11)$$

This expression implies that  $\psi_{jl}^1(t=0) = 0$ . It will be shown below that this implication corresponds to the expected creation of either packet  $\psi_j^0$  or packet  $\psi_l^0$  at  $t=0$ .

If the first-order approximation function (9) were put in the right-hand side of the Schrödinger equation (5), we would be able to obtain the power-series terms quadratic in  $\bar{U}$ . It is rather easy to show that each quadratic term involves three particles, simultaneously: let them be, for example, particles with numbers  $j$ ,  $l$ , and  $q$ . Indeed, it would be possible to collect all the terms involving these particles. However, it seems more important to gather the terms that specify the reverse action experienced by the mentioned particles. For definiteness, consider, for example, the  $j$ th particle and gather all the terms proportional to  $\psi_j$  in both sides of Eq. (5). The collecting of relevant terms gives

$$L_1 \psi_j = \psi_j \sum_{l \neq q} U_{jq} \psi_{ql}^1 (\psi_q^0 \psi_l^0)^{-1} + \sum_{l \neq q} U_{ql} \left( \frac{\psi_{qj}^1}{\psi_q^0} + \frac{\psi_{lj}^1}{\psi_l^0} \right). \quad (12)$$

We substituted  $\psi_j$  for  $\psi_j^0$  in both the left-hand side of the equation and the first term of its right-hand side. The substitution was necessary because  $\psi_j$  might differ from  $\psi_j^0$  by small terms of the quadratic or higher orders (in the interaction energy).

The structure of the right-hand side of Eq. (12) is very complicated. Indeed, each function, analogous to either  $\psi_{qj}^1$  or  $\psi_{ql}^1$ , consists of a large set of scattered waves. In fact, during a time  $\tau$ , every particle manages to cover a path within  $\lambda$  and to create  $N = \lambda \Lambda_0^2 n \gg 1$  scattered waves. Although the amplitude of each of the scattered waves is very small, their sum brings a considerable contribution to the right-hand side of (12). Moreover, this contribution is expected to be supplemented with a diverging summand. It seems natural to believe that all the functions, analogous to  $\psi_q^0$ , are space-localized. Consider the peripheries of the space regions corresponding the «impinging» particle number  $j$  and the «target» particles with numbers  $q$  and  $l$ . Here the functions  $\psi_q^0$  tend to zero, while  $\psi_{qj}^1$  and  $\psi_{ql}^1$  can be not small. Such is the origin of divergences in the right-hand side of (12). It is plausible to assume that these peripheral interactions are capable of reducing any of the waves  $\psi_j^0$  into a wave packet.

In our opinion, the structure of the right-hand side of (12) clearly suggests the feasibility of wavefunction reduction. Inasmuch as the nature of the quantum wavefunction — unlike all the dynamic fields — is at most informational, there can occur such a specific phenomenon as a collapse (or wavefunction reduction) [5]. We can assume that the particle wave-function is instantaneously *reduced* vanishing in regions where the corresponding particle *is certainly not*

*situated*. The processes of this kind cannot be described by the Schrödinger equation. In our case, such collapses must occur on scattered waves. Indeed, the function  $\psi_{qj}^1$  comprises scattered waves with various momentum values  $\hbar\mathbf{k}_q$  and  $\hbar\mathbf{k}_l$ . It is clear that a decoherence mechanism prohibits the preservation of a subtle coherent superposition of many momentums  $\hbar\mathbf{k}_q$ . The reason is that, for a time  $\tau$ , the gaseous medium cannot «assimilate» more than a single value of the momentum of the  $q$ th particle. Hence, the decoherence, arising due to the right-hand side of (12), transforms the wave function into a wave packet  $\psi_j^0$ . Thus, we can postulate that, within a time  $\tau$ , the wavefunction of any particle should undergo a collapse and turn into a wave packet. We assume that it has a form

$$\exp \left[ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{2b^2} \right].$$

To complete the desired description, we have to find  $2b^2$ .

As soon as one of the scattered waves undergoes a reduction and is transformed into a wave packet, all the rest of the scattered waves expire (disappear) immediately. Tracing back the «life story» of a given packet, it is possible to detect the position of the scattering event and to identify the particle on which the scattering occurred.

Let us examine the collapse process in more detail. This requires us to go back to the linear-approximation equations (10), (11) and to reconstruct the behavior of the considered  $j$ th particle, using the standard scattering theory [6]. First of all, let us consider the attenuation of the  $j$ th particle. This is done with the aid of the imaginary part of the amplitude of zero-angle scattering, followed by summing over all the particles with numbers  $l \neq j$ . The next step is to substitute the obtained  $j$ th-particle attenuation into the equation of free-particle motion. Replacing  $n\sigma v_T = 1/\tau$ , for simplicity, we rewrite this equation as

$$L_1\psi_j^0 \equiv i\hbar \frac{\partial\psi_j^0}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_j\psi_j^0 + \frac{i\hbar}{2\tau} \psi_j^0 = 0. \quad (13)$$

Assume, now, that the  $j$ th particle has undergone a collapse resulting in a reduction of its wavefunction to the form of  $\psi_j^0 = \exp[-r^2/(2b^2)]$  at  $t = 0$ . The following evolution of  $\psi_j^0$  can be traced with the aid of Eq. (13). Up to normalization, it gives

$$\psi_j^0 = \left( -\frac{t}{2\tau} - \frac{r^2}{2\Lambda^2} \right), \quad (14)$$

where  $\Lambda^2 = b^2 + i\hbar t/m$  and  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j^0$ . Evidently, the squared amplitude of the wave packet decays in time as  $\exp(-t/\tau)$ . This means that the next scattering event will occur, on average, at time  $t = \tau$ , when  $\Lambda^2 = b^2 + i\hbar\tau/m$ . Now we have to obtain the scattered waves with the aid of Eq. (10) on the assumption that the  $\psi_j^0\psi_l^0$  product is proportional to  $\exp(i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}_j + i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}_l)$ . Let  $\mathbf{k}'_j$  and  $\mathbf{k}'_l$  represent the postscattering wavenumber vectors. The momentum conservation law is  $\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l = \mathbf{k}'_j + \mathbf{k}'_l$ . We assume the scattering to be spherically symmetrical. As

$$\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}_l = \frac{\mathbf{k}'_j + \mathbf{k}'_l}{2} \cdot (\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_l) + \frac{\mathbf{k}'_j - \mathbf{k}'_l}{2} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l),$$

the desired time-independent solution of (10) for plane waves can be expressed as

$$\psi_{jl}^1 = A \frac{\exp [i(\mathbf{k}'_j + \mathbf{k}'_l) \cdot (\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_l)/2 + iq|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|]}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|}. \quad (15)$$

Here  $2q = |\mathbf{k}'_j - \mathbf{k}'_l| = |\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_l|$ , while  $A$  represents the scattering amplitude. At this point, one might take into account the temporal dependence of the solution and obtain the shape of the scattered wave packets. To achieve this goal, it would suffice to put into (10) a wave packet  $\psi_j^0$  and then to solve the time-dependent problem.

We choose, instead, a simpler and more convenient approach. Let us present the scheme of our reasoning.

Assume that, for instance, the  $j$ th particle undergoes a second collapse at a particular time  $t = \tau$  after the first collapse. Due to this process, function (14) turns into  $\exp[-r^2/(2b^2)]$ , which restores its shape and all the scattered waves expire, except one. Let the sole surviving one be, for example, the  $l$ th wave, undergoing the collapse together with the  $j$ th wave. It is natural to believe that the wavefunction of the  $l$  particle is reduced to a packet of the same form  $\exp[-r^2/(2b^2)]$  as that of the one mentioned above. The collapse of the  $l$ th wave should occur at a distance  $\lambda$  from the scattering site, and, consequently, with a time delay  $\tau$ .

Hence, we can retrace the evolution of its wave-function back to  $t = 0$ . This is precisely the packet which generates the form-factor that transforms function (14) into an initial wave packet. It follows from the Schrödinger equation that  $\psi(-t) = \psi^*(t)$ . Treating this equality with the aid of (14) gives  $|\psi(\tau)|^2 = |\psi(0)|^2$ , whence we obtain  $b^2(b^4 + \hbar^2\tau^2/m^2)^{-1} = 1/(2b^2)$ , i. e.  $b^2 = \hbar^2\tau/m$ .

The size of the wave packet pulsates in a collapse-by-collapse mode. Immediately after each collapse, the packet has a form of  $|\psi|^2 = \exp(-r^2/b^2)$ . Before the next collapse, the packet form is given by the relation (14).  $|\psi|^2 = \exp(-r^2/\Lambda_0^2)$ , where  $\Lambda_0^2 = 2b^2 = 2\hbar^2\tau/m = 2\lambda\lambda_B$ . Neglecting these pulsations, we arrive at the «continuous collapse» model (see (3)). This model implies that the wave packet has a permanent shape with a constant width  $\Lambda_0$ .

#### 4. Dynamic basis

At this point, we are going to take into account the identity of particles. It is convenient to start with a Bose gas. In this case we must put into (8) an additional operator  $P$ , which rearranges the particles and summarizes the results of all the permutations, with due normalization. The so revised expression (8) (supplemented with a commutator operator  $P$ ) should be multiplied by a product of all the complex conjugate wavefunctions (8) but one and be integrated over all the  $\mathbf{r}_j$  except  $\mathbf{r}_1$ . In this manner we obtain a function  $\psi(\mathbf{r}_1)$ . The substitution of  $\mathbf{r}$  for  $\mathbf{r}_1$  gives

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_j \psi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^0). \quad (16)$$

Here  $\psi_j$  and  $\mathbf{r}_j^0$  represent the wavefunction of the  $j$ th packet and the radius vector of the wave packet center, respectively. In the continuous collapse model,

we get

$$\psi_j = a_j \exp \left[ i \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^0)^2}{2\Lambda^2} \right]. \quad (17)$$

Here  $\mathbf{k}_j$  is the wavenumber vector of the  $j$ th packet,  $a_j$  is its amplitude. Thus, the symmetrized single-particle wavefunction (16) consists of a set of wave packets (17). Multiplying  $\psi(\mathbf{r})$  by  $n\psi^*(\mathbf{r})$  gives

$$n|\psi(\mathbf{r})|^2 = \sum_j |\psi_j(\mathbf{r}^2)|^2 + \sum_{j \neq l} \psi_l(\mathbf{r})\psi_j(\mathbf{r}). \quad (18)$$

Here, the first term in the right-hand side summarizes the «spikes» occurring in the vicinity of the centers of wave-packet (17). In the classical limit this sum tends to the microscopic density  $n_\mu$ ,

$$n_\mu = \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^0). \quad (19)$$

It is easy to remark a similarity between the first term in (18) and a «spread delta-function» version of expression (19).

As to the second term in (18), it turns out to be small. The point is that the products  $\psi_l^*(\mathbf{r})\psi_j(\mathbf{r})$  have contributions only from overlapping wave packets, and the signs of these contributions are indefinite. One can estimate the second term by averaging its squared modulus over  $\mathbf{r}$ . Such estimates show that the magnitude of the second term is within the level of density fluctuations. This entitles us to neglect the second term. Thereafter, it is convenient to limit our analysis to a unit gas volume. In the first sum of (18) we can include only the packets that are situated in this unit volume. Therefore, the function  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  is assumed to be normalized to unity:  $\overline{|\psi|^2} = 1$ .

Let us examine, now, the product  $\prod_j \psi(\mathbf{r}_j)$ . Up to normalization, it is written in the form

$$\prod_j \psi(\mathbf{r}_j) = P \prod_j \psi_j(\mathbf{r}_j) + \prod_j' \psi_j(\mathbf{r}_j). \quad (20)$$

In the first term, all the  $\psi_j(\mathbf{r}_j)$  are different. The second term (written in a symbolic form) corresponds to the cases when two or more particles occupy simultaneously a joint «cell» of size  $\Lambda_0^3$ . If the Bose gas is nondegenerate and the wavefunction  $\Psi(t)$  evolves normally by the wave-packet scattering, the presence of two particles in the same wave packet is extremely rare.

The prevalence of the first term over the second in the right-hand side of relation (20) can be proved in a purely formal manner. Indeed, the former is built up due to  $n!$  permutations, while the number of permutations in the case when two particles share the same wave packet is only  $n(n-2)!$ , i. e.  $(n-1)$  times less. It is assumed from the outset that  $n \gg 1$ . Therefore, the last term of (20) is to be neglected.

Thus, the functions  $\psi(\mathbf{r})$  given by (16), constitute a natural basis for the approximate representation of an arbitrary state of atomic gas. Therefore, we name function (16) *dynamic basis*. The wavefunction  $\Psi^0$  of an ensemble of

particles in the zero approximation is

$$\Psi^0 = \prod_j \psi(\mathbf{r}_j). \quad (21)$$

This representation is approximate because it implies that all the  $\psi_j(\mathbf{r})$  have a standard wave-packet shape as derived in the framework of the continuous collapse model.

The individual wave-packet is given by the expression (17). The «filling» of each wave packet consists of a plane wave  $\exp(i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})$ . This circumstance enables us to renumber all the particles occupying the considered unit volume. This can be done by means of arranging these particles according to the increase of both the coordinates  $\mathbf{r}_j^0$  and wavenumbers  $\mathbf{k}_j$ . Thus, instead of labeling the particles with numbers  $j$ , we can label them with vector pairs  $\mathbf{r}, \mathbf{k}$ . Hence, we assume that

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} a(\mathbf{r}, \mathbf{k}) f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (22)$$

Here  $\psi(\mathbf{r})$  is the same wavefunction (16), while the factor  $a(\mathbf{r}, \mathbf{k})f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$  represents the envelopes. All the envelopes have a standard form of  $(1/\sqrt{n}) \times \exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)^2/(2\Lambda^2)]$ . Function (22) can be put into the Schrödinger equation. Neglecting the small terms we obtain an equation that describes the free motion of wave-packet amplitudes

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a = 0. \quad (23)$$

Here we have denoted by  $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m$  the average velocity of a wave packet. It is easy to see that a precisely similar free-motion equation is satisfied by a distribution function

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n|a(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)|^2. \quad (24)$$

With the aid of functions (17) it is easy to obtain the density matrix. Its diagonal elements coincide with the average value of  $|\psi_j(\mathbf{r})|^2$ . Meanwhile, the offdiagonal elements correspond to the above selected standard shape (17) of wave packets. We derived expression (16) for the wave function  $\psi(\mathbf{r})$  on the assumption that the gas consisted of Bose particles. But actually, the expression for the envelope  $a(\mathbf{r})$  was defined only up to an arbitrary phase factor  $\exp(i\alpha)$ . Therefore, at temperatures far away from degeneration, formula (16) is valid also for Fermi particles. Thus, in warm and rather tenuous gases, the Bose and Fermi statistics make practically no difference.

## 5. Kinetic equation

Quantum theory is capable of tracing the time-evolution of a quantity  $|\psi|^2$ . This quantity is interpreted as a probability of finding some particle in a given space region. It is clear that our description of a gas in terms of wave packets must agree with the evolution of  $|\psi|^2$ . Because of that, the collapses should obey the law  $p \sim |\psi|^2$ , where  $p$  represents the just defined probability. In other

words, the  $p \sim |\psi|^2$  law seems to be an external constraint imposed on all the collapses of gas wavefunctions.

The kinetic, or master, equation is usually written for the distribution function  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = St(f). \quad (25)$$

Here  $\mathbf{v}$  represents the particle velocity. It corresponds to the wave-packet parameter  $\hbar\mathbf{k}/m$ . The right-hand side of (25) represents a collisional term. This term comprises two nonlinear integral expressions. The first of them represents the loss of particles, whose velocity is  $\mathbf{v}$ ; it can be approximated with  $-f/\tau$ . The second term represents the inflow of particles to the vicinity of velocity  $\mathbf{v}$ . In the so-called  $\tau$ -approximation (a highest degree of simplification) this term can be expressed as  $f_0/\tau$ , where  $f_0$  represents the Maxwellian distribution function.

There is a tradition to derive the kinetic equation, first, by finding the scattered waves and, second, interpreting  $|\psi|^2$  as a probability of a given scattering event. However, this goal can also be achieved in a different way. Namely we use again the Schrödinger equation (5), but this time (21) and (22) are assigned as zero-approximation functions. Otherwise, we repeat all the calculations mentioned in Section 2 and obtain the following wavefunctions of the first-order approximation,

$$\psi^1(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l, t) = \int_0^t G_{jl}^2(t-t') U_{jl} \psi(\mathbf{r}_j, t') \psi(\mathbf{r}_l, t') dt'. \quad (26)$$

This formula differs from (11) in a sole respect. Instead of the solitary packets  $\psi_j^0$  and  $\psi_l^0$ , the integrand comprises the symmetrized functions (16). Let us put (26) into the right-hand side of the Schrödinger equation (6). Then we can gather all the small terms of the second order. This gives

$$\psi(\mathbf{r}_j) \psi(\mathbf{r}_l) L_1 \psi(\mathbf{r}) = \sum_{j \neq l} U_{jl} [\psi^1(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}_l) + \psi^1(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}_j)]. \quad (27)$$

Here appears operator  $L_1$ ; according to (13), it takes into account the attenuation of solitary wavefunctions.

In analogy with the BBGKY hierarchy, we can simplify Eq. (27) by means of the following procedure. Multiply this equation by  $\psi^*(\mathbf{r}_j) \psi^*(\mathbf{r}_l)$  and integrate the product over  $\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l$  with due account for the normalization of  $|\psi|^2$ . Then substitute (22) for  $\psi(\mathbf{r})$ , multiply (27) by  $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , and average the result over  $\mathbf{r}$ . The last operation means that we select wave packets with momentum  $\hbar\mathbf{k}$ . Neglecting small terms we obtain

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a + \frac{1}{2\tau} a = S_2, \quad (28)$$

where  $a = a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  is the wave-packet amplitude.  $S_2$  represents the result of operations just performed on the right-hand side of Eq. (27).

In principle, we might attempt to obtain an explicit expression for  $S_2$  by means of straightforward calculations. However, we prefer a simpler approach. Take into consideration that relation (24) links the squared modulus  $|a|^2$  with

the distribution function  $f$ . This makes it possible to obtain, with the aid of (28), an equation for  $f$ . For this purpose, we multiply Eq. (28) by  $na^*(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  and add to the resulting product the complex conjugated equation. This yields

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = -\frac{1}{\tau} f + n(a^* S_2 + a S_2^*). \quad (29)$$

The right-hand side of (29) must represent the collisional term  $St(f)$  of the Boltzmann kinetic equation. Taking advantage of the simplified  $\tau$ -approximation, we assume

$$St(f) \approx -\frac{1}{\tau} (f - f_0), \quad (30)$$

where  $f_0$  represents the Maxwellian distribution function. In this approximation we have  $a^* S_2 + a S_2^* = f_0/(n\tau)$ . In addition to  $a$ ,  $a^*$ , let us also consider  $a_0$ ,  $a_0^*$ . The latter correspond to the Maxwellian distribution, and we have, on average, the equality  $n|a_0|^2 = f_0$ . If the difference  $a - a_0$  is assumed to be small, then it is possible to express  $S_2$  as  $S_2 = (2a_0 - a)/(2\tau)$  up to linear terms, inclusively. Hence, we obtain in the  $\tau$ -approximation,

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a = -\frac{1}{\tau} (a - a_0). \quad (31)$$

Here,  $a(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$  represents the amplitude of a packet with a wavenumber  $\mathbf{k} = m\mathbf{v}/\hbar$ , while  $a_0$  is the amplitude of a packet pertaining to the Maxwellian distribution.

Eq. (31), a simplified version of (28), is linear in  $a$ . Essentially, the approximate expression  $S_2 \approx (2a_0 - a)/(2\tau)$  describes the «injection» of wave packets with a Maxwellian equilibrium distribution.

In analogy with kinetic equation (29), Eq. (31) implies operation in macroscopic volumes of the phase space. This means that an individual amplitude  $a(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$  can correspond to a multitude of wave packets, whose  $\mathbf{k}$  values are the same within the  $\Delta k \sim \kappa$  range. Therefore, the decay of the amplitude  $a \sim \exp(-t/\tau)$ , exhibited by Eq. (31), is trivial. It describes a decrease in the number of wave-packets with a given wavenumber vector  $\mathbf{k}$ . Similarly, the term  $a_0/\tau$  in the right-hand side of (31) describes the injection of new packets with a more or less smooth average spatial distribution.

It is easily verified that the kinetic equation (31) can be transformed into kinetic equation (29) with a collisional term given by (30). To this purpose, it suffices to neglect a term quadratic in a small difference  $(a - a_0)$ .

## 6. Conclusion

In this work we have established a new standpoint for the description of the atom wavefunctions in an ordinary gas as wave packets. Their broadening in the momentum space is a direct consequence of the uncertainty in energy within the  $\hbar/\tau$  range (here  $\tau$  is the average time between successive collisions). The collisions themselves somewhat shorten the packets in real space. The causes of these effects are well seen in the perturbation theory. Eq. (12) demonstrates that already in the second-order approximation there occur a highly intense chaotic distortion and a local vanishing (destruction) of the particle wavefunction. These phenomena are produced by collisions of a given particle with the other ones.

In view of this effect, it seems more adequate to describe the wavefunctions of atoms in terms of collapsing wave packets. In the framework of the continuous collapse model (see (3)) all the packets have the same form analogous to (17).

Since all the particles are identical, it is convenient to take advantage of representation (16). If so, the wavefunction of any particle consists of a set of wave packets. The functions analogous to (16) deserve to be called a *dynamic basis*, because any state of gas can be represented by an appropriate set of just these basic functions (this statement is valid in the continuous collapse approximation). In the zero approximation, the wavefunction of all particles (see (21)) simply represents a product of all the  $\psi(\mathbf{r}_j)$  functions. The function  $\psi(\mathbf{r})$  can be expressed in the form of (22), which makes it possible to compose a kinetic equation linear in amplitudes  $a(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ .

### References

1. *Petrovsky T., Prigogine I.* // Physica A. 1988. V. 147. P. 439.
2. *Petrovsky T., Prigogine I.* // Phys. Lett. A. 1993. V. 182. P. 5.
3. *Kadomtsev B.B.* // Phys. Usp. 1995. V. 38 P. 923.
4. *Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B.* // Sov. Phys. JETP. 1995. V. 81. P. 897.
5. *Baggot J.* Meaning of quantum theory. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1994.
6. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Kvantovaya mekhanika. Quantum mechanics, Ch. 17. — Moscow: Nauka FML, 1998. P. 585, 691.



## ЛЕГКАЯ КВАНТОВАЯ ЧАСТИЦА В ГАЗЕ \*)

В сообщении рассмотрено движение легкой квантовой частицы в газе тяжелых атомов. Рассмотрение проводится в представлении Шрёдингера с явным учетом коллапсов волновых функций.

В [1, 2] показано, что наиболее адекватное описание квантового хаоса при тепловом движении атомов газа может быть построено на основе представлений о коллапсах волновых функций. При таком подходе волновые функции атомов газа выглядят как волновые пакеты шириной  $\sim\sqrt{\lambda\lambda_B}$ , где  $\lambda$  — средняя длина пробега,  $\lambda_B$  — средняя длина волны де Бройля. Размеры волновых пакетов поддерживаются парными столкновениями, которые как бы поджимают пакеты и тем самым компенсируют их квантовое распыливание.

В настоящем сообщении рассматривается движение легкой частицы в газе. Такое движение сложнее движения тяжелой частицы, поскольку легкая частица является как бы более квантовой. В частности, если отношение массы легкой частицы к массе атомов стремится к нулю, то мы приходим к модели Лоренца о движении частицы в хаотической среде неподвижных рассеивателей. В этом случае может иметь место чисто квантовый эффект — локализация Андерсона. Если же отношение масс мало, но не исчезающе мало, то нужно учитывать тепловое движение атомов газа и соответствующие коллапсы их волновых функций. Коллапсирование волновых функций атомов газа должно сказываться на динамике легкой частицы в виде коллапса ее волновой функции.

Пусть в газе атомов с массой  $m$  и плотностью  $n$  при температуре  $T$  находится легкая частица с массой  $\mu \ll m$ . Длина свободного пробега атомов газа равна  $\lambda = 1/(n\sigma)$ , где  $\sigma$  — поперечное сечение рассеяния. Для простоты допустим, что длина пробега легкой частицы также равна  $\lambda$ .

Как показано в [1, 2], волновые функции атомов газа приближенно могут быть представлены в виде волновых пакетов вида

$$\psi = A \exp \left[ -i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{2\Lambda^2} \right]. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор центра волнового пакета,  $A$  — нормировочный множитель. Без учета рассеяний на других атомах волновой пакет движется равномерно и прямолинейно, так что  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t=0) + \mathbf{v}t$ , где  $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m$ . Величина  $\Lambda^2 = b^2 + i\hbar t/m$ , где  $b$  — ширина пакета в момент его рождения, т. е. при  $t = 0$ . При повторном рассеянии

\*) Кадомцев Б.Б., Кадомцев М.Б. // Доклады АН. 1998. Т. 358. № 3. С. 325–328.

(в среднем при  $t = \tau$ , где  $\tau$  — среднее время между рассеяниями)  $\Lambda^2 = b^2 + i\hbar\tau/m$ , т. е.  $|\Lambda^2|^2 = b^4 + \hbar^2\tau^2/m^2 \equiv \Lambda_0^4$ . Величина  $b^2$  оказывается равной  $b^2 = \hbar\tau/m$  [2]. Таким образом, размеры волнового пакета несколько пульсируют от коллапса к коллапсу, стартуя с величины  $b$  и кончая величиной  $\sqrt{2}b$  перед повторным коллапсом. Если ввести обозначения  $\lambda_B = \hbar/(mv_T)$ ,  $\tau = \lambda/v_T$ ,  $v_T = \sqrt{T/m}$ , то для минимальной ширины пакета получим следующее соотношение:  $b = \sqrt{\lambda\lambda_B}$ , где  $\lambda_B$  — средняя длина волны де Бройля.

Рассмотрим теперь поведение легкой частицы. Ее средняя тепловая скорость  $v_t = \sqrt{T/\mu}$  в  $\sqrt{m/\mu} \gg 1$  раз больше тепловой скорости атомов. Поэтому за время  $\tau$  легкая частица испытает  $N_s = \sqrt{m/\mu}$  рассеяний, где  $N_s$  — большое число. Если бы легкая частица была классической, то ее траектория выглядела бы как ломаная линия со средней длиной прямолинейных отрезков, равной  $\lambda$ , лежащая в объеме  $\sim \lambda^3 N_s^{3/2} \gg \lambda^3$ . Рассмотрим теперь, что происходит с квантовой частицей, взаимодействующей с квантовыми атомами газа.

Волновые же функции атомов газа представляют собой набор волновых пакетов плюс рассеянных волн. За время порядка  $\tau$  рассеянные волны коллапсируют в волновые пакеты из-за процессов декогерентности в квантовом хаосе (большая часть рассеянных волн при этом уничтожается). В результате ретроспективно во времени волновые функции атомов газа должны выглядеть как волновые пакеты вида (1) с траекториями центров, аналогичными классическим траекториям в виде ломаных линий.

Коллапсы волновых функций атомов должны приводить к коллапсам волновой функции легкой частицы. Поэтому волновая функция легкой частицы также должна «схлопнуться» в волновой пакет, который за время  $\tau$  успевает испытать  $N_s \gg 1$  рассеяний внутри объема, значительно большего элементарного объема  $\sim \lambda^3$ . Можно предположить, что коллапсы в разных объемах  $\sim \lambda^3$  не коррелированы друг с другом. Разумеется, сама легкая частица может способствовать установлению слабых корреляций между коллапсами в разных объемах. Но кажется вероятным, что такие корреляции очень малы, тогда коллапсы волновой функции в разных объемах  $\sim \lambda^3$  можно считать независимыми друг от друга. Соответственно коллапсы волновой функции легкой частицы могут происходить гораздо чаще, чем коллапсы функций атомов.

При каждом коллапсе атома его волновая функция умножается на форм-фактор вида  $\exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2/(2b^2)]$ . Если такой коллапс сопровождается коллапсом рассеянной волны легкой частицы, то и у волновой функции легкой частицы должен появиться аналогичный форм-фактор коллапсирования. В поперечном направлении этот форм-фактор соответствует замене  $b$  на величину  $b_*$ , которую можно оценить из следующих соображений.

Неопределенность локализации  $\sim b$  у тяжелого атома отвечает неопределенности  $\alpha \sim b/\lambda$  направления его траектории на длине  $\sim \lambda$ . Так как неопределенность направления траектории при столкновении связана с обменом импульсом, а у легкой частицы импульс в среднем в  $(\mu/m)^{1/2}$  меньше импульса атома, то соответствующая неопределенность у траектории легкого атома  $\alpha_* \sim b_*/\lambda$  должна быть в  $(m/\mu)^{1/2}$  раз больше, т. е.

$b_* \approx (m/\mu)^{1/2}b$ . За время  $\tau$  легкая частица испытывает  $N_s = (m/\mu)^{1/2}$  столкновений, так что последовательное применение форм-факторов могло бы привести ширину пакета легкой частицы за время  $\tau$  до величины  $\sim(m\mu)^{1/4}b$ , т. е. до того значения, которое имела бы легкая частица в среде из легких атомов с массой  $\mu$ . Но на самом деле такого сильного сужения пакета не происходит из-за квантового расплывания волнового пакета, влияния расходимости сферических волн и того обстоятельства, что продольное коллапсирование дает более широкие пакеты по сравнению с поперечным коллапсированием. Для учета этих эффектов требуется более детальное рассмотрение.

Рассмотрим сначала, как коллапсы распределены во времени. Вероятность коллапса волновой функции одиночного атома газа в течение времени  $dt$  пропорциональна  $dt/\tau$ . Если предыдущий коллапс произошел при  $t = 0$ , то вероятность  $dp_a(t)$  коллапса вблизи момента времени  $t$  равна произведению вероятности  $\exp(-t/\tau)$  того, что от 0 до  $t$  не было другого коллапса, на вероятность коллапса за интервал времени  $dt$ :

$$dp_a(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \frac{dt}{\tau}. \quad (2)$$

Другими словами, коллапсы волновых функций атомов распределены по Пуассону. У легкой частицы закон распределения коллапсов по времени должен быть сложнее. Обозначим через  $\tau_0$  среднее время столкновений легкой частицы:  $\tau_0 = \lambda/v_t = \tau N_s^{-1}$ , где  $N_s = (m/\mu)^{1/2}$ . Пусть при  $t = 0$  произошел коллапс волновой функции легкой частицы. При  $t \gg \tau_0$  волновая функция легкой частицы, рассеиваясь на атомах, будет диффузионно расширяться, и вероятность коллапсирования волновой функции легкой частицы в одной из элементарных ячеек  $\sim \lambda^3$  можно приближенно считать пропорциональной величине  $(t/\tau_0) dt/\tau$ , где фактор  $t/\tau_0$  учитывает число пройденных ячеек. Умножая эту величину на вероятность отсутствия коллапса в интервале времени от нуля до  $t$ , мы получим следующий закон для вероятности повторного коллапса легкой частицы:

$$dp(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau\tau_0}\right) \frac{t}{\tau\tau_0} dt. \quad (3)$$

Умножая это выражение на  $t$  и интегрируя по  $dt$ , нетрудно найти время повторного коллапсирования  $\tau_*$ :

$$\tau_* \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \tau_0 \left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/4}. \quad (4)$$

С приемлемой для нас точностью  $\tau_*$  совпадает со значением аргумента  $t$  в максимуме функции (3). Приближенно можно считать, что повторный коллапс волновой функции легкой частицы происходит по прошествии времени  $t = \tau_*$  после предыдущего коллапса. При  $N_s \gg 1$  имеют место неравенства  $\tau_0 \ll \tau_* \ll \tau$ . Поэтому приближенно можно считать, что на промежутках времени  $t \leq \tau_*$  после коллапса волновая функция легкой частицы (и газа) эволюционирует согласно уравнению Шрёдингера. За это время легкая частица испытывает  $\tau_*/\tau_0$  рассеяний и образует сложный клубок из рассеянных и перерассеянных волн в объеме  $\sim \lambda^3(\tau_*/\tau_0)^{3/2}$ . Затем происходит коллапс и волновая функция сжимается в волновой пакет, чтобы снова повторить цикл рассеяний в течение времени  $\sim \tau_*$ .

Нам следует найти ширину волнового пакета легкой частицы сразу после коллапса. Рассмотрим одно из рассеяний легкой частицы. Пусть начальная волновая функция налетающей легкой частицы близка к плоской волне вида  $\psi_i = \exp(-i\omega_i t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $\mathbf{k}$  — начальный волновой вектор (нормировку волновых функций мы не учитываем).

Начальную волновую функцию атома  $\psi_a$  будем также считать близкой к плоской волне:

$$\psi_a = \exp(-i\Omega t + i\mathbf{K}\mathbf{R}),$$

где  $\mathbf{R}$  представляет собой радиус-вектор атома,  $\mathbf{K}$  — волновой вектор. Рассеянная волна в пренебрежении малыми членами порядка  $\mu/m$  выглядит как

$$\psi_f = A\psi_a \frac{\exp[-i\omega t + i(\mathbf{k} - k\mathbf{n})\mathbf{R} + ik|\mathbf{r} - \mathbf{R}|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}, \quad (5)$$

где  $A$  — амплитуда,  $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{R})/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ , а частота  $\omega$  может быть найдена из закона сохранения энергии. Из этого выражения видно, что после рассеяния волновой вектор атома становится равным  $\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \mathbf{k} - k\mathbf{n}$ .

Допустим, что волновые пакеты легкой частицы и атома пересеклись вблизи начала координат и их взаимное рассеяние происходило в течение короткого промежутка времени вблизи  $t = 0$ . После рассеяния волновой пакет легкой частицы отлетает на расстояние  $\sim \lambda$  за время  $\tau_0 = \tau\sqrt{\mu/m}$  и вступает в последующие рассеяния на других атомах. Волновой пакет атома пролетает расстояние  $\sim \lambda$  за гораздо большее время  $\tau$  и только затем испытывает коллапс из-за декогерентного рассеяния на атомах газа. Сколлапсированную волновую функцию атома можно пересчитать на время  $t \approx 0$  и затем найти влияние этого коллапса на волновую функцию легкой частицы.

Пусть при  $t = \tau$  волновая функция атома коллапсирует в пакет вида

$$\exp\left\{i\mathbf{K}'\mathbf{R} - \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)^2}{2b^2}\right\},$$

где  $\mathbf{R}_0 = \hbar\mathbf{K}'t/m$  — радиус-вектор центра пакета. Если вернуться обратно по времени к  $t = 0$ , то волновая функция этого пакета примет вид

$$\exp\left\{i\mathbf{K}'\mathbf{R} - \frac{R^2}{2(\Lambda^*)^2}\right\},$$

где  $(\Lambda^*)^2 = b^2 - i\hbar\tau/m$ . Теперь мы можем «спроецировать» волновую функцию (5) на волновой пакет атома и тем самым найти волновую функцию рассеянной частицы. Для этого удобно выбрать специальную систему координат такую, чтобы ось  $x$  была направлена вдоль направления распространения волнового пакета легкой частицы. Допустим, что мы хотим описать этот пакет на расстоянии  $x - L \approx \lambda$  от области рассеяния, т. е. от начала координат. Поскольку в области рассеяния  $R \ll L$ , то волновую функцию (5) при  $t \approx 0$  можно приближенно представить в виде

$$\psi_f = \frac{A}{L} \psi_a \exp\left\{+i(\mathbf{k} - k\mathbf{n})\mathbf{R} + ikx + \frac{ik}{2L} [(y - Y)^2 + (z - Z)^2]\right\}. \quad (6)$$

Умножим  $\psi_f$  на сопряженную функцию волнового пакета тяжелой частицы

$$\exp\left\{-i\mathbf{K}'\mathbf{R} - \frac{R^2}{2\Lambda^2}\right\},$$

где  $\Lambda^2 = b^2 + \hbar\tau/m$ , и проинтегрируем полученное произведение по  $Y$ ,  $Z$ -координатам атома.

Учитывая, что  $\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \mathbf{k} - k\mathbf{n}$ , после интегрирования получим выражение для волновой функции легкой частицы после коллапса:

$$\psi_f = \frac{A}{L} \exp \left\{ -i\omega t + ikx - \frac{y^2 + z^2}{2b_{**}^2} \right\}, \quad (7)$$

где  $1/b_{**}^2 = -ik(L - ik\Lambda^2)$ . Нетрудно видеть, что величина  $L$  значительно больше  $k|\Lambda^2|$ , поскольку  $L \sim \lambda$ ,  $\Lambda^2 \sim \lambda_B \lambda$ ,  $k \approx \sqrt{\mu/m} \lambda_B^{-1}$ . Поэтому приближенно  $1/b_{**}^2 \approx -ik/L + k^2 b^2/L^2$ . Здесь первое слагаемое описывает расходимость сферических волн, а второе дает форм-фактор  $\Phi = \exp \left[ -\frac{y^2 + z^2}{2b_*^2} \right]$ , где  $b_* \approx \frac{\lambda}{kb} = \left( \frac{m}{\mu} \right)^{1/2} b = \left( \frac{m}{\mu} \right)^{1/4} \left( \frac{\hbar\tau_0}{\mu} \right)^{1/2}$ . Согласно (7) волновая функция легкой частицы близка к сферической волне, умноженной на форм-фактор  $\Phi$ , учитывающий результат однократного коллапсирования. Как мы видим из (7), однократное коллапсирование происходит только поперек направления распространения волнового пакета.

Относительно продольного направления соответствующий коллапс можно оценить следующим образом. Учтем, что при коллапсе поперечная ширина волнового пакета легкой частицы определяется величиной  $b_*$ . Тяжелый атом со средней скоростью  $v_T$  выходит из области взаимодействия с таким пакетом за время порядка  $b_*/v_T$ . Если коллапс тяжелого атома сопровождается рассеянием легкой частицы, то все нерассеянные волны легкой частицы уничтожаются. Поэтому продольная длина волнового пакета легкой частицы после коллапса с рассеянием не может быть больше, чем  $b_* v_t/v_T = (m/\mu)^{1/2} b_*$ . Приближенно можно принять, что форм-фактор продольного коллапсирования легкой частицы равен  $\exp[-x^2/(2b_1^2)]$ , где  $b_1^2 = mb_*^2/\mu = (m/\mu)^{3/2} b_0^2$ ,  $b_0 = (\hbar\tau_0/\mu)^{1/2}$ .

После каждого коллапса легкая частица совершает  $N = \tau_*/\tau_0 \approx (m/\mu)^{1/4}$  рассеяний, а затем наступает следующий коллапс. При повторном коллапсе большая часть рассеянных волн уничтожается, но если  $N \gg 1$ , то оставшаяся «сетка волн» соответствует суперпозиции многих траекторий волновых пакетов между двумя положениями коллапсов. При  $t > \tau_*$  в промежуточной области между двумя «точками коллапсирования» могут происходить дополнительные коллапсы на других атомах, так что в конце концов останется только одна-единственная траектория в виде ломаной линии, по которой «пролетел» пакет.

Таким образом, по прошествии времени  $\sim \tau$  волновая функция легкой частицы коллапсирует на всем протяжении ее траектории. Соответствующий сценарий ее поведения можно описать как движение волнового пакета по почти классической траектории, состоящей из прямолинейных отрезков длиной  $\sim \lambda$  с резкими изломами вблизи точек рассеяния. Цепочка первичных коллапсов с интервалом по времени в среднем  $\tau_*$  отмечает те точки, через которые пройдет траектория, формируемая последующими коллапсами. При каждом первичном коллапсе волновой пакет поджимается с фактором  $\exp[-x^2/(2b_1^2)]$  в продольном направлении и с фактором  $\exp[-\rho^2/(2b_*^2)]$  в поперечном направлении, где  $x$  — координата вдоль траектории, а  $\rho$  — радиус-вектор в поперечном направлении.

Эволюцию волнового пакета легкой частицы во времени можно описать приближенной моделью непрерывного коллапсирования. Для этого следует составить уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi - i \frac{\hbar x^2}{2b_1^2 \tau_*} \psi - i \frac{\hbar \rho^2}{2b_2^2 \tau_*} \psi - i \frac{\hbar}{\tau_0 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \psi) + i\hbar \gamma \psi. \quad (8)$$

Здесь второй член справа учитывает коллапсы в продольном направлении ( $x$  отсчитывается вдоль траектории пакета от его центра), третий член соответствует коллапсам в поперечном направлении, четвертый член учитывает расходимость рассеянных волн (в среднем с поперечной скоростью  $\rho v_t/\lambda$ ), а последний член добавлен для сохранения нормировки. Члены коллапсирования подобраны таким образом, чтобы при отсутствии других членов они давали нужные форм-факторы за среднее время между коллапсами.

Стационарное решение этого уравнения можно искать в виде

$$\psi = \exp \left( -i\omega t - \frac{x^2}{2\Lambda_{\parallel}^2} - \frac{\rho^2}{2\Lambda_{\perp}^2} \right). \quad (9)$$

Подбирая константу  $\gamma$  таким образом, чтобы частота  $\omega$  была действительной, можно найти  $\Lambda_{\parallel}$  и  $\Lambda_{\perp}$ . В предельном случае  $\mu/m \ll 1$  находим

$$\begin{aligned} \Lambda_{\parallel}^{-2} &= (1-i)\Lambda_0^{-2}, & \Lambda_0^4 &= \frac{2b_1^2 \hbar \tau_*}{\mu} \approx 2,5 \left( \frac{m}{\mu} \right)^{7/4} b_0^4, \\ \Lambda_{\perp} &= \left( \frac{m}{\mu} \right)^{3/8} b_0, & \omega &\approx \frac{(\mu/m)^{3/4}}{2\tau_0}, \\ \gamma &\approx \frac{2}{\tau_0} + \frac{\hbar^2}{2\mu\Lambda_0^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Как видим, продольная ширина пакета  $\Lambda_{\parallel}$  при  $m/\mu \gg 1$  несколько отличается от поперечной ширины  $\Lambda_{\perp}$ , так что одна из них несколько больше, а другая несколько меньше их среднегеометрического значения:  $(m/\mu)^{0,4} b_0 = (m/\mu)^{0,4} \sqrt{\lambda_b \bar{\lambda}}$ . Все приведенные выше рассуждения опираются на допущение о декогерентности. Так как при рассеянии легкой частицы на тяжелом атоме происходит обмен энергией  $\sim \delta\varepsilon \sim (\mu/m)^{1/2} T$ , то условие сбоя фазы за время  $\tau_0$  выглядит следующим образом:

$$\frac{\delta\varepsilon\tau_0}{\hbar} = \left( \frac{\mu}{m} \right)^{1/2} \frac{\tau_0 T}{\hbar} > 1.$$

Это условие может быть представлено в виде  $\mu/m > \lambda_B/\lambda$  или  $\mu/m > > (\lambda_b/\lambda)^2$ , где  $\lambda_B$ ,  $\lambda_b$  — длины волн де Бройля атома и легкой частицы,  $\lambda$  — длина пробега. Для величин  $\mu/m$  меньших, чем  $\lambda_B/\lambda$ , наше рассмотрение неприменимо.

Итак, поведение легкой частицы в газе оказывается действительно гораздо более сложным, чем поведение обычного атома газа. Коллапс ее волновой функции выглядят как результат приближенных «внутренних измерений» координат и импульса легкой частицы средой, т. е. самим газом. При коллапсировании легкой частицы происходит уничтожение мно-

жества рассеянных волн и остается только один волновой пакет шириной  $b_* = (m/\mu)^{1/4}(\hbar\tau_0/\mu)^{1/2}$  в поперечном направлении и достаточно протяженный вдоль направления распространения волнового пакета. После коллапса за время  $\tau_*$  образуется множество рассеянных волн, из которых большая часть уничтожается повторным коллапсом, а оставшееся разнообразие волн постепенно, за время столкновений атомов газа  $\tau$ , «доизмеряется» и превращается в одну «уширенную траекторию», вдоль которой пролетал протяженный волновой пакет легкой частицы.

Поскольку процесс коллапсирования легкой частицы носит характер внутреннего измерения, то выбор того или иного пути следования волнового пакета должен отвечать закону вероятности  $p \sim |\psi|^2$ .

### *Список литературы*

1. *Кадомицев Б.Б., Кадомицев М.Б.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. С. 1634.
2. *Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B.* // Chaos. 1996. V. 6. P. 399.

## ON THE ENERGY CONFINEMENT TIME IN ITER \*)

This paper treats the question of how large extrapolation of the energy confinement time for ITER should be made, given only empirical data from existing tokamaks. It is shown that the extrapolation towards ITER based on the dimensional analysis approach, is fundamentally not that great.

The current design of ITER differs significantly from existing experimental tokamak devices. Even compared with the largest tokamaks (e. g., JET, JT-60U), the linear scale of ITER is three times larger, the magnetic field two times, the plasma current three times, and the total heating power almost an order of magnitude. Under such conditions the predictions about energy confinement time should be made, based, due to the lack of reliable theoretical understanding, mainly on empirical data.

The key question here is how large extrapolation of the energy confinement time,  $\tau_E$ , for ITER should be made. Typically, the confinement time, which is less than one second in present day machines, must be extrapolated to the value of  $\tau_E = 6$  s, corresponding to the ignition of a D-T plasma in ITER. It appears that with respect to  $\tau_E$  the extrapolation is larger than that of the machine size, plasma current or the value of the magnetic field. However, in reality this is not the case.

The point is that one second is quite an arbitrary unit of time, relative to the processes taking place in a tokamak plasma. It is well known from other areas of physics that internal scales are more appropriate to quantify the processes.

Correspondingly, for tokamak plasmas some internal time scale must be found which allows us to extrapolate a normalized value of  $\tau_E$  rather than  $\tau_E$  itself. In other words,  $\tau_E$  must be expressed in a normalized form upon which a basis for the extrapolation can only be estimated.

Among these normalized quantities the simplest is the product  $\tau_E B$ , which sometimes is used in the scaling analyses [1]. In dimensionless form this product is  $\tau_E \omega_{ci}$  where  $\omega_{ci} = eB/(m_i c)$  is the ion cyclotron frequency and  $m_i$  is the ion mass.

This value, however, is not very convenient because it contains more information than is needed (and which is not always known) about the plasma composition, e. g., the ion species content in the plasma. More universal is the value of  $\tau_E \omega_{ce}$ , where  $\omega_{ce} = eB/(m_e c)$  is the electron cyclotron frequency

---

\*) *Kadomtsev B.B., Igithkanov Yu.L. // Comments Plasma Phys. Controlled Fusion. 1999. V. 1(2). Part C. № 4. P. 65–72.*



and  $m_e$  is an electron mass. However, this dimensionless quantity  $\tau_E \omega_{ce}$  is also inappropriate.

Indeed, the use of  $\omega_{ce}$  assumes that one measures time in the units of electron gyration period in a strong magnetic field. However, already at the dawn of fusion research it was shown that neither the electron nor ion gyro motion are directly related to the radial transport of the charged particles in the strong magnetic field. The equation which determines the particle transport must be averaged over these fast oscillations. Only the drift velocities which remain after such averaging can be relevant to the radial transport of energy and particles in the plasma. This implies that  $\tau_E$  must be measured in the units of Bohm's time,  $\tau_B$ , which equals the ratio of the plasma size to the drift velocity. Since the plasma confinement in tokamaks is determined mainly by the poloidal magnetic field,  $B_p$ , and the major radius of the plasma,  $R$ , one can choose the time unit for  $\tau_B$  as

$$\tau_B = \frac{eRI}{c^2 T} \quad (1)$$

instead of the usual expression  $\tau_B = \pi a^2 e B_t / (cT)$ , where  $T$  is the plasma temperature,  $a$  is the minor radius,  $R$  is the major radius, and  $B$  is the magnetic field. Expression (1) is written in CGSE units. However, we will not need the dimensional values of electric charge,  $e$ , and of the speed of light,  $c$ , so they are omitted in the equations below. We will use as a characteristic confinement time the following normalized value:

$$\Phi = \frac{\tau_E T}{RI}. \quad (2)$$

It follows from Eq. (2) that for plasmas with the same temperature, the natural quantity for the measure of the confinement time is the ratio  $\tau_E / (RI)$ . All considerations regarding the extrapolation of the confinement time should make use of this quantity. As far as the temperature,  $T$ , is concerned, it can be defined by the energy balance equation:

$$\frac{W}{\tau_e} = P. \quad (3)$$

Here  $W$  is the total energy content of the plasma and  $P$  is the heating power applied to the plasma. The value  $\Phi$  in (2) can be considered as a function of some dimensional plasma parameters, so that

$$\tau_E = \frac{RI n \Phi}{nT}, \quad (4)$$

where  $n$  is the plasma density.

As can be seen from (3), the energy confinement time decreases when the plasma is heated and the plasma pressure (i.e., the product  $nT$ ) increases. This causes some degradation of confinement. Experiment shows, however, that the actual degradation is even greater, which indicates that  $\Phi$  can not be a constant. This implies that the value,  $\Phi$ , should depend on  $nT$  to an inverse power. This dependence can be represented in dimensionless form as  $\beta_p^{-\gamma}$ , where  $\beta_p$  is the ratio of plasma density to the pressure of the poloidal magnetic field at the plasma boundary,  $\gamma$  is a constant. In other words,  $\Phi = F \beta_p^{-\gamma}$ , where  $F$  is some function of the dimensionless parameters different

from  $\beta_p$ . Ignoring the numerical factor one has

$$\tau_E \propto FRI n I^{2\gamma} a^{-2\gamma} (nT)^{-1-\gamma}. \quad (5)$$

If we substitute this expression for  $\tau_E$  in the energy balance equation, (3), and make use of  $W = 3\pi^2 nTka^2R$ , where  $k$  is the elongation, then the plasma pressure can be found as a function of the heating power  $P$ . Eliminating pressure from Eq. (4), we can determine how the confinement degrades with an increase in the heating power. In order to make the calculation simpler, let us consider only H-mode confinement which degrades as  $\tau_E \approx P^{-2/3}$ . In this case the parameter  $\gamma$  is equal to unity so that expression (5) becomes

$$\tau_E = F_0 R I n^{1/3} (ka)^{2/3} P^{-2/3}. \quad (6)$$

Here  $F_0$  is an unknown function of the dimensionless parameters. Let us now compare Eq. (6) with the latest confinement scaling for the ELM-free H-mode [3]:

$$\tau_{E,th}^{ELM-free} = 0,0308 I^{0,95} B^{0,25} P^{-0,67} n_{19}^{0,35} M^{0,43} R^{1,99} \varepsilon^{0,08} k^{0,64}. \quad (7)$$

Here we use engineering units: current in MA, magnetic field in Tesla, power in MW,  $n_{19}$  plasma density in  $10^{19} \text{ m}^{-3}$ ,  $R$  in meters,  $\varepsilon = a/R$  and  $M$  is the atomic mass number. As we can see, expressions (6) and (7) are very similar. To be more precise, expression (7) can be obtained from (6) if the factor  $F_0$  is chosen as

$$F_0 = 0,0308 I^{0,05} B^{0,025} n_{19}^{0,02} M^{0,43} R^{0,32} \varepsilon^{-0,59} k^{-0,03}. \quad (8)$$

The factor  $F_0$  for different tokamaks is plotted in Fig. 1. As can be seen,  $F_0$  increases about 1.7 times when the linear size  $R$  increases three times, which corresponds to a doubling of the magnetic field for the machines plotted.

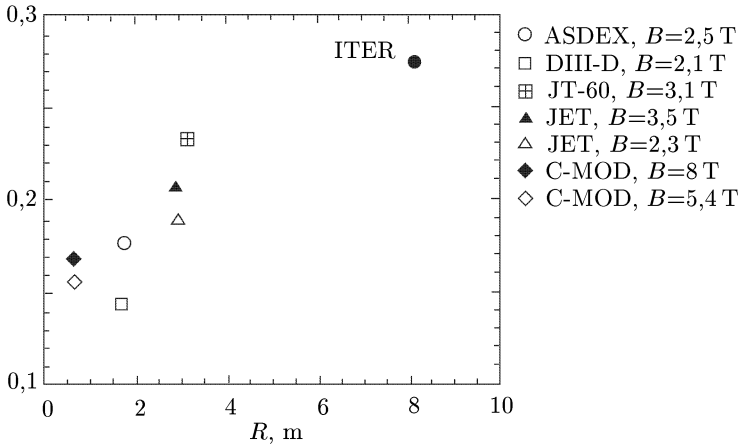


Fig. 1. Empirical factor  $F_0$  given by the relation (8) for different installations

The difference between the usual extrapolation of  $\tau_E$  measured in seconds and  $\tau_E$  measured in units of an internal time scale can be more clearly seen from Figs. 2 and 3. Figs. 2(a, b) show the observed  $\tau_E$  versus ITERH93-P

scaling for the ELM-free H-mode case and Figs. 3(a, b) for the ELMy H-mode case. The points for the various machines are taken from database ITER.DB2 and the H-mode ELMy confinement scaling was taken from [3]. Figures 2 b and 3 b show the scaling for the «dimensionless» values  $\tau_{E,th}/(RI)$ , which correspond to  $\tau_{E,th}$  measured in the units of Bohm time. As we can see, the extrapolation to ITER is not as great in case b as in a.

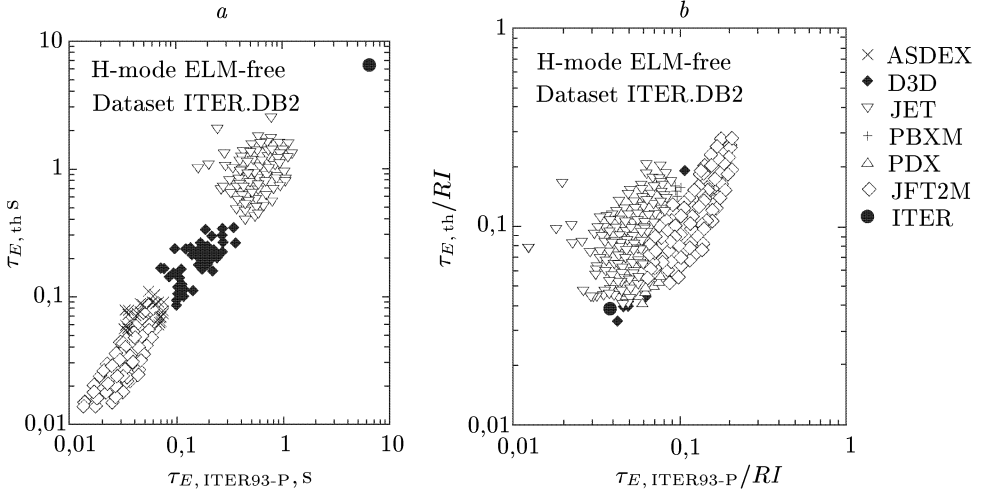


Fig. 2. *a* — predicted dependence of the energy confinement time  $\tau_{E,th}^{\text{ELM-free}}$ , measured in seconds according to the empirical scaling law; *b* — predicted dependence of the energy confinement time  $\tau_{E,th}^{\text{ELM-free}}$ , measured in relative units  $\tau_{E,th}/(RI)$  according to the empirical scaling law

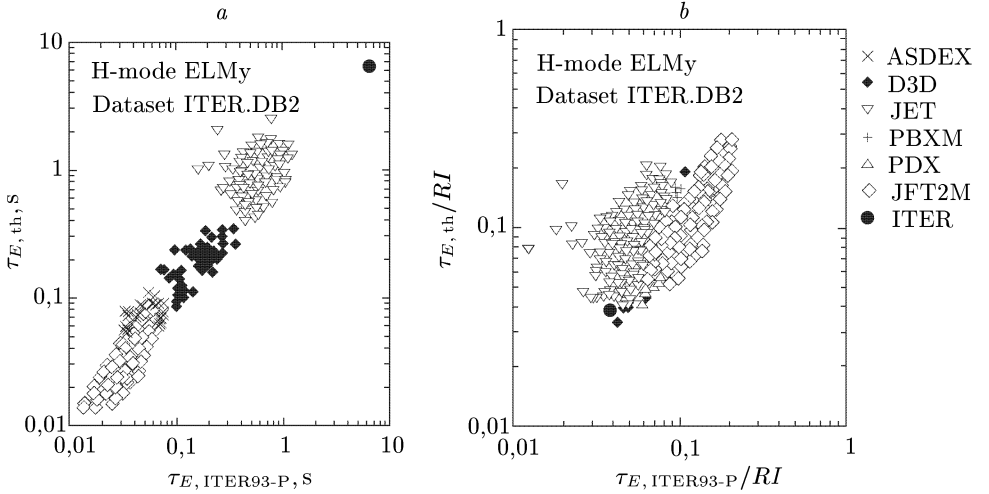


Fig. 3. *a* — predicted dependence of the energy confinement time  $\tau_{E,th}^{\text{ELMy}}$ , measured in seconds according to the empirical scaling law; *b* — predicted dependence of the energy confinement time  $\tau_{E,th}^{\text{ELMy}}$ , measured in relative units  $\tau_{E,th}/(RI)$  according to the empirical scaling law

Above, we have made an argument in favor of extrapolating the  $\tau_E$  data from existing machines towards ITER, taken not simply in seconds but rather measured in some internal time scale unit. As a candidate for such a scale it is natural to use the Bohm diffusion time scale. Accordingly, the extrapolation should be done not for  $\tau_E$ , but rather for the ratio  $\tau_E/(RI)$ . It is seen from the expression for the factor  $F_0$  that such an extrapolation towards ITER gives an increase in the confinement time by a factor of 1.7.

There is a question whether or not this factor of 1.7 is reasonable. The factor  $F_0$  should depend on the dimensionless parameters  $\nu_*$  and  $\rho_*$ . The collisionality parameter  $\nu_*$  for ITER has the same value as that for existing devices. As far as  $\rho_*$  is concerned, it is about five times less for ITER than for the present day large machines. The direct modelling of such small values of  $\rho_*$  can not be made on existing tokamaks. The dependence of  $F_0$  on  $R$  and  $B$ , which leads to the numerical factor 1.7, can be a consequence of a favorable dependence of  $\tau_E$  on  $\rho_*$ , where  $\rho_*$  is five or more times higher in smaller machines than in ITER. Although the extrapolation of the factor  $F_0$  is not as great, only 1.7 times, the validity of the extrapolation can not be guaranteed.

The question can be asked differently: is there any reason why the favorable dependence of  $\rho_*$  would change when  $\rho_*$  decreases by five times? Unfortunately, such a possibility can not be excluded. The point is that  $\rho_*^{-2}$  defines the number of possible oscillatory modes with transverse wavelengths larger than the average gyroradius. The number of such modes increases as  $\rho_*^{-2}$  when  $\rho_*$  decreases. In plasma turbulence, in contrast to ordinary fluid turbulence, there is no energy flow in the spectrum towards the small scale perturbations. Therefore the interaction of the small and large scale fluctuations of plasma parameters is more complicated, and the variation of the total mode numbers can affect the turbulence of the entire plasma. In particular, increases in  $\rho_*^{-2}$  can make the tokamak plasma more sensitive to small external perturbations. As a result, a new bifurcation could appear, i.e., the possibility to increase the number of different confinement modes exists. Therefore, the ITER plasma may be more «fretful» compared with the plasmas of existing devices. In order to realise this favorable factor in ITER, plasma control may need to be done more accurately.

Thus, we have shown that by using a dimensional analysis approach the extrapolation of modern experimental data towards ITER should be carried out not in terms of the confinement time,  $\tau_E$ , but rather in terms of the Bohm diffusion time. Accordingly, not  $\tau_E$ , but rather the ratio  $\tau_E/(RI)$  should be extrapolated. Such an extrapolation does not exceed a factor of two. Nevertheless, some uncertainty still remains because a plasma with as small a value of  $\rho_*$  as is expected in ITER can not be created in any existing machine.

### References

1. Connor J.W., Taylor J.B. // Nuclear Fusion. 1977. V. 17. № 5. P. 1047.
2. Detailed Design Report of ITER, Chapter 2. Plasma Confinement and Transport. J.C.T., San Diego, 1992.
3. Kardaum O. et al. // ITER: Analysis of the H-mode confinement and threshold databases. IAEA-CN-56/F-1-3. P. 251.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>1957</b>	
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> Принцип инвариантности для однородной среды произвольной формы . . . . .	7
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> О функции влияния в теории переноса лучистой энергии . . . . .	12
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> О флуктуациях в газе . . . . .	16
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> О действующем поле в плазме . . . . .	19
<b>1958</b>	
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> Магнитные ловушки с «гофрированным» полем . . . . .	27
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> О гидродинамике плазмы низкого давления . . . . .	38
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> Магнитные ловушки для плазмы . . . . .	44
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> О динамике плазмы в сильном магнитном поле . . . . .	52
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> О конвективной неустойчивости плазмы . . . . .	60
<b>1959</b>	
<i>Кадо́мцев Б.Б., Брагинский С.И.</i> Стабилизация плазмы с помощью неоднородных магнитных полей . . . . .	63
<i>Са́деев Р.З., Кадо́мцев Б.Б., Рудаков Л.И., Веденов А.А.</i> Динамика разреженной плазмы в магнитном поле . . . . .	73
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> О конвективной неустойчивости плазменного шнура . . . . .	86
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> О равновесии плазмы при винтовой симметрии . . . . .	93
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> Об устойчивости плазмы низкого давления . . . . .	96
<b>1960</b>	
<i>Кадо́мцев Б.Б., Недоспасов А.В.</i> Неустойчивость положительного столба в магнитном поле и «аномальная» диффузия . . . . .	103
<i>Кадо́мцев Б.Б., Рокотян В.Е.</i> Об устойчивости плазмы в поле магнитного диполя . . . . .	112
<b>1961</b>	
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> О турбулентности плазмы в ловушке с магнитными пробками . . . . .	115
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> Турбулентная утечка частиц из разряда в сильном магнитном поле . . . . .	125
<b>1962</b>	
<i>Кадо́мцев Б.Б., Петвиашвили В.И.</i> Слабо турбулентная плазма в магнитном поле . . . . .	137
<i>Кадо́мцев Б.Б., Тимофеев А.В.</i> Дрейфовая неустойчивость неоднородной плазмы в магнитном поле . . . . .	150
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> «Аномальная» диффузия разреженной плазмы с током в магнитном поле . . . . .	154
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> Турбулентный разряд в продольном магнитном поле . . . . .	165
<b>1963</b>	
<i>Кадо́мцев Б.Б.</i> Турбулентная диффузия разреженной плазмы в сильном магнитном поле . . . . .	181
<b>1964</b>	
<i>Кадо́мцев Б.Б., Михайловский А.Б., Тимофеев А.В.</i> Волны с отрицательной энергией в диспергирующих средах . . . . .	195

**1965**

*Kadomtsev V.B.* Plasma Turbulence, General Topics . . . . . 199

**1966**

*Кадо́мцев Б.Б.* Неустойчивость плазмы на запертых частицах . . . . . 209

*Кадо́мцев Б.Б., Шафра́нов В.Д.* О диффузии плазмы тороидального раз-  
ряда . . . . . 212

*Кадо́мцев Б.Б., Погу́це О.П.* Неустойчивость плазмы на запертых части-  
цах в тороидальной геометрии . . . . . 215

**1967**

*Кадо́мцев Б.Б.* Об удержании плазмы в тороидальных ловушках с раз-  
рушенными магнитными поверхностями . . . . . 229

*Кадо́мцев Б.Б., Погу́це О.П.* Электропроводность плазмы в сильном маг-  
нитном поле . . . . . 240

**1969**

*Кадо́мцев Б.Б., Погу́це О.П.* Циклотронная неустойчивость и сбросы  
плотности плазмы в адиабатических ловушках . . . . . 249

**1970**

*Кадо́мцев Б.Б., Погу́це О.П.* О диффузии плазмы в тороидальных системах 264

*Кадо́мцев Б.Б.* Тяжелый атом в сверхсильном магнитном поле . . . . . 273

*Игитма́нов Ю.Л., Кадо́мцев Б.Б.* Геликоны конечной амплитуды . . . . . 279

*Кадо́мцев Б.Б., Петви́аши́ли В.И.* Об устойчивости уединенных волн в  
слабо диспергирующих средах . . . . . 287

*Kadomtsev V.B., Pogutse O.P.* Collisionless Relaxation in Systems with  
Coulomb Interactions . . . . . 291

**1971**

*Кадо́мцев Б.Б., Кудря́вцев В.С.* Молекулы в сверхсильном магнитном поле 295

*Кадо́мцев Б.Б., Кудря́вцев В.С.* Атомы в сверхсильном магнитном поле . 298

*Kadomtsev V.B., Pogutse O.P.* Theory of Beam-Plasma Interaction . . . . . 301

**1972**

*Kadomtsev V.B., Kostomarov D.P.* Turbulent Layer in an Ideal Two-  
Dimensional Fluid . . . . . 311

*Kadomtsev V.B., Shafranov V.D.* A Stationary Tokamak . . . . . 317

*Кадо́мцев Б.Б., Кудря́вцев В.С.* Вещество в сверхсильном магнитном поле 326

**1973**

*Кадо́мцев Б.Б., Погу́це О.П.* Нелинейные винтовые возмущения плазмы  
в токамаке . . . . . 336

*Кадо́мцев Б.Б., Петви́аши́ли В.И.* О звуковой турбулентности . . . . . 352

**1975**

*Behrisch R., Kadomtsev V.B.* Plasma Impurities and their Significance in  
Fusion Reactors . . . . . 356

*Кадо́мцев Б.Б.* Токамаки и анализ размерностей . . . . . 376

*Кадо́мцев Б.Б.* О неустойчивости срыва в токамаках . . . . . 381

**1978**

*Kadomtsev V.B.* Cross-Field Thermal Conduction and Transport . . . . . 387

**1979**

*Kadomtsev V.B., Pogutse O.P.* Electron Heat Conductivity of the Plasma  
across a «Braided» Magnetic Field . . . . . 391

**1981**

- Glagolev V.M., Kadomtsev B.B., Shafranov V.D., Trubnicov B.A.* Closed Magnetic Trap with Rectilinear Sections . . . . . 403  
*Кадомцев Б.Б.* К структуре колец сатурна . . . . . 407

**1983**

- Кадомцев Б.Б.* Электронная теплопроводность в токамаках . . . . . 409  
*Kadomtsev B.B., Pogutse O.P., Yurchenko E.I.* Non-Linear MHD Equations and Dissipative Ballooning Modes . . . . . 420

**1984**

- Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* Теория электронных процессов переноса в сильном магнитном поле . . . . . 428  
*Кадомцев Б.Б., Морозов Д.Х., Погуце О.П.* Аномальная вязкость и вращение плазмы в токамаке . . . . . 432

**1985**

- Kadomtsev B.B., Pogutse O.P.* Self-Consistent Transport Theory in Tokamak Plasmas . . . . . 435

**1986**

- Есинчук Ю.В., Кадомцев Б.Б.* Оптимальное распределение плотности тока в токамаке . . . . . 444  
*Kadomtsev B.B.* Electron Cyclotron Resonance Heating and Electron Heat Transport in a Tokamak . . . . . 447

**1991**

- Kadomtsev B.B.* Ball Lightning as a Phenomenon of Self-Organization . . . . 453  
*Kadomtsev B.B.* Plasma Transport in Tokamaks . . . . . 458

**1992**

- Kadomtsev B.B.* Self-Organization and Transport in Tokamak Plasma . . . . 477

**1993**

- Kadomtsev B.B.* On the Reversed Field Pinch Configuration . . . . . 487

**1995**

- Kadomtsev B.B.* Thermal Pinch in Tokamak Plasma . . . . . 492  
*Itoh K., Kadomtsev B.B.* Fast Change in Core Transport After L–H Transition 497

**1996**

- Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B., Kucheryaev Yu.A., Podogov Yu.L., Sokolov Yu.L.* Investigation of the Sokolov Effect . . . . . 501  
*Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B.* Quantum Chaos in Gas . . . . . 513

**1997**

- Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B.* Brownian Motion of a Quantum Particle 523  
*Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B.* Wavefunctions of Gas Atoms . . . . . 534

**1998**

- Кадомцев Б.Б., Кадомцев М.Б.* Легкая квантовая частица в газе . . . . . 545

**1999**

- Kadomtsev B.B., and Igithkanov Yu.L.* On the Energy Confinement Time in ITER . . . . . 552

Научное издание

*КАДОМЦЕВ Борис Борисович*

**ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ**

Том 1

Под редакцией В.Д. Шафранова

Редактор *Д.А. Миртова*  
Оригинал-макет: *В.В. Затекин*  
Оформление переплета: *А.Ю. Алегина*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 10.10.2002. Формат 70×100/16.  
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 45,15. Уч.-изд. л. 49,67.  
Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997 Москва, Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ППП «Типография «Наука».  
121099 Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0330-X



9 785922 103305